Е.И. КОНОВАЛОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

С А М А Р А
2017

УДК 512(075)
ББК 22.143
П 563

Рецензенты: д-р. физ.-мат. наук, проф. А. И. Жданов
д-р. техн. наук, проф. А.Н. Коварцев

Коновалова Е.И.
П 563 **Сборник задач по алгебре и геометрии:** учеб. пособие / *Е.И.Коновалова* – Самарский университет: 2017. – 120 с.

ISBN 978-5-98972-055-2

Данное пособие отражает многолетний опыт автора по чтению лекций и ведению практических занятий по линейной алгебре и аналитической геометрии на факультете информатики Самарского государственного аэрокосмического университета.

Сборник задач охватывает все разделы линейной алгебры и аналитической геометрии. Предназначается для студентов специальностей и направлений: «Комплексное обеспечение информационной безопасности и автоматизированных систем», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная математика и физика», «Информационные технологии» и др.

УДК 512(075)
ББК 22.143

ISBN 978-5-98972-055-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие отражает опыт автора по чтению лекций и ведению практических занятий по линейной алгебре на факультете информатики Самарского государственного аэрокосмического университета.

Трудно представить себе образование современного специалиста без знания и владения основными методами линейной алгебры. Линейной алгебре посвящена обширная литература, имеются прекрасно написанные учебники и задачники.

Обучение линейной алгебре должно быть связано со специальными дисциплинами и базироваться на рассмотрении конкретных задач, относящихся к профессиональной деятельности будущего специалиста. Вместе с тем ощущается недостаток пособий, помогающих студентам выработать навыки решения задач по различным разделам линейной алгебры. Авторы ставили перед собой цель в какой-то мере ликвидировать этот пробел.

Назначение пособия мы видим в том, чтобы активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса линейной алгебры, так как умение решать задачи является лучшим критерием оценки глубины изучения программного материала и его усвоения.

Глава I. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ

§1. Определители 2-го и 3-го порядка

1. Вычислить определители 2-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$.

2. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах 1) a=(1,-3) b=(2,4) 2) a=(5,7) b=(2,3).
3. Найдите площадь треугольника, имеющего вершины 1) A(1,3) B (2,-2) C (-5,2) 2) A(0,-1) B (-3,4) C(4,2)
4. Используя правило Крамера, решить следующие системы:

1) $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1 \\ 3x_1+7x_2=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=4 \\ 4x_1-5x_2=10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1 \\ -4x_1-10x_2=3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x_1-7x_2=1 \\ -10x_2+14x_2=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1 \\ 4x_1+10x_2=2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x_1-7x_2=1 \\ 15x_2-21x_2=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 13 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 14 = 0; \end{cases}$

5. Вычислить определители 3-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

6. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах 1) a=(1,4,7) b=(2,1,2) c=(3,-1,-2) 2) a=(2,-1,2) b=(4,5,-3) c=(3,-4,7).

7. Вычислить объем тетраэдра, построенного на векторах 1) a=(3,-2,1) b=(2,1,2) c=(3,-1,-2) 2) a=(2,-1,2) b=(1,2,-3) c=(3,-4,7).

8. Доказать, что точки $A=(1;2;-1)$, $B=(0;1;5)$, $C=(-1;2;1)$, $D=(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

9. Вычислить объем пирамиды ABCD если A(2,-1,1) B(5,5,4) C(3,2,-1) D(4,1,3).

10. Используя правило Крамера, решить следующие системы:

1) $\begin{cases} 5x_1-6x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=2 \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3+4=0 \\ 6x_1-2x_2+3x_3+1=0 \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=10 \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3 \\ x_1+2x_2+2x_3=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3+2=0 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+10=0; \end{cases}$

11. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;

2) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}=0$.

12. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<0$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0$.

13. Пусть $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. Доказать, что найдется число $c\ (0<c<1)$ такое, что $f'(c)=0$.

§2. Перестановки и подстановки. Понятие определителя *n*-го порядка

14. Определить число инверсий в перестановках:

1) $(2,3,5,4,1)$;

2) $(6,3,1,2,5,4)$;

3) $(3,2,1,5,4)$;

4) $(7,5,6,4,1,3,2)$;

5) $(1,9,6,3,2,5,4,7,8)$;

6) $(1,6,4,3,8,5,9,7,2)$;

7) $(1,3,5,\dots,2n-1,2,4,6,\dots,2n)$;

8) $(2,4,6,\dots,2n,1,3,5,\dots,2n-1)$;

9) $(1,4,\dots,3n-2,2,5,\dots,3n-1,3,6,\dots,3n)$;

10) $(2,5,\dots,3n-1,3,6,9,\dots,3n,1,4,\dots,3n-2)$;

11) $(2,5,\dots,3n-1,1,4,\dots,3n-2,3,6,9,\dots,3n)$.

15. На множестве $\{1,2,\dots,6\}$ найти подстановку π, если $\pi(k)$ является остатком от деления числа $3k$ на 7. Определить ее четность.

16. На множестве $\{1,2,\dots,8\}$ найти подстановку π, если $\pi(k)$ является остатком от деления числа $5k$ на 9. Определить ее четность.

17. Перемножить следующие подстановки:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&1&2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}^2$;

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}^4$;

6) $\begin{pmatrix}2&3&4&6&1&5\\4&1&3&5&6&2\end{pmatrix}^6$;

7) $(1\ \ 5)(2\ \ 3\ \ 4)$;

8) $(1\ \ 3)(2\ \ 5)(4)$;

9) $(1\ \ 3)(2\ \ 5)(4)$;

10) $(7\ \ 5\ \ 3\ \ 1)(2\ \ 4\ \ 6)(8)(9)$;

11) $(1\ \ 2)(3\ \ 4)\dots(2n-1\ \ 2n)$;

12) $(3\ \ 2\ \ 1)\dots(3n\ \ 3n-1\ \ 3n-2)$;

13) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&5&4&1&7&10&2&6&9&8\end{pmatrix}^{100}$;

14) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&5&4&6&9&7&1&10&8&2\end{pmatrix}^{99}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{98}$; 16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{102}$.

18.Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

19. Определить четность подстановок:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$

.

20. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

1) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; 2) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

3) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$; 4) $a_{18}a_{21}a_{33}a_{46}a_{67}a_{55}a_{82}a_{74}$;

5) $a_{21}a_{42}a_{13}a_{34}a_{75}a_{86}a_{67}a_{58}$; 6) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

21. Подобрать i и k так, чтобы указанное произведение входило в соответствующий определитель с указанным знаком:

1) $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ (минус); 2) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ (плюс);

3) $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ (плюс); 4) $a_{51}a_{i6}a_{12}a_{35}a_{44}a_{6k}$ (минус).

22. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов главной диагонали?

23. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?

24. Вычислить треугольные определители:

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3n-2} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}` & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

25. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

26. Пользуясь только определением, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

27. Вычислить определители, используя подходящее разложение по строке или столбцу:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

§ 3. Свойства определителей. Вычисление определителей

28. Не вычисляя определителей, доказать следующие тождества:

1) $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & 1 & \sin^2\alpha \\ \cos^2\beta & 1 & \sin^2\beta \\ \cos^2\gamma & 1 & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$;

2) $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \cos 2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos^2\beta & \cos 2\beta & \sin^2\beta \\ \cos^2\gamma & \cos 2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ a+c & b & 1 \end{vmatrix} = 0$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$

8) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

9) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

10) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b);$

12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ac)(b-a)(c-a)(c-b);$

13) $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

29. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$;

19) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 15 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

20) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

30. Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого два элемента равны 4, а остальные 1 или – 1.

31. Приведением к треугольному виду или методом рекуррентных соотношений вычислить следующие определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

32. Вычислить определители Вандермонда:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 16 & 25 & 49 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 4 & 9 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$

33. Пусть α, β, γ – корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислить

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

34. Найти сумму всех определителей порядка n, в каждом из которых в каждой строке и в каждом столбце один элемент равен 1, а остальные – нулю. Сколько всего таких определителей?

35. Вычислить определитель $\left(C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!},\ n \in \Box,\ k \in \Box,\ k \le n \right)$:

$$\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^k \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+k}^0 & C_{n+k}^1 & \dots & C_{n+k}^k \end{vmatrix}.$$

§ 4. Формула Лапласа

36. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

37. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить следующие определители, предварительно преобразовав их:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & -5 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

§ 5. Матрицы. Операции над матрицами

38. Вычислить линейную комбинацию матриц:

1) $3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

2) $2\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

3) $2\begin{pmatrix}1 & 8 & 7\\ 1 & -5 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 24 & -7\\ -1 & -2 & 7\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}^T-2\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ -3 & 8 & 5\end{pmatrix}^T$.

39. Вычислить произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 5 & -3 & -2 & 1\\ 3 & -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix}5 & 7 & -3 & -4\\ 7 & 6 & -4 & -5\\ 6 & 4 & -3 & -2\\ 8 & 5 & -6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$

.

40. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ 0 & 6 & -3\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Выполнить следующие операции:

1) $2A-3B+4C$;

2) $A+2B-C$;

3) $3(A+B)-C$;

4) $A\cdot C$;

5) $A(2A-C)$;

6) $A\cdot B(E-C)$;

7) $A\cdot B-C\cdot A$;

8) $(2A-B)C$;

9) $2A(B-C)$;

10) $A\cdot B\cdot C$;

11) $C\cdot B^T$;

12) $A^T\cdot C$.

41. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

1) $f(x)=3x^2-4,\ A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=x^2-3x+1,\ A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$;

3) $f(x)=3x^2-2x+5,\ A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$;

4) $f(x)=x^3-2x^2+1,\ A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;

5) $f(x)=x^3-3x+2,\ A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

42. Доказать, что матрица $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$X^2-(a+d)X+(ad-bc)E=0$, где $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

43. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.

44. Пусть *E* – единичная матрица, *A*, *B*, *C* – квадратные матрицы того же порядка, что и матрица *E*. Выяснить, какие из равенств *BAC=E*, *ACB=E*, *CAB=E*, *BCA=E*, *CBA=E* имеют место всегда, а какие не всегда, если *ABC=E*.

45. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left(A^n-E\right)\right)$, где $A=\begin{pmatrix}1&\frac{x}{n}\\-\frac{x}{n}&1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

46. Пусть A, B – симметрические матрицы одного порядка. Доказать, что $\operatorname{tr}(ABAB) \le \operatorname{tr}(A^2B^2)$. Когда имеет место равенство?

§ 6. Матричные уравнения. Обратная матрица

47. Найти матрицу обратную к данной:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

48. С помощью элементарных преобразований найти обратную к матрице:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

49. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; 6) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

50. Вычислить значение функции $g(x)$ при $x = A$:

1) $g(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $g(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $g(x) = \left(x^2 - 1\right)^{-1} - \left(x^2 + 1\right)^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

51. Найти матрицу $X(t)$ из уравнения $X(t) = AX(t) - X(t)A$, $X(0) = B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

52. Дана невырожденная матрица A порядка $n \times n$. Можно ли для всякой матрицы X порядка $n \times n$ найти матрицу Y порядка $n \times n$ такую, чтобы выполнялось равенство $X = AYA^{-1} - A^{-1}YA$.

53. Квадратная матрица A такова, что в каждом ее столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, который больше 1, и некоторый недиагональный, равный 1. Может ли матрица A быть вырожденной?

54. Найти матрицу X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 7. Понятие ранга матрицы

55. Найти ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

56. Найти ранг следующих матриц при различных значениях λ:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$.

57. Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

1) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

58. Доказать, что в любых r линейно независимых строках (столбцах) матрицы найдется ненулевой минор порядка r.
59. В матрице A имеется ненулевой минор M порядка r; все миноры, окаймляющие минор M, равны нулю. Доказать, что ранг A равен r.
60. Доказать, что в матрице ранга r на пересечении любых r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов стоит ненулевой минор порядка r.
61. Доказать, что ранг кососимметрической матрицы – число четное.
62. Доказать, что перестановкой только строк квадратной матрицы с ненулевым определителем можно добиться, чтобы все ведущие главные миноры этой матрицы были бы отличны от нуля.
63. Как может измениться ранг матрицы, если изменить значение одного ее элемента?
64. Как может измениться ранг матрицы при изменении элементов лишь одной строки ? k строк?
65. Доказать, что в квадратной $n\times n$-матрице с ненулевым определителем ранг любой квадратной подматрицы порядка $n-1$ не меньше, чем $n-2$.
66. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Доказать, что если $A^2 = E$, то сумма рангов матриц $A+E$ и $A-E$ равна n (E – единичная матрица).

§ 8. Системы линейных уравнений

67. Используя правило Крамера, решить следующие системы:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ 4x_1 - 5x_2 = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 13 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 14 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3 = 0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 10 = 0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4 = 0 \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 13 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 1 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 - 11 = 0. \end{cases}$

68. Решить системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 2 \\ 5x_1 + 9x_2 = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 30, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 34, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 41, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

69. Решить системы методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126, \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7. \end{cases}$

70. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_5 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

71. Исследовать совместность системы уравнений. Найти общее решение и представить его в виде суммы $f_0+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+...+\alpha_k f_k$, где f_0 – частное решение системы, а $f_1, f_2, ..., f_k$ – фундаментальная система решений приведенной системы:

1) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1. \end{cases}$

72. Исследовать на совместность систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значений параметра λ:

1) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

73.Найти многочлен $f(x)$ второй степени с вещественными коэффициентами, для которого $f(1)=8$, $f(-1)=2$, $f(2)=14$.

74.Найти многочлен $f(x)$ третьей степени с вещественными коэффициентами, для которого $f(-2)=1$, $f(-1)=3$, $f(1)=13$, $f(2)=33$.

75.Найти многочлен $f(x)$ четвертой степени с вещественными коэффициентами, для которого $f(-3)=-77$, $f(-2)=-13$, $f(-1)=1$, $f(1)=-1$, $f(2)=-17$.

76. Решить систему сравнений:

1) $\begin{cases} 2x+y-z\equiv 1, \\ x+2y+z\equiv 2, \ \mathrm{mod}(5), \\ x+y-z\equiv -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+2y+5z\equiv 1, \\ 2x+5y+3z\equiv 1, \ \mathrm{mod}(17), \\ 5x+3y+2z\equiv 4. \end{cases}$

77. Исследовать на совместность и найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1+(2+\lambda)x_2+x_3=\lambda, \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1. \end{cases}$$

78. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n, \\ \qquad\vdots \\ \frac{1}{2}x_n=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где a_{ij} – целые числа для всех i, j, имеет единственное решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

79. Пусть A – квадратная матрица $n\times n$ ранга r. Найти число линейно независимых решений уравнения $AX=0$, где X – матрица $n\times n$.

Глава II. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Комплексные числа в алгебраической форме.

80. Проверить тождества:

1) $(a+ib)^2 = a^2 + 2ib - b^2$;
2) $(a-ib)^2 = a^2 - 2ib + b^2$;
3) $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

81. Вычислить выражения:

1) $(1+3i)(2-3i)+(2+i)(1-4i)$;
2) $(2+3i)(1-6i)-(5+i)3i$;
3) $(4+3i)(5+i)-(3+i)(3-i)$;
4) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;
5) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;
6) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+2i}$;
7) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;
8) $(2+i)^3 + (2-i)^3$;
9) $(3+i)^3 - (3-i)^3$.

82. Вычислить степени числа i: $i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n$, где n - целое число.

83. Доказать равенства (n – целое число):

1) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$;
2) $(1+i)^{4n} = (-1)2^{2n}$.

84. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$;

2) $\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$;

85. Доказать, что

1) Комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$;
2) Комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\bar{z} = -z$.

86. Найти все комплексные числа, сопряженные к

1) своему квадрату;
2) своему кубу.

§ 2. Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.

87. Найти тригонометрическую и показательную форму числа:

1) 5;
2) i;
3) -2;
4) -3i;
5) 1+i;
6) -1+i;
7) -1-i;
8) 1-i;
9) $1+i\sqrt{3}$;
10) $-1+i\sqrt{3}$;
11) $-1-i\sqrt{3}$;
12) $1-i\sqrt{3}$;
13) $\sqrt{12}+2i$;
14) $-\sqrt{27}+3i$;
15) $-\sqrt{48}-4i$;
16) $\sqrt{3}-i$;
17) $\cos\alpha-i\sin\alpha$;
18) $\sin\alpha+i\cos\alpha$.

88. Выполнить действия в показательной и тригонометрической формах $(1-i)(\frac{1}{2}+\frac{i}{\sqrt{3}})$, $\frac{-1+i}{-1-i}$

89. Вычислить выражения:

1) $(1+i)^{1000}$;
2) $(1+i\sqrt{3})^{150}$;
3) $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{24}$;
4) $(2-\sqrt{2}+i)^{12}$;
5) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$;
6) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$.

90. Представить в виде многочленов от sinx и cosx функции:

1) sin4x;
2) cos4x;
3) sin5x;
4) cos5x.

91. Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x, функции:

1) $\sin^4 x$;
2) $\cos^4 x$;
3) $\sin^5 x$;
4) $\cos^5 x$.

§ 3. Геометрическое представление комплексных чисел.

92. Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам 5, 3-2i, 3+2i, 5i.

93. Указать геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$, где z_1 и z_2 - комплексные числа.

94. Изобразить на плоскости множество точек, соотвествующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:

1) $\operatorname{Re} z = 3$
2) Imz=-2
3) $\operatorname{Im} z > -2$
4) $\operatorname{Im} z \le 6$
5) $-1 < \operatorname{Re} z \le 3$
6) $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 3$
7) $\begin{cases} \operatorname{Im} z \le 3 \\ |1 - \operatorname{Re} z| > 2 \end{cases}$
8) $|z| \le 3$
9) $|z| > 1$
10) $0 < |z| \le 4$;
11) $|z - z_0| < R$, где z_0 - комплексное число, R - положительное вещественное;
12) $R_1 < |z - z_0| < R_2$, где z_0 - комплексное число, R_1,R_2 - положительные вещественные числа;
13) $|z - 2 + 3i| \ge 4$
14) $\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$
15) $\alpha < \arg(z - z_o) < \beta$, где z_0 – заданное комплексное число, $-\pi < \alpha < \beta \le \pi$
16) $|z - 1| + |z + 1| = 3$;
17) $|z + 2| - |z - 2| = 3$.

§ 4. Корни из комплексных чисел.

95. Доказать, что если комплексное число z является одним из корней степени n из вещественного числа a, то и сопряженное число $\bar{z}$ является одним из корней степени n из вещественного числа a.

96. Записать в алгебраической форме элементы множества, изобразить на плоскости:

1)

2) $\sqrt[3]{1}$;

3) $\sqrt[4]{16}$;

4) $\sqrt[4]{-16}$;

5) $\sqrt[6]{-27}$;

6) $\sqrt[3]{-1+i}$;

7) $\sqrt[4]{\sqrt{3}i-1}$;

8) $\sqrt[3]{i}$;

9) $\sqrt[6]{i}$;

10) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$;

11) $\sqrt[6]{2\sqrt{2}(1-i)}$;

12) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$;

13) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$;

14) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$.

97. Решить уравнение $z^6=1$. Найденные решения изобразить на плоскости, указать первообразные корни.

98. Решить уравнение $z^4=1$. Найденные решения изобразить на плоскости, указать первообразные корни.

99. Найти произведение всех корней степени n из 1.

100. Решить уравнение $x^2-x+1=0$

101. Решить уравнение $x^2-(2+i)x-1+7i=0$

102. Найти двумя способами корни степени 5 из единицы и выразить в радикалах:

1) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$;

2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$;

3) $\cos\dfrac{4\pi}{5}$;

4) $\sin\dfrac{4\pi}{5}$.

§ 5. Деление с остатком и алгоритм Евклида.

103. Разделить многочлен f(x) с остатком на многочлен g(x):

1) $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,\quad g(x)=x^2-3x+1;$

2) $f(x)=x^3-3x^2-x-1,\quad g(x)=3x^2-2x+1$

104. Найти наибольший общий делитель многочленов:

1) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ *и* x^3+x^2-x-1;

2) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ *и* x^5+x^2-x+1;

3) x^5+3x^2-2x+2 *и* $x^6+x^5+x^4-3x^2+2x-6$;

4) x^4+x^3-4x+5 *и* $2x^3-x^2-2x+2$.

105. Найти наибольший общий делитель многочленов и его линейное выражение через f(x) и g(x):

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$

2) $f(x)=3x^3-2x^2+x+2,\quad g(x)=x^2-x+1$

106. Разделить многочлен f(x) с остатком на $x-x_0$ и вычислить значение $f(x_0)$:

1) $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8,\ x_0=1;$

2) $f(x)=2x^5-5x^3-8x,\ x_0=-3;$

3) $f(x)=3x^5+x^4-19x^2-13x-10,\ x_0=2;$

4) $f(x)=x^4-3x^3-10x^2+2x+5,\ x_0=-2;$

5) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1,\ x_0=-1;$

6) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i,\ x_0=-i.$

107. Разложить многочлен f(x) по степеням $x-x_0$ и найти значения его производных в точке x_0:

1) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10,\ x_0=2;$

2) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1,\ x_0=1+2i.$

108. Определить кратность корня x_0 многолчена f(x):

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8,\ x_0=2;$

2) $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16,\ x_0=-2;$

3) $f(x)=3x^5+2x^4+x^3-10x-8,\ x_0=-1;$

4) $f(x)=x^5-6x^4+2x^3+36x^2-27x-54,\ x_0=3.$

§ 6. Многочлены над полями R, C и Q.

109. Разложить на линейные множители над полем комплексных чисел многочлены:

1) $x^3-6x^2+11x-6$;
2) x^4+4;
3) x^6+27;
4) $x^{2n}+x^n+1$.

110. Разложить на линейные и квадратные множители над полем вещественных чисел:

1) x^4+4;
2) x^6+27;
3) $x^4+4x^3+4x^2+1$;
4) $x^4-ax^2+1,\ |a|<2$.

111. Построить многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами, имеющий:

1) двойной корень 1, простые корни $2,\ 3,\ 1+i$;
2) двойной корень i, простой корень $-1-i$.

112. Построить многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий:

1) двойной корень 1, простые корни $2,\ 3,\ 1+i$;
2) двойной корень i, простой корень $-1-i$.

113. Доказать, что если несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами, то

1) $p\,|\,a_n$
2) $q\,|\,a_0$
3) $(p-mq)\,|\,f(m)$ при любом $m\in Z$.

114. Найти все рациональные корни многочленов:

1) $x^3-6x^2+15x-14$;
2) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;
3) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;
4) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$;
5) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;
6) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$.

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Векторы. Системы координат.

115. Доказать, что если точка M является точкой пересечения медиан в треугольнике ABC, то $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$.

116. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ через векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AL}$.

117. Дан правильный шестиугольник $ABCBCD$. Принимая за базисные векторы $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AC}=\overline{b}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$.

118. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Принимая за базисные векторы $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$ и $\overline{AA'}=\overline{c}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$.

119. Установить, какие из следующих троек векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно зависимы; если тройка векторов линейно зависима, то представить вектор $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

1) $\overline{a}=\{1,2,5\}$, $\overline{b}=\{2,4,-1\}$, $\overline{c}=\{6,-1,-1\}$.

2) $\overline{a}=\{2,3,-4\}$, $\overline{b}=\{4,-3,3\}$, $\overline{c}=\{8,-15,17\}$.

3) $\overline{a}=\{4,6,-12\}$, $\overline{b}=\{-6,-9,18\}$, $\overline{c}=\{2,5,-1\}$.

120. На плоскости задана декартова система координат $(0,\ \bar{i},\ \bar{j})$. На чертеже изобразите точки $A=(4;0)$, $B=(1;\sqrt{3})$, $C=(-1;\sqrt{3})$, $D=(-1;-\sqrt{3})$, $E=(0;\sqrt{3})$, $F=(-3;0)$, $G=(0;-4)$, $H=(2;-2\sqrt{3})$, $R=(2;-2)$. Найдите координаты этих точек в полярной системе координат (начало в точке O, направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси OX).

121. На плоскости задана декартова система координат $(0,\ \bar{i},\ \bar{j})$. На чертеже изобразите точки $A=(0;3)$, $B=(1;4)$, $C=(-2;1)$, $D=(-3;-4)$, $E=(1;1)$, $F=(-1;2)$, $R=(2;-2)$. Найдите координаты этих точек в аффинной системе координат (начало в точке O, $\bar{e}_1=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{e}_2=-\bar{i}+2\bar{j}$).

122. Точки $M=(2;-1)$, $N=(-1;4)$ и $P=(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

123. Определить координаты концов отрезка, который точками $C=(2;0;2)$ и $D=(5;-2;0)$ разделен на три равные части.

124. Даны вершины треугольника $A=(3;-5)$, $B=(-3;3)$, $C=(-1;-2)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A со стороной BC.

125. Даны вершины треугольника $A=(-1;-1)$, $B=(3;5)$, $C=(-4;1)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внешнего угла при вершине A с продолжением стороны BC.

126. Даны вершины треугольника $A=(1;2;-1)$, $B=(2;-1;3)$, $C=(-5;2;-6)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

§ 2. Скалярное произведение векторов

127. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{1, -2, 3\}$ на ось вектора $\bar{b} = \{1, 0, 2\}$.

128. Даны векторы $\bar{a} = \{1, -2, 3\}$, $\bar{b} = \{0, 2, -3\}$, $c = \{4, -2, 2\}$. Вычислить $np_{b+c}\bar{a}$ и $np_c(3\bar{a} - 2\bar{b})$.

129. Сила, определяемая вектором $\bar{F} = \{1, -8, -7\}$, разложена по трем направлением, одно из которых задано вектором $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти составляющую вектора $\bar{F}$ в направлении вектора $\bar{a}$.

130. Дано $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{\pi}{4}$. Вычислить:

1) скалярное произведение векторов $(-\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + 3\bar{b})$;

2) длины векторов $|-\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} + 3\bar{b}|$;

3) угол между векторами $-\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} + 3\bar{b}$.

131. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Известно, что $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 2$, $\bar{a} \wedge \bar{b} = \frac{\pi}{4}$, $\bar{a} \wedge \bar{c} = \frac{\pi}{3}$, $\bar{b} \wedge \bar{c} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Вычислить:

1) скалярное произведение $(\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}, \bar{a} - \bar{c})$;

2) скалярное произведение $(\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}, \bar{a} - 2\bar{c})$;

3) длины векторов $|-\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|$, $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}|$.

132. В декартовой системе координат даны векторы $\bar{a} = \{2; -1; 3\}$ и $\bar{b} = \{0; -5; 2\}$. Вычислить:

1) длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) скалярное произведение векторов $(3\bar{a}-\bar{b},\ 2\bar{a}+3\bar{b})$;

4) длины векторов $|3\bar{a}-\bar{b}|$ и $|2\bar{a}+3\bar{b}|$;

5) угол между векторами $3\bar{a}-\bar{b}$ и $2\bar{a}+3\bar{b}$.

133. Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A=(1;2;3)$, $B=(3;0;4)$, $C=(2;1;3)$.

134. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $A=(0;1;1)$, $B=(1;1;1)$, $D=(1;3;2)$, $A'=(-2;2;1)$. Вычислить:

1) координаты всех вершин;

2) длины всех сторон;

3) длины $|AC|$, $|AC'|$, $|B'D|$;

4) углы $\overline{AC}\wedge\overline{AC'}$, $\overline{AD}\wedge\overline{CB'}$, $\overline{BD'}\wedge\overline{AC'}$.

135. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $A=(0;1;1)$, $B=(1;1;1)$, $D=(1;3;2)$, $A'=(-2;2;1)$. Точка E делит отрезок BC в отношении $1:2$, точка F делит отрезок $A'D'$ в отношении $2:1$. Найти длину отрезка EF и угол между векторами $\overline{EF}$ и $\overline{AC'}$.

§ 3. Векторное произведение векторов

136. Даны векторы $\bar{a}=\{1,2,3\}$, $\bar{b}=\{1,0,-1\}$. Найти какой-нибудь вектор, перпендикулярный плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

137. Даны векторы $\bar{a}=\{-1,4,2\}$, $\bar{b}=\{0,3,-1\}$. Найти координаты векторных произведений $[\bar{a},\bar{b}]$; $[\bar{a}-\bar{b},3\bar{b}+\bar{a}]$; $[2\bar{a},\ 2\bar{a}-\bar{b}]$. Найти длины векторов $|[\bar{a},\bar{b}]|$; $|[\bar{a}-\bar{b},3\bar{b}+\bar{a}]|$; $|[2\bar{a},\ 2\bar{a}-\bar{b}]|$.

138. Даны векторы $\bar{a}=\{1,-2,4\}$, $\bar{b}=\{-2,3,1\}$, $\bar{c}=\{1,2,-1\}$. Найти координаты векторных произведений $[\bar{a},\bar{c}]$; $[\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\ \bar{b}-\bar{a}]$; $[\bar{a}+\bar{c},\ \bar{a}-\bar{b}+2\bar{c}]$. Вычислить результат двойных векторных произведений: $[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]$; $[\bar{a}+\bar{b},\bar{b}-\bar{c},\bar{c}]$.

139. Проверить справедливость формулы Лагранжа на векторах $\bar{a}=\{1,-2,4\}$, $\bar{b}=\{-2,3,1\}$, $\bar{c}=\{1,2,-1\}$.

140. Даны точки $A=(2;1;0)$, $B=(-3;-6;4)$, $C=(-2;4;1)$. Вычислить площадь треугольника ABC и длины всех его высот.

141. Даны точки $A=(4;2;3)$, $B=(5;7;0)$, $C=(2;8;-1)$. Вычислить площадь треугольника ABC и длины всех его высот.

142. Найти расстояние от точки $C=(3;2;-2)$ до прямой, проходящей через точки $A=(1;2;-3)$ и $B=(5;2;0)$.

143. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ были коллинеарны?

§ 4. Смешанное произведение векторов

144. Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Если векторы не компланарны, то указать, какой является тройка векторов – правой или левой.

1) $\bar{a}=\{3,-2,1\}$, $\bar{b}=\{2,1,2\}$, $\bar{c}=\{3,-1,-2\}$;

2) $\bar{a}=\{2,-1,2\}$, $\bar{b}=\{1,2,-3\}$, $\bar{c}=\{3,-4,7\}$;

3) $\bar{a}=\{0,-2,1\}$, $\bar{b}=\{4,-1,5\}$ и $\bar{c}=\{-3,0,2\}$;

4) $\bar{a}=\{1,5,0\}$, $\bar{b}=\{2,3,2\}$ и $\bar{c}=\{3,8,2\}$.

145. Доказать, что точки $A=(1;2;-1)$, $B=(0;1;5)$, $C=(-1;2;1)$, $D=(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

146. Даны точки $A=(2;-1;1)$, $B=(5;5;4)$, $C=(3;2;-1)$, $D=(4;1;3)$.

Вычислить:

1) объем пирамиды $ABCD$;

2) длину высоты из вершины A на основание BCD;

3) угол между ребром BD и основанием ABC;

4) угол между гранями ABC и BCD.

147. Даны точки $A=(2;3;1)$, $B=(4;1;-2)$, $C=(6;3;7)$, $D=(-5;-4;8)$.

Вычислить:

1) объем пирамиды $ABCD$;

2) длину высоты из вершины A на основание BCD;

3) угол между ребром BD и основанием ABC;

4) угол между гранями ABC и BCD.

148. Найти вектор $\bar{c}$, перпендикулярный векторам $\bar{a}=\{-1,0,3\}$ и $\bar{b}=\{5,4,-2\}$, имеющий длину 1 и направленный так, чтобы тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имела отрицательную ориентацию.

149. Даны два вектора $\bar{a}=\{0,1,1\}$ и $\bar{b}=\{1,1,0\}$. Найти вектор $\bar{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\bar{a}$, образующий с вектором $\bar{b}$ угол $\frac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имела положительную ориентацию.

150. Доказать тождество $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}+\lambda\bar{a}+\mu\bar{b})=(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, где λ и μ какие угодно числа.

151. Доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{b},\bar{c}]+[\bar{c},\bar{a}]=0$, компланарны.

§ 5. Уравнение прямой на плоскости

146. Дана точка $A(3;1)$ и направляющий вектор $\overline{a}=\{1,0\}$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Построить прямую, её направляющий вектор и нормальный вектор.

147. Дана точка $A(2;4)$ и направляющий вектор $\overline{a}=\{3,-2\}$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Построить прямую, её направляющий вектор и нормальный вектор.

148. Даны точки $A(6;-4)$, $B(-1;-3)$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой.

149. Даны точки $A(1;5)$, $B(1;-3)$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой.

150. Дан треугольник АВС: $A(6;-4)$, $B(-1;-3)$, $C(9;-1)$. Найти:

1) уравнения сторон;
2) уравнение медианы из вершины В;
3) уравнение высоты из вершины С;
4) уравнение биссектрисы из вершины А.

151. Дан треугольник ABC: $A(-3;-5)$, $B(1;-13)$, $C(8;-3)$. Найти:

1) уравнения сторон;
2) уравнение медианы из вершины B;
3) уравнение высоты из вершины C;
4) уравнение биссектрисы из вершины A.

152. Через точку M провести прямую L_1, параллельную прямой L, и прямую L_2, перпендикулярную L, где:

1. $M(2;3)$ и L: $4x-7y+6=0$;
2. $M(-3;5)$ и L: $6x-2y-5=0$;

§ 6. Прямая и плоскость в пространстве

153. Дана точка $A(0;1;-2)$ и направляющий вектор $\overline{a}=\{1,0,2\}$. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку и с данным направляющим вектором. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде.

154. Дана точка $A(0;1;-2)$ и направляющий вектор $\overline{a}=\{1,0,2\}$. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку и с данным направляющим вектором. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде.

155. Даны две точки $A(0;1;-2)$ и $C(2;-1;-2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде. Найти направляющий вектор прямой.

156. Даны две точки $A(1;3;2)$ и $B(4;3;1)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде. Найти направляющий вектор прямой.

157. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $C(2;-1;-2)$ и компланарной векторам $\overline{a}=\{1,5,2\}$, $\overline{b}=\{3,5,5\}$. Записать уравнение этой плоскости в параметрическом, общем виде и в виде отрезков на осях. Найти нормальный вектор плоскости.

158. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;1;-2)$ и компланарной векторам $\overline{a}=\{-1,3,-2\}$, $\overline{b}=\{1,0,5\}$. Записать уравнение этой плоскости в параметрическом, общем виде и в виде отрезков на осях. Найти нормальный вектор плоскости.

159. Даны точки $A(1;2;4)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;5)$. Найти:

1) уравнения прямых AD и BC;
2) угол между прямыми AD и BC;
3) расстояние между прямыми AD и BC;
4) уравнения плоскостей ABC и BCD;
5) угол между плоскостями ABC и BCD;
6) угол между прямой AD и плоскостью BCD;
7) составить уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости BCD;
8) найти проекцию точки A на плоскость BCD;
9) найти точку, симметричную точки A относительно плоскости BCD;
10) найти расстояние от точки A до плоскости BCD;
11) найти проекцию точки A на прямую BC;
12) найти расстояние от точки A до прямой BC;
13) найти уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BC .

160. Даны точки $A(1;2;4)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;5)$. Найти:

1) уравнения прямых AD и BC;
2) угол между прямыми AD и BC;
3) расстояние между прямыми AD и BC;
4) уравнения плоскостей ABC и BCD;
5) угол между плоскостями ABC и BCD;

6) угол между прямой AD и плоскостью BCD;

7) составить уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости BCD;

8) найти проекцию точки A на плоскость BCD;

9) найти точку, симметричную точки A относительно плоскости BCD;

10) найти расстояние от точки A до плоскости BCD;

11) найти проекцию точки A на прямую BC;

12) найти расстояние от точки A до прямой BC;

13) найти уравнение прямой, лежащей в плоскости ABC и проходящей через точку A перпендикулярно прямой BC .

§ 7. Кривые и поверхности второго порядка

161. Построить эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

162. Построить эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

163. Построить эллипс $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

164. Построить эллипс $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

165. Построить гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

166. Построить гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

167. Построить гиперболу $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

168. Построить гиперболу $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=-1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

169. Построить 4 параболы: $y^2=4x$, $y^2=-4x$, $x^2=4y$, $x^2=-4y$. Для каждой параболы найти координаты фокуса, уравнение директрисы, указать эксцентриситет и параметр.

170. Построить 4 параболы: $y^2 = 6x$, $y^2 = -6x$, $x^2 = 4y$, $x^2 = -4y$. Для каждой параболы найти координаты фокуса, уравнение директрисы, указать эксцентриситет и параметр.

171. Построить 4 параболы: $y^2 = 4x + 8$, $y^2 = -4x + 8$, $x^2 = 4y + 8$, $x^2 = -4y + 8$. Для каждой параболы найти координаты фокуса, уравнение директрисы, указать эксцентриситет и параметр.

172. Определить тип кривой второго порядка, найти каноническое уравнение, каноническую систему координат, выписать преобразование, приводящие кривую к каноническому виду и построить:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

2) $5x^2 + 12xy - 12x - 12y - 19 = 0$;

3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

4) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;

5) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;

6) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

7) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;

8) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

9) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;

10) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$;

Глава IV. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение линейного пространства

173. Доказать, что в линейном пространстве над полем P для выполнения равенства $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \beta \cdot x + \alpha \cdot y$, где $\alpha, \beta \in P$, x, y – векторы пространства, необходимо и достаточно, чтобы либо $\alpha = \beta$, либо $x = y$.

174. Множество V состоит из одного элемента θ. Операции в V определены следующим образом: $\theta + \theta = \theta$ и $\alpha \cdot \theta = \theta$. Проверить, что множество V с указанными операциями образует линейное пространство.

175. Во множестве R^+ положительных действительных чисел определены следующие операции:

1) $\forall x, y \in R^+ \quad x \oplus y = x \cdot y$; 2) $\forall x \in R^+ \ \forall \alpha \in R \quad \alpha \otimes x = x^\alpha$.

Проверить, что множество R^+ с указанными операциями образует линейное пространство.

176. Пусть R^2 – множество всех упорядоченных пар действительных чисел $x = (x_1; x_2)$ с операциями:

1) $\forall x, y \in R^2 \ \ x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$;

2) $\forall x \in R^2 \ \forall \alpha \in R \ \ \alpha x = (\alpha x_1; \alpha x_2)$.

Будет ли R^2 линейным пространством?

177. Решить задачу 112 при условии, что операция умножения задается следующим образом:

1. $\forall x \in R^2 \ \forall \alpha \in R \ \ \alpha x = (\alpha x_1; x_2)$; 2. $\forall x \in R^2 \ \forall \alpha \in R \ \ \alpha x = (x_1; x_2{}^\alpha)$.

178. Для каждого из следующих множеств многочленов от одного переменного с действительными коэффициентами проверить, будет ли это множество линейным пространством относительно обычных операций сложения и умножения на число.

1) Множество всех многочленов, степени которых не больше n, пополненное нулем.

2) Множество всех многочленов фиксированной степени n.

3) Множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

а) $f(0)=1$; б) $f(0)=0$; в) $2f(0)-3f(1)=0$; г) $f(1)+f(2)+\ldots+f(k)=0$.

179. Является ли множество матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ линейным пространством относительно обычных операций сложения и умножения на число?

180. Является ли вещественным линейным пространством множество решений системы линейных однородных уравнений?

181. Выяснить, являются ли данные множества функций, заданных на отрезке $[a;b]$, линейным пространством?

1) Непрерывно-дифференцируемых на данном отрезке.

2) Интегрируемых на данном отрезке.

3) Ограниченных на данном отрезке.

4) Равных нулю, при $x=a$.

5) Монотонно возрастающих на данном отрезке.

6) Функции, для которых $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$;

7) Функции, которые удовлетворяют условию $\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx<\infty$.

182. Является ли множество Z всех целых чисел:

1) вещественным линейным пространством;

2) комплексным линейным пространством?

183. Является ли линейным пространством множество R^+, если операции сложения и умножения ввести следующим образом: $x\oplus y=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\,y)$, $\alpha\oplus x=\mathrm{tg}(\alpha\,\mathrm{arctg}\,x)$, где $\alpha\in\mathrm{R}$.

184. На множестве R^2 упорядоченных пар действительных чисел введены следующие операции:

1) $\forall a=(a_1;a_2),\ b=(b_1;b_2)\in\mathbb{R}^2\ \ a+b=(a_1+b_1;a_2+b_2)$;

2) $\forall a=(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\alpha=\lambda+i\mu\ \ (\lambda,\mu\in\mathbb{R})\ \ \alpha a=(\lambda a_1+\mu a_2;-\mu a_1+\lambda a_2)$.

Доказать, что множество R^2 с введенными операциями является комплексным линейным пространством.

185. В комплексном линейном пространстве V определена новая операция умножения на число по правилу $\alpha \cdot x = \overline{\alpha} x$, $\forall \alpha \in$ □ . Доказать, что V является комплексным линейным пространством относительно старой операции сложения векторов и новой операции умножения на число.

186. Привести пример множества M , для которого выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы $1 \cdot x = x$ для любого x из M . В чем состоит значение этой аксиомы в определении линейного пространства?

187. Доказать, что коммутативность сложения векторов вытекает из остальных аксиом линейного пространства.

188. Доказать, что:

1) группа □ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства;
2) группа вычетов $□_n$ изоморфна аддитивной группе векторного пространства над некоторым полем тогда и только тогда, когда n – простое число;
3) коммутативную группу A можно превратить в векторное пространство над полем □ тогда и только тогда, когда в ней нет элементов конечного порядка (кроме нуля) и для любого натурального числа n и любого $a \in A$ уравнение $nx = a$ имеет решение в группе A.

189. Пусть $□_2$ – поле из двух элементов 0 и 1, в котором операции заданы следующим образом:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Построить линейное пространство $□_2^k$.

§ 2. Подпространства линейного пространства

190. Выяснить, является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

1) векторы плоскости с началом в точке O, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в точке O;
2) векторы плоскости с началом в точке O, концы которых лежат на данной прямой;
3) векторы плоскости с началом в точке O, концы которых не лежат на данной прямой;
4) векторы плоскости, концы которых лежат в первой четверти;
5) векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых – целые числа;
6) векторы линейного пространства, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $a_1, a_2, ..., a_k$.

191. Доказать, что следующие совокупности векторов пространства $\mathbb{R}^n$ образуют подпространства, и найти их базисы и размерности:

1) векторы, у которых первая и последняя координаты совпадают;
2) векторы, у которых координаты с четными номерами равны 0;
3) векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой;
4) векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, ...)$;
5) векторы, являющиеся решениями однородной системы линейных уравнений.

192. Выяснить, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем P образует подпространства в пространстве матриц $M^n(P)$, найти их базисы и размерности:

1) все матрицы;
2) симметрические матрицы;
3) кососимметрические матрицы;
4) невырожденные матрицы;

5) вырожденные матрицы;

6) матрицы со следом, равным нулю.

193. Выяснить, какие из следующих совокупностей многочленов образуют подпространства в пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ многочленов, степени которых не превосходят n, и найти их базисы и размерности:

1) многочлены, имеющие кратный корень $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) многочлены, имеющие данные корни $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$;

3) многочлены, имеющие данный простой корень $\alpha \in \mathbb{R}$.

194. Найти систему линейных уравнений, задающую систему векторов:

1. $L = \langle (1, -1, 1, 0); (1, 1, 0, 1); (2, 0, 1, 1) \rangle$;

2. $L = \langle (1, -1, 1, -1, 1); (1, 1, 0, 0, 3); (3, 1, 1, -1, 7) \rangle$.

195. Пусть L_1 и L_2 – подпространства конечномерного векторного пространства V. Доказать, что:

1) если $L_1 \subseteq L_2$, то $\dim L_1 \le \dim L_2$, причем равенство имеет место только при $L_1 = L_2$;

2) если $\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$, то сумма $L_1 + L_2$ равна одному из этих подпространств, а пересечение $L_1 \cap L_2$ – другому;

3) если $\dim L_1 + \dim L_2 > \dim V$, то $L_1 \cap L_2 \ne \theta$.

196. Пусть U, V, W – подпространство векторного пространства.

1. Можно ли утверждать, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

2. Доказать, что предыдущее равенство верно, если $V \subseteq U$.

3. Доказать, что

$$(U + W) \cap (W + V) \cap (V + U) = [(W + V) \cap U] + [(V + U) \cap W].$$

4. Доказать, что

$$(U \cap V) + (W \cap V) + (W \cap U) \subseteq (U + W) \cap (W + V) \cap (V + U)$$

и разность размерностей этих подпространств является четным числом.

§ 3. Линейная зависимость и независимость систем векторов

197. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:

1) x, $x+y$, $x+y+z$;
2) $x+y$, $y+z$, $z+x$;
3) $x-y$, $y-z$, $z-x$;
4) x, $x-y$, $x-y-z$.

198. Показать, что $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ система векторов $\alpha x - \beta y$, $\gamma y - \alpha z$, $\beta z - \gamma x$ линейно зависима.

199. Найти линейную комбинацию $3x_1 - 2x_2 + 7x_3$ векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^4$: $x_1 = (3, 1, -7, 4)$, $x_2 = (1, 5, 0, 6)$, $x_3 = (-1, 1, 3, 0)$. Что можно сказать о системе векторов x_1, x_2, x_3?

200. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

1. $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$;
2. $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$;
3. $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$;
4. $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$;
5. $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$;
6. $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $a_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $a_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $a_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

201. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, ..., a_s$:

1. $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, -2, \lambda)$;
2. $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$, $b = (5, 9, \lambda)$;
3. $a_1 = (3, 2, 5)$, $a_2 = (2, 4, 7)$, $a_3 = (5, 6, \lambda)$, $b = (1, 3, 5)$;
4. $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$, $b = (\lambda, 2, 5)$.

202. Дана система многочленов пространства $M^3(\mathbb{R})$: $f_1(t)=1-t^2$, $f_2(t)=1+t^3$, $f_3(t)=t-t^3$, $f_4(t)=1+t+t^2+t^3$. Найти линейные комбинации многочленов этой системы:

1. $5f_1+f_2-4f_3$;
2. $f_1+9f_2-4f_4$.

Что можно сказать о данной системе векторов?

203. Выяснить, является ли линейно независимой каждая из следующих систем векторов над полем $\mathbb{R}$:

1. $\sin x, \cos x$;
2. $1, \sin x, \cos x$;
3. $\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x$;
4. $x, \sin^2 x, \cos^2 x$;
5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

204. Пусть разложение вектора y по системе векторов $x_1, x_2, ..., x_m$ единственно. Доказать, что эта система $x_1, x_2, ..., x_m$ линейно независима.

205. Доказать, что если система $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно выражается через систему $x_1, x_2, ..., x_m$, то ранг первой системы не больше ранга второй.

206. Пусть всякий вектор пространства V линейно выражается через систему $e_1, e_2, ..., e_m$, причем для некоторого x это разложение единственно. Доказать, что векторы $e_1, e_2, ..., e_m$ образуют базис пространства V.

207. Доказать, что линейная оболочка системы векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ образует линейное подпространство.

208. Показать, что если система $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно выражается через систему $x_1, x_2, ..., x_m$, то линейная оболочка первой системы содержится в линейной оболочке второй системы.

209. Доказать, что если система $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно выражается через систему $x_1, x_2, ..., x_m$, то ранг системы $x_1, x_2, ..., x_m$ равен рангу системы $y_1, y_2, ..., y_n, x_1, x_2, ..., x_m$.

§ 4. Базис и размерность линейных пространств

210. Доказать, что системы векторов линейно независимы, и дополнить их до базиса пространства строк:

1. $a_1=(2,\,2,\,7,\,-1)$, $a_2=(3,\,-1,\,2,\,4)$, $a_3=(1,1,\,3,1)$;
2. $a_1=(2,\,3,\,-4,\,-1)$, $a_2=(1,\,-2,1,\,3)$;
3. $a_1=(4,\,3,\,-1,1,1)$, $a_2=(2,1,\,-3,\,2,\,-5)$, $a_3=(1,\,-3,\,0,1,\,-2)$, $a_4=(1,\,5,\,2,\,-2,\,6)$.

211. Найти ранг следующих систем векторов и выяснить, зависит ли ответ от того, какому пространству – вещественному или комплексному принадлежат эти векторы:

1. $x_1=(1,\,2,\,3)$, $x_2=(4,\,5,\,6)$, $x_3=(7,\,8,\,9)$, $x_4=(10,11,12)$;
2. $x_1=(1,\,4,\,7,10)$, $x_2=(2,\,5,\,8,11)$, $x_3=(3,\,6,\,9,12)$;
3. $x_1=(1,1,1,1,1)$, $x_2=(1,\,i,\,-1,\,-i,1)$, $x_3=(1,\,-1,1,\,-1,1)$, $x_4=(1,\,-i,\,-1,\,i,1)$;
4. $p_1(t)=t^4-1$, $p_2(t)=t^2-1$, $p_3(t)=t^2+1$, $p_4(t)=t+1$, $p_5(t)=t-1$;
5. A, A^2, A^3, A^4, где $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

212. Пусть векторы $e_1, e_2, ..., e_m$ и x заданы своими координатами в некотором базисе:

1. $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,\,2)$, $e_3=(1,\,2,\,3)$, $x=(6,\,9,14)$;
2. $e_1=(2,1,\,-3)$, $e_2=(3,\,2,\,-5)$, $e_3=(1,\,-1,1)$, $x=(6,\,2,\,-7)$;
3. $e_1=(1,\,2,1,1)$, $e_2=(2,\,3,1,\,0)$, $e_3=(3,1,1,\,-2)$, $e_4=(-4,\,4,\,-1,\,-6)$, $x=(7,\,8,\,7,\,2)$
 ;
4. $e_1=(1,\,5,\,3)$, $e_2=(2,\,7,\,3)$, $e_3=(3,\,9,\,4)$, $x=(2-2i,\,7-4i,\,4-i)$.

Показать, что система векторов $e_1, e_2, ..., e_m$ образует базис и найти координаты вектора x в этом базисе.

213. Доказать, что матрицы $E_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$E_4=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$, и найти координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

214. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки L, натянутой на векторы:

1. $a_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 1)$, $a_3 = (3,\ 4,\ 7,\ 9,\ 2)$, $a_4 = (1,\ 0,\ 1,\ 7,\ 2)$;
2. $a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $a_2 = (2,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $a_5 = (0,\ 1,\ 2,3)$;
3. $c_1 = (-3 + 2i,\ -i)$, $c_2 = (3 + i,\ 7 - 6i)$;
4. $b_1 = (-1,\ -2,\ -i)$, $b_2 = (2 - i,\ -4 + 2i,\ 1 + 2i)$, $b_3 = (3i,\ -i,\ -3)$;
5. $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

215. Найти размерность и какой-либо базис комплексного арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений:

1. $\begin{cases} (1+i)x_1 + (1+3i)x_2 = 0, \\ (1-2i)x_1 + (1+2i)x_2 = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1-i)x_1 + (-3+2i)x_2 + (2-i)x_3 = 0, \\ (-4+6i)x_1 + (4-3i)x_2 - 3ix_3 = 0, \\ (-9+i)x_1 + (5-i)x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 + (2+i)x_3 = 0, \\ (1-3i)x_1 - (2-4i)x_2 + (5-5i)x_3 = 0, \\ 2ix_1 + (2+2i)x_2 + (-2+4i)x_3 = 0. \end{cases}$

216. Найти размерность суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов пространства R^4:

1. $S = \langle (1,\ 2,\ 0,\ 1), (1,\ 1,\ 1,\ 0) \rangle$, $L = \langle (1,\ 0,\ 1,\ 0), (1,\ 3,\ 0,\ 1) \rangle$;
2. $S = \langle (1,\ 1,\ 1,\ 1), (1,\ -1,\ 1,\ -1), (1,\ 3,\ 1,3) \rangle$, $L = \langle (1,\ 2,\ 0,\ 2), (1,\ 2,\ 1,\ 2), (3,\ 1,\ 3,\ 1) \rangle$;
3. $S = \langle (1,\ 2,\ -1,\ -2), (3,\ 1,\ 1,\ 1), (-1,\ 0,\ 1,-1) \rangle$, $L = \langle (2,\ 5,\ -6,\ -5), (-1,\ 2,\ -7,\ -3) \rangle$.

217. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ и $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$:

1. $a_1=(1,2,1)$, $a_2=(1,1,-1)$, $a_3=(1,3,3)$, $b_1=(1,2,2)$, $b_2=(2,3,-1)$, $b_3=(1,1,-3)$;
2. $a_1=(-1,6,4,7,-2)$, $a_2=(-2,3,0,5,-2)$, $a_3=(-3,6,5,6,-5)$, $b_1=(1,1,2,1,-1)$, $b_2=(0,-2,0,-1,-5)$, $b_3=(2,0,2,1,-3)$;
3. $a_1=(1,1,0,0,-1)$, $a_2=(0,1,1,0,1)$, $a_3=(0,0,1,1,1)$, $b_1=(1,0,1,0,1)$, $b_2=(0,2,1,1,0)$, $b_3=(1,2,1,2,-1)$;
4. $a_1=(1,2,1,0)$, $a_2=(-1,1,1,1)$, $b_1=(2,-1,0,1)$, $b_2=(1,-1,3,7)$;
5. $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(1,-2,i)$, $a_3=(2,0,3+i)$, $b_1=(1,0,3i)$, $b_2=(1,4,3+2i)$, $b_3=(-1,4,3-4i)$;
6. $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3-i)$, $a_3=(2,3,2,4-i)$, $a_4=(1,1,1,1-i)$, $b_1=(0,1,0,3-i)$, $b_2=(0,2,0,5-2i)$, $b_3=(0,2+i,0,6+i)$, $b_4=(1,4+i,5-i,-2-i)$.

218. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы два подпространства $U=\langle(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle$, $V=\langle(-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\rangle$. Доказать, что $\mathbb{R}^4=U\oplus V$, найти проекцию вектора $(4,4,2,4)$ на подпространство U параллельно V.

219. Доказать, что пространство $M^3[t]$ является прямой суммой следующих подпространств L_1 и L_2, найти проекцию многочлена $p(t)=t^3+1$ на L_1 параллельно L_2:

1. $L_1=\left\{f(t)\,\middle|\,f(1)=f'(1)=0\right\}$, $L_2=\left\{f(t)\,\middle|\,f(0)=f'(0)=0\right\}$;
2. $L_1=\left\{f(t)\,\middle|\,f(0)=f(1)\right\}$, $L_2=\left\{f(t)\,\middle|\,f(2t)=2f(t),\ \forall t\in\mathbb{R}\right\}$;
3. $L_1=\left\{f(t)\,\middle|\,f(-1)=f(0)=f(1)=0\right\}$, $L_2=\left\{f(t)\,\middle|\,f'(1)=0\right\}$.

220. Даны многочлены $f_1(t)=t^3+2t+4$, $f_2(t)=3t^3+t^2-1$, $f_3(t)=5t^3+t^2+4t+7$ и $g_1(t)=t^3+t^2+2t$, $g_2(t)=2t^3+t^2+t+3$, $g_3(t)=t^3+2t^2+5t-3$. Показать, что подпространства $L_1=\langle f_1,\, f_2,\, f_3\rangle$ и $L_2=\langle g_1,\, g_2,\, g_3\rangle$ в прямой сумме образуют все пространство $M^3[t]$, и найти проекцию многочлена $p(t)=6t^3+2t^2+6t+7$ на L_1 параллельно L_2.

221. Пусть подпространства $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ заданы уравнениями $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Доказать, что $\mathbb{R}^n=U\oplus V$, и найти проекции единичных векторов на U параллельно V и на V параллельно U.

222. Доказать, что для любого подпространства $U\subseteq \mathbb{R}^n$ существует такое подпространство V, что $\mathbb{R}^n=U\oplus V$.

223. В линейном пространстве многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами заданы два базиса $\{e\}$: $e_1=1$, $e_2=x$, $e_3=x^2$ и $\{e'\}$: $e_1'=1$, $e_2'=x-1$, $e_3'=(x-1)^2$. Найти матрицы перехода от базиса $\{e\}$ к $\{e'\}$ и наоборот.

224. Дан вектор $x=e_1+e_2+e_3+e_4$. Разложить этот вектор по новому базису e_1', e_2', e_3', e_4', если

$$\begin{cases} e_1'=e_2+e_3+e_4, \\ e_2'=e_1+e_3+e_4, \\ e_3'=e_1+e_2+e_4, \\ e_4'=e_1+e_2+e_3. \end{cases}$$

225. Даны два базиса $\{e\}$ и $\{e'\}$. Найти координаты вектора $x=2e_1+2e_2+e_3$ в базисе $\{e'\}$, если

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+2e_2+e_3, \\ e_2'=-2e_1+e_2+2e_3, \\ e_3'=e_1-2e_2+e_3. \end{cases}$$

226. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

1. $\{(1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\}$, $\{(3,1,4),(5,2,1),(1,1,-6)\}$;

2. $\{(1,2,1),(2,3,3),(3,8,2)\}$, $\{(3,5,8),(5,14,13),(1,9,2)\}$;

3. $\{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3)\}$,

   $\{(1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4)\}$.

227. Доказать, что каждая из двух систем векторов $e_1=(1-i,\,3+2i)$, $e_2=(-1+2i,\,3-i)$, $e_1'=(1,\,9+3i)$, $e_2'=(-1+3i,\,9)$ является базисом пространства $\mathbb{C}^2$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $(x_1,\,x_2)$ во втором базисе.

228. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

1) поменять местами два вектора первого базиса;
2) поменять местами два вектора второго базиса;
3) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

229. Система координат xOy повернута вокруг начала координат на угол α (против часовой стрелки). Выразить координаты вектора $a=xi+yj$ в новой системе через его координаты в старой системе.

230. Доказать, что в линейном пространстве размерности n любые n линейно независимых векторов образуют базис.

231. Найти размерность поля комплексных чисел, рассматривая его как:

1) комплексное линейное пространство;
2) действительное линейное пространство.

232. Какую наибольшую размерность может иметь подпространство линейного пространства матриц n-го порядка, целиком состоящее из вырожденных матриц?

Глава V. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение евклидова пространства

233. Пусть V – евклидово пространство со скалярным произведением $(x,\ y)$. Показать, что если положить $\langle x,\ y\rangle = \lambda(x,\ y)$, где λ – фиксированное положительное число, то для $\langle x,\ y\rangle$ также выполнены все аксиомы скалярного произведения. Какой геометрический смысл имеет переход $(x,\ y)$ к $\langle x,\ y\rangle$ в пространстве геометрических векторов V^3?

234. Установить, какие из следующих правил определяют скалярное произведение в пространстве многочленов $M^n[x]$ с вещественными коэффициентами:

1. $(p,\ q) = \sum\limits_{k=0}^{n} p^{(k)}(a) q^{(k)}(a)$, где точка $a \in \mathbb{R}$ произвольная;
2. $(p,\ q) = \sum\limits_{k=0}^{m} p(k) q(k)$?

235. Выяснить, можно ли скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц порядка $n \geq 2$ ввести по формуле:

1. $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$;
2. $(X, Y) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$;
3. $(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$;
4. $(X, Y) = \det XY$?

236. Дано линейное пространство, векторами которого являются всевозможные векторы $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, где $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Сложение векторов и умножение вектора на число определены равенствами $x \oplus y = (x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ ...,\ x_n y_n)$,

$\lambda \otimes x = \left(x_1^\lambda,\ x_2^\lambda,\ ...,\ x_n^\lambda\right)$. Можно ли сделать это пространство евклидовым, определив скалярное произведение равенством $\left(x,\ y\right) = \ln x_1 \ln y_1 + ... + \ln x_n \ln y_n$?

237. Рассматривается линейное пространство непрерывных в промежутке $\left[a,\ b\right]$ функций. Можно ли сделать это пространство евклидовым, определив скалярное произведение двух любых векторов $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\,y(t)\,dt$?

238. Является ли множество всех геометрических векторов евклидовым пространством, если скалярное произведение двух векторов определить как произведение их длин?

239. Образует ли множество геометрических векторов евклидово пространство, если определить скалярное произведение двух произвольных векторов a и b как произведение длины вектора a и утроенной проекции вектора b по направлению вектора a?

240. Пусть a – фиксированный вектор евклидова пространства V, α – фиксированное действительное число. Будет ли множество всех векторов x, для которых $\left(x,\ a\right) = \alpha$, линейным подпространством пространства V?

241. Является ли евклидовым пространство $\mathbb{R}^2$, если паре векторов $x = \left(x_1,\ x_2\right)$ и $y = \left(y_1,\ y_2\right)$ поставлено в соответствие число:

1. $x_1x_2 + y_1y_2$;
2. $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$;
3. $x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$;
4. $7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$?

242. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где $k \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, если каждой паре функций $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $a_m \cos mx + b_m \sin mx$ поставлено в соответствие число

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right) dx\,?$$

243. В пространстве многочленов $M^3\left[x\right]$ можно ли ввести скалярное произведение следующим образом:

1. $\int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)x^2dx$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P(x)Q(x)\,dx$?

§ 2. Ортогональность, ортонормированный базис

244. Доказать, что в евклидовом пространстве E:

1) нулевой вектор – единственный, который обладает тем свойством, что он ортогонален ко всем векторам пространства;
2) если равенство $(a,\, x) = (b,\, x)$ справедливо для любого вектора x из E, то $a = b$.

245. Проверить, являются ли ортогональным базисом в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

1. $(0,1,0)$, $(-6,0,4)$;
2. $(2,1,4)$, $(3,0,5)$;
3. $(-1,0,0)$, $(0,5,0)$, $(0,0,9)$;
4. $(1,1,3)$, $(-1,-2,1)$, $(7,-4,-1)$.

246. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1;1]$? Операция скалярного произведения $\int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$ задана следующим образом:

1. $1,\ x^2$;
2. $x,\ x^2,\ x^3$;
3. $\sin\pi x,\ \cos\pi x$;
4. $\sin\pi x, \ldots, \sin n\pi x,\ \cos n\pi x$.

247. Проверить, что следующие системы векторов ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

1. $x_1 = (1,-2,1,3)$, $x_2 = (2,1,-3,1)$;
2. $x_1 = (1,-1,1,-3)$, $x_2 = (-4,1,5,0)$;
3. $x_1 = (1,1,1,2)$, $x_2 = (1,0,1,-1)$;
4. $x_1 = (1,2,1,2)$, $x_2 = (1,1,-1,-1)$.

248. Найти длины векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением:

1. $x = 4e_1 - 2e_2 + 2e_3 - e_4$;
2. $x = 2e_1 - 2e_2 + 4e_3 - e_4$.

249. Выяснить, при каком значении λ векторы $x=\lambda e_1+\lambda e_2-e_3-\lambda e_4$ и $y=e_1-e_2+\lambda e_3-e_4$ имеют одинаковые длины?

250. Нормировать следующие векторы:

1. $x=e_1+2\sqrt{2}e_2+3\sqrt{3}e_3+8e_4+5\sqrt{5}e_5$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$;
2. $x=e_1\sin^3\alpha+e_2\sin^2\alpha\cos\alpha+e_3\sin\alpha\cos\alpha+e_4\cos\alpha$ в пространстве $\mathbb{R}^4$;
3. $x(t)=t\sin\pi t$ и $y(t)=(t+6)e^{-t}$, если скалярное произведение задано следующим образом: $\int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$.

251. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ по заданному базису построить ортогональный:

1. $f_1=(1,2,3)$, $f_2=(0,-3,2)$, $f_3=(0,1,-1)$;
2. $f_1=(2,0,-1)$, $f_2=(5,-1,0)$, $f_3=(1,7,-3)$;
3. $f_1=(1,1,-1,0)$, $f_2=(1,2,0,-1)$, $f_3=(0,0,1,1)$.

252. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированных базисов соответствующего арифметического пространства:

1. $a_1=\left(-\dfrac{11}{15},-\dfrac{2}{15},\dfrac{2}{3}\right)$, $a_2=\left(-\dfrac{2}{15},-\dfrac{14}{15},-\dfrac{1}{3}\right)$;
2. $a_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $a_2=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$;
3. $a_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $a_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)$.

253. Подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением описано системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис L, если:

1. $x_1-x_2-x_3=0$;
2. $x_1+x_2+x_3+x_4=0$;
3. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-3x_3-6x_4=0; \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+2x_4+14x_5=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3-8x_4-7x_5=0. \end{cases}$

254. Применить процесс ортогонализации к линейно независимой системе векторов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1. $f_1=(1,-3,1)$, $f_2=(4,-5,3)$;
2. $f_1=(1,0,-1,2)$, $f_2=(2,1,-1,3)$;
3. $f_1=(2,0,-1)$, $f_2=(5,-1,0)$, $f_3=(1,7,-3)$;
4. $f_1=(1,2,2)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(0,1,-4)$;
5. $f_1=(2,1,3,-1)$, $f_2=(7,4,3,-3)$, $f_3=(1,1,-6,0)$, $f_4=(5,7,7,8)$.

255. Пусть в результате применения процесса ортогонализации к системе векторов $f_1, f_2, ..., f_k$ получается система $g_1, g_2, ..., g_k$. Доказать, что:

1) если система векторов $f_1, f_2, ..., f_k$ линейно зависима, а ее подсистема $f_1, f_2, ..., f_{k-1}$ линейно независима, то векторы $g_1, g_2, ..., g_{k-1}$ ненулевые, а $g_k=\theta$;
2) если векторы $g_1, g_2, ..., g_{k-1}$ в получаемой системе ненулевые, а $g_k=\theta$, то в исходной системе векторы $f_1, f_2, ..., f_{k-1}$ линейно независимы, а вектор f_k через них линейно выражается.

256. В пространстве многочленов $M^2[x]$ с базисом $f_1=1$, $f_2=x$, $f_3=x^2$ задано скалярное произведение следующим образом:

$$(f,g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1).$$

Проверить, что данная операция задает скалярное произведение, и построить по методу Грама-Шмидта ортонормированный базис в этом пространстве.

257. В пространстве многочленов $M^2[x]$ с базисом $f_1=1$, $f_2=x$, $f_3=x^2$ задано скалярное произведение следующим образом: $(f,g)=\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$. Построить по методу Грама-Шмидта ортонормированный базис в этом пространстве.

258. При каких значениях α и β базис, образованный векторами:

$$e_1' = \frac{\alpha}{3}e_1 + \frac{1-\alpha}{3}e_2 + \beta e_3, \quad e_2' = \frac{1-\alpha}{3}e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3}e_3, \quad e_3' = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3}e_2 + \frac{1-\alpha}{3}e_3$$

является ортонормированным?

§ 3. Матрица Грама и ее применение

259. Пусть $a_1, a_2, ..., a_m$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства E и $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2, ..., a_m)$ – ее матрица Грама. Обозначим через $\Gamma^{-1} = (\gamma_{ik})$ обратную к Γ матрицу. Тогда для всех векторов $f \in E$ выполнено неравенство $\sum\limits_{i,k=1}^{m} \gamma_{ik} (f, a_i)(a_k, f) \le (f, f)$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $f \in L = \langle a_1, a_2, ..., a_m \rangle$.

260. Доказать следующие свойства определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, f_2, ..., f_m$ евклидова пространства:

1) $\det \Gamma(a_1, a_2, ..., a_m) \le |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_m|^2$;
2) равенство $\det \Gamma(a_1, a_2, ..., a_m) = |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_m|^2$ справедливо тогда и только тогда, когда либо векторы $a_1, a_2, ..., a_m$ образуют ортогональную систему, либо хотя бы один из этих векторов нулевой.

261. Выяснить, является ли данная система векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ линейно зависимой (линейно независимой) с помощью матрицы Грама:

1. $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3)$;
2. $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (4, 5, 6)$, $a_3 = (7, 8, 9)$.

262. Дано евклидово пространство $\mathbb{R}^2$, где скалярное произведение задано следующим образом $(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$. Вычислить матрицу Грама Γ_e в базисе $\{e\}$:

1. $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (0, 1)$;
2. $e_1 = (2, 1)$, $e_2 = (-1, 3)$.

263. Векторы x и y евклидова пространства заданы в базисе $\{e\}$ координатными столбцами x_e, y_e соответственно, и известна матрица Грама Γ_f базиса f_1, f_2. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\{e\}$ и скалярное произведение векторов x и y, если:

1. $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - 2e_2$, $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $y_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}^T$;

2. $f_1 = 2e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$, $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $y_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$;

3. $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$, $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $y_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$;

4. $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_2 + e_3$, $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$, $y_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

264. Вычислить объем n-мерного параллелепипеда со сторонами:

1. $(1, -1, 1, -1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$;
2. $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(2, 1, 1, 3)$, $(0, 1, -1, 0)$;
3. $(1, 1, 1, 2, 1)$, $(1, 0, 0, 1, -2)$, $(2, 1, -1, 0, 2)$, $(0, 7, 3, -4, -2)$, $(39, -37, 51, -29, 5)$.

265. Доказать, что определитель Грама не изменится при применении к векторам a_1, a_2, … , a_k процесса ортогонализации, т.е. в результате ортогонализации векторы a_1, a_2, … , a_k перейдут в векторы b_1, b_2, …, b_k и $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Gamma(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (b_1, b_1)(b_2, b_2)\ldots(b_k b_k)$. Пользуясь этим, выяснить геометрический смысл $\Gamma(a_1, a_2)$ и $\Gamma(b_1, b_2)$, предполагая векторы линейно независимыми.

266. Пусть есть система линейно независимых векторов g_1, g_2, … , g_n. Доказать, что векторы e_1, e_2, … , e_n, полученные из g_1, g_2, … , g_n процессом ортогонализации, имеют вид:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \cdots & (g_1, g_{k-1}) & g_1 \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \cdots & (g_2, g_{k-2}) & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (g_k, g_1) & (g_k, g_2) & \cdots & (g_k, g_{k-1}) & g_k \end{vmatrix},$$

где $G_0 = 1$, $G_k = G(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ и $|e_k|^2 = \dfrac{G(g_1, \ldots, g_k)}{G(g_1, \ldots, g_{k-1})}$.

§ 4. Ортогональное дополнение, ортогональные суммы подпространств

267. Доказать, что ортогональное дополнение к линейному пространству евклидова пространства E обладает свойствами:

1. $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$;
2. если $L_1 \subset L_2$, то $L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$;
3. $\left(L_1 + L_2\right)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$;
4. $L_1^{\perp} + L_2^{\perp} = \left(L_1 + L_2\right)^{\perp}$.

268. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

1. $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -2, 1)$;
2. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $a_3 = (2, 0, 2, 0)$;
3. $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (3, 7, -1, 2)$, $a_3 = (2, 4, -1, 0)$.

Найти системы линейных уравнений, описывающие подпространство и его ортогональное дополнение.

269. Найти уравнения, задающие ортогональные дополнения к подпространствам, заданным системой линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0; \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

270. В пространстве многочленов $M^n[x]$ скалярное произведение задано стандартным образом $(p, g) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. Найти ортогональное дополнение подпространства:

1) многочленов, удовлетворяющих условию $f(-1) = 0$;
2) многочленов, удовлетворяющих условию $f(-1) = f(1)$;
3) многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) + f'(1) = 0$;
4) всех четных многочленов пространства $M^n[x]$.

271. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением $(A, B) = \operatorname{tr} B^T A$ (проверить) найти ортогональное дополнение к подпространству:

1) матриц с нулевым следом;
2) симметрических матриц;
3) кососимметрических матриц;
4) верхних треугольных матриц.

272. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки следующих систем векторов:

1. $a = (1, 2, 1)$;
2. $a = (1, -1, 1, -1)$;
3. $a_1 = (1, 3, -1, 1)$, $a_2 = (2, 5, -2, 3)$;
4. $a_1 = (-1, 0, 1, 2, 1)$, $a_2 = (2, -3, 1, -1, 4)$, $a_3 = (-1, -1, 2, 3, 3)$.

273. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, натянутое на векторы $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$:

1. $a_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a_2 = (1, 4, 3, 2)$, $a_3 = (2, 2, -2, -2)$, $f = (14, -3, -6, -7)$;
2. $a_1 = (1, 3, 3, 5)$, $a_2 = (1, 3, -5, -3)$, $a_3 = (1, -5, 3, -3)$, $f = (2, -5, 3, 4)$;
3. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$, $f = (4, -1, -3, 4)$.

274. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, заданное однородной системой уравнений:

1. $f = (-3, 0, -5, 9)$, $L: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0; \end{cases}$

2. $f=(7,-4,-1,2)$, $L:\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+3x_4=0,\\3x_1+2x_2+2x_3+x_4=0,\\x_1+2x_2+2x_3-9x_4=0;\end{cases}$

3. $f=(8,-2,8,3)$, $L:\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\x_1-x_2+4x_3+x_4=0.\end{cases}$

275. В пространстве $M^4[x]$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию и перпендикуляр, опущенный из многочлена $f(t)$ на подпространство L:

1. $f(t)=5t+6t^2+8t^3+t^4$, $L=\{g(t)|g'(1)=0\}$;

2. $f(t)=3+3t+5t^2+3t^3-t^4$, $L=\{g(t)|g(-1)=g(1)=g(2)\}$;

3. $f(t)=2+4t^2-7t^4$, $L=\{g(t)|2g(-1)-g'(1)=0,\ g(0)=0,\ 2g(1)+g'(1)=0\}$.

276. Найти расстояние от вектора x до подпространства, заданного системой уравнений:

1. $x=(2,4,0,-1)$, $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+4x_2+2x_3+4x_4=0;\end{cases}$

2. $x=(3,3,-4,2)$, $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\x_1+3x_2+x_3-3x_4=0.\end{cases}$

277. Найти угол между вектором x и подпространством L:

1. $x=(2,2,1,1)$, $L=\langle(3,4,-4,-1),(0,1,-1,2)\rangle$;

2. $x=(1,0,3,0)$, $L=\langle(5,3,4,-3),(1,1,4,5),(2,-1,1,2)\rangle$.

278. Найти угол между подпространствами $L_1=\langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$ и $L_2=\langle(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$.

279. Рассматривается пространство многочленов $M^n[x]$ со скалярным произведением $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Определить расстояние от начала координат до подпространства, состоящего из многочленов $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

§ 5. Унитарное пространство

280. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^2$. Определить, можно ли скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$ определить формулой:

1. $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$;
2. $(x, y) = x_1 \overline{y_1}$;
3. $(x, y) = i x_1 \overline{y_2} + i x_2 \overline{y_1}$;
4. $(x, y) = i x_1 \overline{y_2} + i x_2 \overline{y_1}$;
5. $(x, y) = 2x_1 \overline{y_1} + (1+i) x_1 \overline{y_2} + (1-i) x_2 \overline{y_1} + 3x_2 \overline{y_2}$.

281. Можно ли в пространстве квадратных матриц $\mathbb{C}^{2\times2}$ ввести скалярное произведение по формуле $(A, B) = a_1\overline{b_1} - a_2\overline{b_2} + a_3\overline{b_3} - a_4\overline{b_4}$, где $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$?

282. В комплексном n-мерном пространстве V скалярное произведение (x, y) задано как функция координат $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ векторов x и y в некотором базисе $\{e\}$ пространства. Вычислить матрицы Грама базиса $\{e\}$ и базиса, составленного из векторов $f_1, f_2, ..., f_n$. Найти выражение для скалярного произведения (x, y) через координаты векторов x и y в базисе $\{f\}$:

1. $(x, y) = 2x_1 \overline{y_1} + (1+i) x_1 \overline{y_2} + (1-i) x_2 \overline{y_1} + 3x_2 \overline{y_2}$:

   а) $(f_1)_e = (1 \quad 0)^T$, $(f_2)_e = (1 \quad -1)^T$,

   б) $(f_1)_e = (1 \quad 0)^T$, $(f_2)_e = (-1 \quad 1+i)^T$;

2. $(x, y) = x_1 \overline{y_1} - i x_1 \overline{y_2} + i x_2 \overline{y_1} + 2x_2 \overline{y_2} + (2+i) x_2 \overline{y_3} + (2-i) x_3 \overline{y_2} + 6x_3 \overline{y_3}$:

   а) $(f_1)_e = (1 \quad 1 \quad 0)^T$, $(f_2)_e = (-1 \quad 1 \quad 0)^T$, $(f_3)_e = (0 \quad 0 \quad 1)^T$,

   б) $(f_1)_e = (1 \quad 0 \quad 0)^T$, $(f_2)_e = (-i \quad 1 \quad 0)^T$, $(f_3)_e = (1+2i \quad -2+i \quad 1)^T$.

283. Векторы x и y унитарного пространства заданы в базисе $\{e\}$ координатными столбцами x_e и y_e соответственно, и известна матрица Грама $\Gamma(f)$ базиса f. Вычислить матрицу Грама $\Gamma(e)$ базиса $\{e\}$ и скалярное произведение векторов x и y, если:

1. $f_1 = e_1 + ie_2$, $f_2 = -3ie_1 + 4e_2$, $\Gamma(f) = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T$, $y_e = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \end{pmatrix}^T$;

2. $f_1 = e_1$, $f_2 = -ie_1 + 2e_2 + ie_3$, $f_3 = -ie_2 + e_3$, $\Gamma(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3i & -1 \\ -3i & 22 & 10i \\ -1 & -10i & 5 \end{pmatrix}$,

   $x_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $y_e = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 1 \end{pmatrix}^T$.

284. Найти длину вектора:

1. $a = (1, i)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = x\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}\overline{y^T}$;

2. $a = (1+i, 1, -i)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$ со скалярным произведением $(x, y) = x\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 2+i \\ 0 & 2-i & 6 \end{pmatrix}\overline{y^T}$.

285. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к указанной системе векторов комплексного арифметического пространства с соответствующим скалярным произведением:

1. $(1+i, 1-i)$, скалярное произведение стандартное;
2. $(-1, 1+i, 0)$, $(0, 1, i)$, скалярное произведение стандартное;
3. $(1, i, 0)$, $(i, 1, 0)$, скалярное произведение задано равенством

   $(x, y) = x_1\overline{y_1} + 5x_2\overline{y_2} + ix_2\overline{y_3} - ix_3\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$.

286. Дополнить следующие системы векторов до ортогональных базисов пространства $\mathbb{C}^3$ (скалярное произведение задано стандартным образом):

1. $a_1 = (1, 1-i, 2)$, $a_2 = (2, -5+3i, 3+i)$;

2. $a_1 = (-i, 2, -4+i)$, $a_2 = (4-i, -1, i)$.

287. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

1. $a_1 = (2, 1, -i)$, $a_2 = (3+i, 0, -2)$, $a_3 = (0, 6-i, 1)$;

2. $a_1 = (0, 1-i, 2)$, $a_2 = (1, 2, 2-i)$, $a_3 = (i, 2, 5+2i)$.

288. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора $f = (0, -1+i, -1+6i)$ на подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (-i, 2+i, 0)$, $a_2 = (2, -3-i, i)$.

289. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, заданное однородной системой уравнений:

1. $f = (0, -7i, 7+7i)$, $L: x_1 + ix_2 - (2-i)x_3 = 0$;

2. $f = (4, -4, 4i)$, $L: x_1 + (1+i)x_2 - ix_3 = 0$;

3. $f = (3-i, 1+2i, 2, -i)$, $L: \begin{cases} (2+i)x_1 + x_2 + 2x_3 + ix_4 = 0, \\ 5x_1 - 2ix_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Глава VI. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Линейные операторы в линейных пространствах

290. Какие из следующих отображений в соответствующих линейных пространствах являются линейными операторами? Найти ядро и образ линейного оператора:

1. $x \mapsto a$ (a – фиксированный вектор);
2. $x \mapsto x + a$ (a – фиксированный вектор);
3. $x \mapsto \alpha x$ (α – фиксированный скаляр);
4. $x \mapsto (x, a)b$ (V – евклидово пространство, a, b – фиксированные векторы);
5. $x \mapsto (x, a)x$ (V – евклидово пространство, a – фиксированный вектор);
6. $f(x) \mapsto f(ax + b)$ ($f \in \mathbb{R}^n[x]$, a, b – фиксированные скаляры);
7. $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$ ($f \in \mathbb{R}^n[x]$);
8. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;
9. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;
10. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$;
11. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.

291. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ существует единственный линейный оператор, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

1. $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 0)$, $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -1)$, $b_3 = (2, 1, 2)$;
2. $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$, $b_1 = (1, 2, -1)$, $b_2 = (4, 5, -2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$.

292. Найти матрицу линейных операторов:

1) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в базисе из единичных векторов;
2) поворота плоскости на угол α в произвольном ортонормированном базисе;
3) поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$ в базисе из единичных векторов осей координат;
4) проектирования трехмерного пространства на координатную ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе (e_1, e_2, e_3);
5) $x \mapsto (x, a)a$ в евклидовом пространстве в ортонормированном базисе (e_1, e_2, e_3) при $a = e_1 - 2e_3$;
6) $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ в пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ в базисе из матричных единиц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
7) $X \mapsto X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ в базисе из матричных единиц;
8) $X \mapsto X^T$ в пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ в базисе из матричных единиц;
9) $X \mapsto AXB$ (A и B – фиксированные матрицы) в пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ в базисе, состоящем из матричных единиц;
10) дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ в базисе $(1, x, x^2, ..., x^n)$.

293. Оператор задан своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$. Построить матрицу этого оператора: а) в естественном базисе e_1, e_2, e_3; б) в базисе $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$, $e_1 + e_3$.

1. $x \mapsto (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
2. $x \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;
3. $x \mapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$.

294. Оператор A, действующий в пространстве $\mathbb{R}^3$, переводит векторы $f_1,\ f_2,\ f_3$ соответственно в векторы $g_1,\ g_2, g_3$. Построить матрицу этого оператора: а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$; б) в базисе $f_1,\ f_2,\ f_3$.

1. $f_1 = (2,\,3,\,5)$, $f_2 = (0,\,1,\,2)$, $f_3 = (1,\,0,\,0)$, $g_1 = (1,\,1,\,1)$, $g_2 = (1,\,1,\,-1)$, $g_3 = (2,\,1,\,2)$;
2. $f_1 = (2,\,0,\,3)$, $f_2 = (4,\,1,\,5)$, $f_3 = (3,\,1,\,2)$, $g_1 = (1,\,2,\,-1)$, $g_2 = (4,\,5,\,-2)$, $g_3 = (1,\,-1,\,1)$;
3. $f_1 = (5,\,3,\,1)$, $f_2 = (1,\,-3,\,-2)$, $f_3 = (1,\,2,\,1)$, $g_1 = (-2,\,1,\,0)$, $g_2 = (-1,\,3,\,0)$, $g_3 = (-2,\,-3,\,0)$.

295. Оператор A, действующий в комплексном арифметическом пространстве $\mathbb{C}^2$, переводит векторы $f_1,\ f_2$ соответственно в векторы $g_1,\ g_2$. Построить матрицу этого оператора в естественном базисе пространства $\mathbb{C}^2$:

1. $f_1 = (i,\,1)$, $f_2 = (1,\,i)$, $g_1 = (i-1,\,i+1)$, $g_2 = (i+1,\,i-1)$;
2. $f_1 = (1,\,-i)$, $f_2 = (-i,\,1)$, $g_1 = (0,\,0)$, $g_2 = (2,\,2i)$;
3. $f_1 = (1,\,i)$, $f_2 = (0,\,1)$, $g_1 = (i,\,-1)$, $g_2 = (1,\,2i)$.

296. Оператор A действует в пространстве многочленов $M^n[x]$. Построить матрицу этого оператора в естественном базисе этого пространства:

1. $\mathrm{A} = D$ – оператор дифференцирования;
2. $\mathrm{A} = D^2$ – оператор двукратного дифференцирования;
3. $Af(t) = \dfrac{f(t+h) - f(f)}{h}$ – разностный оператор (h – фиксированное положительное число);
4. $Af(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\xi)\,d\xi$.

297. Пусть в геометрическом пространстве V^3 задана прямоугольная система координат $\{O,\, e_1,\, e_2,\, e_3\}$. В базисе e_1, e_2, e_3 найти матрицу оператора ортогонального проектирования на подпространство L, если L является:

1) прямой $x = z = 0$;

2) прямой $x = y = z$;

3) плоскостью $x + y + z = 0$;

4) плоскостью, натянутой на векторы $a = (-1, 1, -1)$ и $b = (1, -3, 2)$.

298. Пусть в геометрическом пространстве V^3 задана прямоугольная система координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. В базисе e_1, e_2, e_3 найти матрицу оператора проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, если:

1. L_1 определено уравнением $x = 0$, а L_2 – уравнениями $2x = 2y = -z$;
2. L_1 имеет уравнение $x = y$, а L_2 определяется системой уравнений $x + y + z = 0$, $2x + 3y + 4z = 0$;
3. L_1 определено уравнениями $-20x = 15y = 12z$, а L_2 – уравнением $2x + 3y - z = 0$;
4. L_1 определено системой уравнений $x - y + z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$, а L_2 – уравнением $2x + 3y - 4z = 0$.

299. Пусть в геометрическом пространстве V^3 задана прямоугольная система координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. В базисе e_1, e_2, e_3 найти матрицу оператора ортогонального отражения относительно:

1) плоскости $x = 0$;

2) прямой $x = 2y = z$;

3) плоскости, натянутой на векторы $a = (1, 0, -1)$ и $b = (1, 1, -2)$.

300. Пусть в геометрическом пространстве V^3 задана прямоугольная система координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. В базисе e_1, e_2, e_3 найти матрицу оператора отражения:

1) относительно плоскости $x = 0$ параллельно прямой $2x = y = -z$;

2) относительно прямой $x = z$, $x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x + y = 0$.

§ 2. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Собственные векторы. Инвариантные подпространства. Корневые подпространства

301. Линейный оператор *A* в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе:

1. e_1, e_3, e_2, e_4;
2. e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

302. Линейный оператор *A* в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

303. Дан вектор $a = (1, 2, 3)$. Найти матрицу линейного оператора $Ax = (x, a)a$ геометрического пространства V^3:

1) в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, в котором даны координаты всех векторов;
2) в базисе $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.

304. В геометрическом пространстве V^2 задана аффинная система координат $\{O, e_1, e_2\}$. В базисе e_1, e_2 найти матрицу оператора *A*, если *A* осуществляет:

1) отражение плоскости относительно прямой $x + 2y = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$;
2) проектирование плоскости на прямую $x + y = 0$ параллельно прямой $4x + 5y = 0$;

3) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к прямой $3x - 2y = 0$ параллельно прямой $x + y = 0$.

305. Линейный оператор A в базисе $\{e\}$ имеет матрицу A_e, а координатные столбцы векторов нового базиса $\{f\}$ образуют матрицу S. Вычислить матрицу оператора A в базисе $\{f\}$, если:

1. $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;
2. $A_e = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $A_e = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;
5. $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;
6. $A_e = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

306. Линейный оператор A в базисе $\{e\}$ комплексного линейного пространства имеет матрицу A_e, а координатные столбцы векторов нового базиса $\{f\}$ образуют матрицу S. Вычислить матрицу оператора A в базисе $\{f\}$, если:

1. $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$;
2. $A_e = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \end{pmatrix}$.

307. Пусть D – оператор дифференцирования в пространстве $M^n[t]$. Вычислить матрицу оператора D в следующих базисах этого пространства:

1. $1+t$, $t+2t^2$, $3t^2-1$ $(n=2)$;
2. t^3-1, $1-t$, $1-t+t^2$, $1-t+t^2-t^3$ $(n=3)$;

3. $1,\ t,\ t^2,\ \dots,\ t^n\ (n \ge 1)$;

4. $1,\ t,\ \dfrac{t^2}{2!},\ \dots,\ \dfrac{t^n}{n!}\ (n \ge 1)$;

5. $1,\ 1+t,\ 1+t+\dfrac{t^2}{2},\ \dots,\ 1+t+\dots+\dfrac{t^n}{n!}\ (n \ge 1)$;

6. $1,\ 1+t,\ 1+t+t^2,\ \dots,\ 1+t+\dots+t^n\ (n \ge 1)$.

308. В базисе $1,\ t,\ t^2$ пространства $M^2[t]$ оператор A задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, составленного из многочленов $3t^2+2t,\ 5t^2+3t+1,\ 7t^2+5t+3$.

309. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе указанными матрицами. Если матрица оператора приводится к диагональному виду путем перехода к новому базису, то найти эту диагональную матрицу и соответствующий базис:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;   10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

11. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;   12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

310. Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные относительно линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

311. Найти собственные значения и корневые подпространства линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

1. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;   2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

312. В линейном пространстве многочленов $M^1[t]$ задан линейный оператор, действующий по правилу $(Ax)(t)=\int_0^2 (t-\tau)x(\tau)d\tau$. Найти матрицу оператора A в базисе $e_1(t)=1,\ e_2(t)=t$.

313. В линейной оболочке $L=\langle \cos x, \sin x\rangle$ задан линейный оператор, действующий по правилу $(Ax)(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}x(t)$. Найти матрицу оператора в базисе $\cos x$, $\sin x$; собственные значения и собственные векторы оператора A.

314. Доказать, что если оператор A невырожденный, то операторы A и A^{-1} имеют одни и те же собственные значения.

§ 3. Ядро и образ линейного оператора

315. Найти образ и ядро линейного оператора в геометрическом пространстве V^3, если:

1. $x \mapsto [x, a]$;
2. $x \mapsto [a, [x, b]]$.

316. Для следующих линейных преобразований арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ построить базисы образа и ядра, найти ранг и дефект:

1. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;
2. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$;
3. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$;
4. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 8x_2 - 8x_3, 4x_1 + x_2 - x_3)$.

317. Линейный оператор A, действующий в n-мерном пространстве V, задан матрицей A в некотором базисе $\{e\}$. Найти его ядро и образ и выяснить, является ли этот оператор изоморфизмом, если:

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

318. Найти ранг оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ по правилу $X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

319. Описать образ и ядро оператора дифференцирования D в пространстве $M^n[x]$.

320. Описать образ и ядро разностного оператора A в пространстве $M^n[x]$, действующего по правилу $Af(t) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$.

§ 4. λ-матрицы. Жорданова форма матрицы. Функции от матриц

321. Следующие λ-матрицы привести к нормальной диагональной форме путем элементарных преобразований:

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 1 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$;
5. $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$;
6. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$.

322. Следующие λ-матрицы привести к нормальной диагональной форме с помощью делителей миноров:

1. $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

323. Выяснить, являются ли подобными между собой следующие матрицы:

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$;
2. $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

324. Найти минимальные многочлены следующих матриц:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

325. Найти жорданову форму матрицы линейного оператора и матрицу перехода к базису, в котором матрица оператора является жордановой, если в исходном базисе оператор задан матрицей:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

326. Используя жорданову форму, вычислить:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$;

3. $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

4. $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

5. e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$;

6. e^A, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $\ln\begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

8. $\sin\begin{pmatrix} \pi-1 & 1 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$.

§ 5. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

327. Пусть e_1, e_2 – ортонормированный базис метрического векторного пространства и оператор A имеет в базисе e_1, e_1+e_2 матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A^* в этом базисе.

328. Линейное преобразование B евклидова пространства в базисе из векторов $f_1=(1, 2, 1)$, $f_2=(1, 1, 2)$, $f_3=(1, 1, 0)$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного преобразования B^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

329. Найти матрицу линейного преобразования B^*, сопряженного преобразования B в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если B переводит векторы $a_1=(0, 0, 1)$, $a_2=(0, 1, 1)$, $a_3=(1, 1, 1)$ в векторы $b_1=(1, 2, 1)$, $b_2=(3, 1, 2)$, $b_3=(7, -1, 4)$ соответственно, где координаты всех векторов даны в базисе e_1, e_2, e_3.

330. Пусть xOy – прямоугольная система координат на плоскости и B – проектирование плоскости на ось Ox параллельно биссектрисе первой и третьей четверти. Найти сопряженное преобразование B^*. Найти ядро и образ этого оператора.

331. Доказать, что оператор, определенный правилом $\big(A(f)\big)(x)=\left(x^2-1\right)f''(x)+2xf'(x)$ в пространстве многочленов степени не больше n со скалярным произведением $\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, является самосопряженным.

332. Даны два вектора a и b в унитарном (евклидовом) пространстве. Найти сопряженный оператор к линейному оператору $x \mapsto (x, a)b$.

333. Пусть V – пространство финитных функций на $\mathbb{R}$ (финитная функция – бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого отрезка) со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx$. Найти сопряженный оператор к оператору дифференцирования $D(f) = f'$. Найти сопряженный оператор к дифференциальному оператору $C(f) = x^3 f''$.

334. Пусть V – евклидово пространство вещественных $n \times n$-матриц со скалярным произведением $(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Найти сопряженный оператор к оператору умножения $P(X) = AX$ на некоторую матрицу A.

335. Найти диагональную форму и ортонормированный базис из собственных векторов для самосопряженного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 13 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$.

336. Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq \pi k)$; 2. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$.

337. Найти канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

1. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 4. $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$;

5. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; 6. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

338. Доказать, что:

1) если A кососимметрическая (т. е. $A^T = -A$) вещественная матрица, то $\exp A$ – ортогональная матрица;

2) если B косоэрмитова (т. е. $B^* = -B$) матрица, то $\exp B$ – унитарная матрица.

339. Пусть U – унитарное пространство, A – оператор, действующий в пространстве U. Доказать, что $i\left(A - A^*\right)$ – самосопряженный оператор.

340. Пусть A и B – самосопряженные операторы в евклидовом пространстве. Доказать, что AB является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Глава VII. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Билинейные и квадратичные формы

341. Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями в соответствующих пространствах:

1. $f(A, B) = \det AB$;
2. $f(A, B) = \mathrm{tr} AB$;
3. $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB - BA)$;
4. $f(A, B) = \mathrm{tr}(A + B)$;
5. $f(A, B)$ коэффициент на месте (i, j) матрицы AB;
6. $f(u, v) = \mathrm{Re}(uv)$ ($u, v \in □^n$, $□^n$ – векторное пространство над □);
7. $f(u, v) = \mathrm{Re}(u\bar{v})$;
8. $f(u, v) = \mathrm{Im}(u\bar{v})$;
9. $f(u, v) = |uv|$;
10. $f(u, v) = \int_a^b uvdt$ (u,v – непрерывные функции аргумента t на отрезке $[a, b]$);
11. $f(u, v) = \int_a^b (u+v)^2 dt$;
12. $f(u, v) = |u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2$.

342. Найти матрицу билинейной формы f в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2, \\ e_2' = e_1 + e_3, \\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3; \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ e_2' = e_2 - e_3, \\ e_3' = -e_1 + e_2 - 3e_3. \end{cases}$

343. Пусть билинейная форма f задана в некотором базисе матрицей F. Найти $f(x, y)$, если:

1. $F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $x=(1, 0, 3)$, $y=(-1, 2, -4)$;

2. $F=\begin{pmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1+i & 0 & 2-i \\ 2+i & 3-i & -1 \end{pmatrix}$, $x=(1+i, 1-i, 1)$, $y=(-2+i, -i, 3+2i)$.

344. При каких значениях λ следующие квадратичные формы являются положительно-определенными:

1. $5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;
2. $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$;
3. $5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;
4. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

345. При каких значениях λ являются отрицательно-определенными квадратичные формы:

1. $-x_1^2+\lambda x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$;
2. $\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3$.

346. Найти симметрическую билинейную форму, ассоциированную с квадратичной формой:

1. $x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$;
2. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

347. Привести квадратичную форму к каноническому виду:

1. $x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3+3x_3^2$;
2. $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$;
3. $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3-3x_3^2$;
4. $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_3x_4$.

348. Для указанных ниже квадратичных форм вычислить индексы инерции:

1. $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_3x_4$;
2. $x_1x_2+2x_1x_3+3x_1x_4+x_2x_3+2x_2x_4+x_3x_4$;
3. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_4+6x_3x_4$.

349. Квадратичная (билинейная) форма записана в ортонормированном базисе трехмерного евклидового пространства. Записать канонический вид (приведение к главным осям) формы и матрицу P перехода в базис, в котором матрица формы имеет диагональный вид:

1. $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;
2. $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$;
3. $2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 4x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 - 3x_3y_3$.

350. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду, и записать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно).

1. $2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2\xi_3$;
2. $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2\xi_3$;
3. $2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 + 2\xi_4^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_4 + 2\xi_2\xi_3 - 4\xi_3\xi_4$.

351. Квадратичная форма $B(x,x)$ задана в базисе $\{e_i\}$, для которого матрица Грама – Γ также задана. Найти матрицу оператора A такого, что $B(x, y) = (x, Ay)$:

1. $4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
2. $4x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;
3. $2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;
4. $5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

352. Можно ли следующие пары квадратичных форм в вещественном пространстве привести одновременно к каноническому виду:

1. $A(x,x) = \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - \xi_2^2$, $B(x,x) = \xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2$;
2. $A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 - \xi_2^2$, $B(x,x) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$.

353. Привести одновременно к каноническому виду формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$:

1. $A(x,x)=21x_1^2-18x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+28x_1x_3+6x_2x_3$,

   $B(x,x)=11x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-12x_1x_2+12x_1x_3-6x_2x_3$;

2. $A(x,x)=14x_1^2-4x_2^2+17x_3^2+8x_1x_2-40x_1x_3-26x_2x_3$,

   $B(x,x)=9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3$.

354. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную форму g к нормальному виду, а форму f – к каноническому, найти этот канонический вид формы f:

1. $f=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, $g=10x_1^2+6x_1x_2+x_2^2$;

2. $f=89x_1^2-42x_1x_2+5x_2^2$, $g=41x_1^2-18x_1x_2+2x_2^2$.

355. Найти преобразование координат, одновременно приводящее одну из двух данных квадратичных форм к нормальному виду, а другую – к каноническому виду, и записать этот вид:

1. $A(x,x)=-4\xi_1\xi_2$, $B(x,x)=\xi_1^2-2\xi_1\xi_2+4\xi_2^2$;

2. $A(x,x)=\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+3\xi_2^2$, $B(x,x)=4\xi_1^2+16\xi_1\xi_2+6\xi_2^2$;

3. $A(x,x)=2\xi_1^2-3\xi_1\xi_2+2{,}5\xi_2^2$, $B(x,x)=2\xi_1^2+6\xi_1\xi_2+5\xi_2^2$;

4. $A(x,x)=11\xi_1^2-6\xi_1\xi_2+\xi_2^2$, $B(x,x)=13\xi_1^2-10\xi_1\xi_2+3\xi_2^2$.

356. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду, и написать этот канонический базис:

1. $6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

2. $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

3. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

4. $x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

5. $3x_1^2+8x_1x_2-3x_2^2+4x_3^2-4x_3x_4+x_4^2$.

§ 2. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

357. Определить тип кривой на плоскости:

1. $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$;
2. $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$;
3. $3x^2-12x-6y+11=0$;
4. $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$;
5. $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$;
6. $3x^2+12x+16y-12=0$;
7. $9x^2-4y^2+36x-16y+20=0$;
8. $x^2+x-6=0$.

358. Линия второго порядка определяется уравнением $x^2-2y+\lambda\left(y^2-2x\right)=0$. Определить тип линии при изменении параметра λ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

359. Определить тип кривой, найти ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;
2. $5x^2+12xy-12x-12y-19=0$;
3. $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$;
4. $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$;
5. $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$;
6. $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;
7. $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$;
8. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
9. $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;
10. $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

360. Определить тип кривой $x^2+2\alpha xy+y^2=1$ в зависимости от значения параметра α.

361. Определить вид поверхности и ее расположение в пространстве:

1. $x^2+y^2-6x+4y-1=0$;
2. $4x^2-y^2-z^2+32x-12y+44=0$;
3. $z^2=2xy$;
4. $z=xy$.

362. Доказать, что каждая из следующих поверхностей является поверхностью вращения, определить тип, написать каноническое уравнение, найти ось вращения:

1. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8zx-14x-4y+14z+18=0$;
2. $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+4yz+8zx-6x+6y+6z+10=0$;

3. $2xy+2yz+2zx+2x+2y+2z+1=0$;

4. $3x^2+3y^2+3z^2+2xy-2yz-2zx-2x-2y-2z-1=0$;

5. $4xy+yz+4zx+x+4y+4z+3=0$;

6. $2x^2+6y^2+2z^2+8xy-4x-8y+3=0$;

7. $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-4yz-2zx+10x-4y+2z+4=0$;

8. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$.

363. Определить вид каждой из следующих поверхностей второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0$;

2. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+2yz-4zx+2x-10y-2z-1=0$;

3. $7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-8zx-16x-16y-8z+72=0$;

4. $4x^2+y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y+10z-2=0$;

5. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;

6. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$;

7. $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$.

364. Выяснить геометрический смысл следующих движений пространства:

1. $\begin{cases} x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{2}{3}z + 7, \\ y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{1}{3}z + 4, \\ z' = -\frac{2}{15}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 6; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, \\ y' = -\frac{11}{15}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{15}z + 2, \\ z' = \frac{2}{15}x + \frac{1}{3}y - \frac{14}{15}z + 3; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + 7, \\ y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 14, \\ z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 7; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z - 7, \\ y' = \frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 14, \\ z' = \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 7. \end{cases}$

Глава VIII. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

§ 1. Первая контрольная работа, первый семестр

1. (в билете будет одно из заданий а или б)

   а). Проверить, будет ли система векторов линейно зависимой:

   $\overline{a_1} = (1,2,3)$

   $\overline{a_2} = (-1,0,2)$

   $\overline{a_3} = (2,0,1)$

   б). Проверить, будет ли система векторов линейно зависимой:

   $\overline{a_1} = (4,-2,6)$

   $\overline{a_2} = (6,-3,9)$

2. (в билете одно из заданий а или б – 1 балл)

   а). Найти координаты вектора $\overline{x} = (-1,0)$ в базисе $\overline{a_1} = (1,2)$, $\overline{a_2} = (-2,1)$

   б). Найти координаты вектора $\overline{x} = (6,2,-7)$ в базисе $\overline{e}_1 = (2,1,-3), \overline{e}_2 = (3,2,-5), \overline{e}_3 = (1,-1,1)$ (систему уравнений решать по правилу Крамера)

3. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

4. Определить, в определитель какого порядка и с каким знаком входит элемент $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$.

5. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (используя правило вычисления треугольных определителей)

6. Продолжите равенство: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42}+b_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$ (ответ обоснуйте – нужна ссылка на соответствующее свойство определителя)

7. Вычислить определители:

а). по теореме Лапласа $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (определители третьего порядка вычислять любым способом)

б). разложив определитель по третьей строке $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (определители третьего порядка можно не вычислять)

в). по свойствам определителя, свести к вычислению определителя 2-го порядка или к треугольному определителю $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

§ 2. Вторая контрольная работа, первый семестр

1. Исследовать систему на совместность (по теореме Кронекера-Капелли)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Найти общее решение неоднородной системы, ФСР однородной системы и записать множество решений неоднородной системы в векторном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений а) по правилу Крамера б) с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Выполнить действие над матрицами

(Например A+2E или A-3B – матрицы A и B даны)

Или так: выполнить действие: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t + 3E_{12}$ (здесь E_{12} базисная матрица)

Или так: выполнить действие $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}^t$

Или так: выполнить действие: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (будьте внимательны!)

5. Задача на умножение матриц
(перемножить две матрицы,
или матрица А размера 2x15 матрица В 3x15 возможно ли умножение АВ ? ВА?
Какого размера матрица получится?
Или даны две матрицы подходящего размера, найти элемент cij в их произведении)

Здесь такие задачи

А) даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Можно найти AB?

Какого размера будет матрица AB? Найти элемент c_{23}.

6 . Задача на нахождение обратной матрицы
(дана матрица A, найти элемент bij в матрице, обратной к матрице A
или даны две матрицы A и B определить, будет ли A обратной к B)

а) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Будет ли B обратной к A?

б) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ Найти элемент b_{31} в матрице, обратной к A

(подсказка: $b_{31} = \dfrac{A_{13}}{\det A}$)

в) Можно ли найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

7. Задача на решение матричных уравнений. Решить уравнение в буквенном виде.
Например, выразить матрицу X: ABX=C или AXB=C или найти $(AB)^{-1}$

8 . Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

9 Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

§ 3. Третья контрольная работа, первый семестр

Структура билета.

1. Задача на скалярное, векторное или смешанное произведение.
2. Задача на приложение скалярного, векторного или смешанного произведения.
3. Задача на прямую на плоскости.
4. Задача на прямую в пространстве.
5. Задача на плоскость.
6. Задача на плоскость.
7. Задача на кривую второго порядка
8. Задача на поверхность второго порядка

Примерный билет.

1. Дано $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Вычислить скалярное произведение векторов $(\bar{a}+\bar{b}, -3\bar{a}+2\bar{b})$.

2. Даны точки $A(1;2;4)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;5)$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$, $\overline{AD}$ и найти длину высоты, опущенной из вершины А на грань BCD.

3. Дан треугольник АВС: $A(6;-4)$, $B(-1;-3)$, $C(9;-1)$. Найти 1) уравнение стороны АВ,2) привести уравнение АВ к общему виду, указать направляющий и нормальный вектор, 3) привести уравнение АВ к уравнению с угловым коэффициентом, указать угловой коэффициент,4) найти уравнение медианы из вершины В.

4. Даны две прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+2}{3}$ и $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$. У каждой из прямых указать направляющие вектора. Найти угол между этими прямыми.

5. Даны точки $A(1;2;4)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;5)$. Найти 1) уравнение плоскости BCD в общем виде, 2) определить направляющие вектора плоскости BCD, 3) найти нормальный вектор плоскости BCD.
6. Найти проекцию точки A на плоскость BCD.
7. Определить тип и построить кривую второго порядка: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.
8. Определить тип и построить поверхность второго порядка: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

§ 4. Первая контрольная работа, второй семестр

1. Определить, является ли W линейным подпространством пространства V, и если является, найти его базис и размерность.
   a. $V=R^3$, $W=\{x=(x_1,x_2,x_3)| \quad 2x_1+x_2-x_3=0\}$;
   b. $V=R^4$, $W=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)| \quad x_1+x_2+x_3=1\}$.
2. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ образует базис, найти матрицу перехода к этому базису, найти координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе (с помощью матрицы перехода): $\bar{e}_1 = (2,1,-3), \bar{e}_2 = (3,2,-5), \bar{e}_3 = (1,-1,1) \quad \bar{x} = (6,2,-7)$.
3. Первый базис $a_1(1,2)$ $a_2(3,4)$. Второй базис $b_1(-2,3)$ $b_2(5,1)$. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму (или найти матрицу перехода от второго базиса к первому).
4. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов: $S = \langle (1,2,0,1), (2,3,1,1), (3,5,1,2) \rangle$, $L = \langle (4,6,2,2), (1,3,0,1), (5,9,2,3) \rangle$.

§ 5. Вторая контрольная работа, второй семестр

1. Оператор $\varphi : R^3 \to R^3$ задан следующим образом:

а) $\varphi(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_2)^2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ б) $\varphi(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Проверить, является ли оператор линейным. Для линейного оператора найти ядро, образ и матрицу в стандартном базисе.

2. Преобразование φ в базисе $a_1 = (1,1)$ $a_2 = (3,4)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

преобразование ψ в базисе $b_1 = (3,2)$ $b_2 = (2,1)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу преобразования $\varphi + 3\psi$ в базисе b_1, b_2. Найти матрицу преобразования $2\varphi - \psi$ в базисе $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$. Найти матрицу преобразования $\dfrac{\varphi + \psi}{3}$ в базисе a_1, a_2.

3. Найдите собственные вектора и собственные значения. Укажите жорданову нормальную форму оператора. В случае диагонализируемого оператора выпишите преобразование, приводящее матрицу оператора к диагональному виду.

а) $A = \begin{pmatrix} -12 & 10 & -30 \\ -4 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -18 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

6. Задача на проверку аксиом евклидова или унитарного пространства:

   a. Проверить аксиомы евклидова пространства в пространстве R^2 со скалярным произведением $(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2$.

   b. Проверить аксиомы унитарного пространства в пространстве C^2 со скалярным произведением $(x, y) := x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_1}$?

7. Задача на процесс ортогонализации Грама-Шмидта: С помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис линейной оболочки системы:
   a. a_1=(-2,3,1,2); a_2=(4,-1,3,-5); a_3=(27,-5,-5,19) (в пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением);
   b. a_1=(2,1, -i); a_2=(3+i,0,-2) (в пространстве C^3 со стандартным скалярным произведением).

§ 6. Третья контрольная работа, второй семестр

1. Задача на матрицу Грама
   a. Вычислите скалярное произведение векторов x=(1,2) и y=(4,5) в пространстве R^2 , если скалярное произведение задано матрицей Грама $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   a. Вычислите скалярное произведение векторов x=(1,2,3) и y=(4,5,6) в пространстве R^3, если скалярное произведение задано матрицей Грама $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   b. Найти длину вектора $a=(1+i;\ 2-3i)$ в пространстве C^2 со скалярным произведением, заданным матрицей Грама $G=\begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}$.
   c. Вычислить объем n-мерного параллелепипеда со сторонами a_1=(1,1,1); a_2=(1,-1,-1); a_3=(2,1,1).
   d. Проверить ЛНЗ векторов с помощью матрицы Грама a_1=(1,1,1,1); a_2=(1,-1,-1,1); a_3=(2,1,1,3); a_4=(0,1,-1,0).
2. Задача на вид матрицы:
   a. Найдите матрицу, сопряженную к матрице $A=\begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 4-8i \\ 4 & 2 & 7-8i \\ -3+2i & 2 & 4+5i \end{pmatrix}$.
   b. Будет ли матрица $A=\begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 4-8i \\ 4 & 2 & 7-8i \\ -3+2i & 2 & 4+5i \end{pmatrix}$ эрмитовой?
   c. Будет ли матрица $A=\begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 4-8i \\ 4 & 2 & 7-8i \\ -3+2i & 2 & 4+5i \end{pmatrix}$ унитарной?
   d. Будет ли матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ортогональной?

3. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа, указать невырожденную замену переменных

   a. $x_1x_2 - 3x_1^2 + 2x_2^2$

   b. $x_1x_2 - x_2x_3$

   c. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$

4. При каком значении λ квадратичная форма будет положительно(отрицательно) определенной

   a. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$

   b. $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$

5. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби и методом ортогональных преобразований (выписать ортогональное преобразование, приводящее к этому виду) $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$

6. Построить кривую второго порядка (поверхность второго порядка)

   a. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$

   b. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

ОТВЕТЫ

Глава I. § 1.

1.1. 1) 18; 2) 1; 3) -2; 4) 14; 5) -1; 6) $4ab$; 7) 1; 8) $\sin(\alpha-\beta)$; 9) 0; 10) 1; 11) -1; 12) 1.

1.2. 1) -4, -1; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

1.3. 1) 0; 2) 40; 3) 100; 4) -5; 5) 0; 6) 1; 7) 0; 8) 1; 9) 2; 10) 4; 11) 6; 12) 20; 13) $3abc-a^3-b^3-c^3$; 14) $a^3+b^3+c^3-3abc$; 15) $(ab+bc+ac)x+abc$; 16) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$.

1.4. 1) $-4-\sqrt{22}$; $-4+\sqrt{22}$; 2) $(-\infty,+\infty)$.

1.5. 1) $(4,+\infty)$; 2) $(-6,-4)$.

Глава I. § 3.

3.2. 1) 0; 2) 48; 3) 223; 4) -8; 5) -3; 6) -9; 7) 18; 8) 18; 9) 4; 10) -120; 11) -6; 12) 100; 13) -63; 14) 15; 15) 10; 16) 1; 17) 1; 18) 1/35; 19) -2; 20) 5.

3.4. 1) $n!$; 2) $x_1(x_2-a_{12})\dots(x_n-a_{n-1,n})$; 3) $2n+1$; 4) $x^n(a_0+a_1+\dots+a_n)$; 5) $a_0(x-a_1)\dots(x-a_n)$; 6) $(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$; 7) $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$; 8) $(x^2-1)(x^2-4)$; 9) $n+1$; 10) $2^{n+1}-1$; 11) $5^{n+1}-4^{n+1}$; 12) n–четное, то $(-1)^{n/2}$, n–нечетное, то 0.

Глава I. § 4.

4.1. 1) 10; 2) 100; 3) 60; 4) 6; 5) 10; 6) -4; 7) -2; 8) 195; 9) 90; 10) 8; 11) 1000; 12) 12.

4.2. 1) -84; 2) -84; 3) 98; 4) 43; 5) 81; 6) 14.

Глава I. § 5.

5.1. 1) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1&-3\\9&11\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-3&-8&21\\3&-8&-19\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-8&-9&-1\\10&-18&-12\end{pmatrix}^T$.

5.2. 1) -1; 2) $\begin{pmatrix}8&-12&0\\6&-9&0\\2&-3&0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}5&2\\7&0\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}6&14&-2\\10&-19&17\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1&5&-5\\3&10&0\\2&9&-7\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}7&5&0\\-7&-5&0\\14&10&0\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}11&-22&29\\9&-27&32\\13&-17&26\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}10&17&19&23\\17&23&27&25\\16&12&9&20\\7&1&3&10\end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix}8&6&4&2\\5&0&-5&-10\\7&7&7&7\\10&9&8&7\end{pmatrix}$.

5.3. 1) $\begin{pmatrix}-5&-2&1\\-10&19&-23\\14&-18&2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0&6&2\\2&-5&15\\6&4&-2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1&12&3\\0&-6&24\\16&2&-4\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-5&14&-7\\14&-10&-1\\-11&-10&14\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}-9&-14&17\\2&-4&-3\\13&30&-26\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}-50&20&0\\79&-17&-27\\-28&-12&39\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}-9&10&11\\29&-1&-26\\-18&-8&9\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}-27&22&-8\\7&-16&-10\\-14&-32&22\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 10 & -28 & 34 \\ -12 & 18 & -20 \\ 0 & 24 & -30 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 50 & -20 & 10 \\ -71 & 16 & 16 \\ 17 & 14 & -40 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 11 & 11 & -8 \\ 3 & -9 & 12 \\ -6 & 13 & 16 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 15 & -18 & 9 \\ -14 & -2 & 7 \\ -3 & 14 & -10 \end{pmatrix}$.

5.4. 1) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$.

Глава I. § 6.

6.1. 1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

6.2. 1) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.3. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 7-3c_1 & 5-3c_2 & 7-3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1-9 & 5c_2-3 & 5c_3-7 \end{pmatrix}$, где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

6.4. 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

Глава I. § 7.

7.1. 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 2; 5) 3; 6) 3; 7) 2; 8) 3.

7.2. 1) $\begin{cases} 3, \lambda \neq 0, \\ 2, \lambda = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3, \lambda \neq 3, \\ 2, \lambda = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3, \lambda \neq 0, \\ 2, \lambda = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4, \lambda \neq \pm 1 \text{ и } \lambda \neq \pm 2, \\ 3, \lambda = \pm 1 \text{ и } \lambda = \pm 2. \end{cases}$

7.3. 1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 2.

Глава I. § 8.

8.1. 1) $(3;-1)$; 2) $(5;2)$; 3) $(2/3;1/3)$; 4) $(2;-3)$; 5) $(3;-2;2)$; 6) $(1;1;1)$; 7) $(1;2;-1)$;

8) $(2;-3;-2)$; 9) $(1;1;-1;-1)$; 10) $(-2;0;1;-1)$; 11) $(1;2;2;0)$; 12) $(2;-2;1;-1)$;

13) $(-0,4;-1,2;3,4;1)$; 14) $(2/3;-1;3/2;0)$.

8.2. 1) $(-7;24)$; 2) $(-1;1)$; 3) $(2;-1;1)$; 4) $(1;2;-1)$; 5) $(1;3;0;1)$; 6) $(4;3;2;1)$.

8.3. 1) $(-1;3;-2;2)$; 2) $(2;1;-3;1)$; 3) $(-2;1;4;3)$; 4) $(0;2;1/3;-3/2)$; 5) $(1/2;-2/3;2;-3)$;

6) $(734/7;53/7;-10;1)$; 7) $(5;4;3;2;1)$; 8) $(3;-5;4;-2;1)$.

8.4. 1) фундаментальная система решений: $(8;-6;1;0)$, $(-7;5;0;1)$; 2) фундаментальная система решений: $(1;0;0;-9/4;3/4)$, $(0;1;0;-3/2;1/2)$, $(0;0;1;-2;1)$; 3) фундаментальная система решений $(0;1/3;1;0;0)$, $(0;-2/3;0;0;1)$; 4) фундаментальная система решений $(-3;2;1;0;0)$, $(-5;3;0;0;1)$.

8.5. 1) $(-1;1;0;1)+\alpha_1(1;-5;11;0)+\alpha_2(-9;1;0;11)$; 2) $(2;1;0;0)+\alpha_1(1;0;22;-16)+\alpha_2(0;1;-33;24)$;

3) $(-1;1;0;1)+\alpha_1(1;0;-3;0)+\alpha_2(0;1;-4;0)$; 4) система несовместна; 5) система несовместна;

6) $(1;2;-1;0;1)+\alpha_1(1;0;-8;0;2)+\alpha_2(0;1;4;0;-1)$;

7) $(1;-3;1/2;-5/2;5/2)+ +\alpha_1(1;0;-1;-2;-2)+\alpha_2(0;1;-2;-4;-4)$;

8) $(1;1;2;-8;4)+\alpha_1(3;0;4;-14;4)+\alpha_2(0;3;2;-7;2)$.

Глава II. § 2.

2.5. 1) $\begin{cases} x_1-x_3-x_4=0, \\ x_2+x_3-x_4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_5=0. \end{cases}$

Глава II. § 3.

3.4. 1), 3), 6) линейно независимые; 2), 4), 5) линейно зависимые.

3.5. 1) 15; 2) любое число; 3) $\lambda \neq 12$; 4) таких значений не существует.

Глава II. § 4.

4.2. 1) 2 в обоих случаях; 2) 2 в обоих случаях; 3) 4 в обоих случаях; 4) 4 в обоих случаях; 5) 2 в обоих случаях.

4.3. 1) $(1;2;3)$; 2) $(1;1;1)$; 3) $(6;5;-7;-3)$; 4) $(1+i;-1;1-i)$.

4.4. $(-1;2;-1;1)$.

4.5. 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) 2.

4.6. 1) 0; 2) 1, $(1;1;1)$; 3) 2, $(1-i;-1;0)$, $(2+i;0;-1)$.

4.7. 1) $\dim(S\cup T)=3$, $\dim(S\cap T)=1$; 2) $\dim(S\cup T)=3$, $\dim(S\cap T)=2$.

4.8. 1) базис пересечения $(3;5;1)$; 2) базис пересечения $(1;1;1;1;1)$, $(0;2;3;1;-1)$; 3) базис пересечения $(1;1;1;1;0)$, $(1;0;0;1;-1)$; 4) базис пересечения $(5;-2;-3;-4)$; 5) и в вещественном, и в комплексных случаях размерность суммы – 3, размерность пересечения – 1, базис пересечения $(0;4;3-i)$; 6) в комплексном случае: размерность суммы – 4, пересечения – 2, базис пересечения $(0;1;0;0)$, $(0;0;0;1)$, в вещественном случае: размерность суммы – 6, пересечения – 1, базис пересечения $(0,1,0,2-i)$.

4.9. $(-1;-3;1;3)$.

4.10. 1) $2t^3-3t^2+1$; 2) t^3-t+1; 3) $3\left(t^3-t\right)/2$.

4.11. $5t^3+t^2+4t+7$.

4.17. 1) $\begin{cases} x_1=-27x_1'-71x_2'-43x_3', \\ x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3', \\ x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1=2x_1'+x_3'-x_4', \\ x_2=-3x_1'+x_2'+x_4', \\ x_3=x_1'-2x_2'+2x_3'-x_4', \\ x_4=x_1'-x_2'+x_3'-x_4'. \end{cases}$

4.18. $\left(x_1';x_2'\right)^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left(x_1,\ x_2\right)^T$.

Глава III. § 2.

2.4. 1) $(1;1;1;0)$, $(-1;1;0;1)$; 2) $(2;3;1;0)$, $(1;-1;1;1)$; 3) $(0;-3;1;1)$, $(11;-3;-10;1)$;

4) $(0;-5;4;3)$, $(2;1;10;-7)$.

2.9. 1) $\frac{1}{3}(2;-1;2)$; 2) $\frac{1}{2}(1;1;1;1)$, $\frac{1}{2}(1;1;-1;-1)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1;0;1;-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(0;1;1;1)$.

2.10. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1;-1;-2)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0;0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0;0;1;-1)$, $\frac{1}{2}(1;1;-1;-1)$;

3) $\frac{1}{\sqrt{14}}(3;2;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(0;1;-2;1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;1;0;0)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1;2;-1;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{22}}(-2;3;2;-2;1)$.

2.11. 1) $\frac{1}{\sqrt{11}}(1;-3;1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2;1;1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1;0;-1;2)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1;2;1;0)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2;0;-1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1;-1;2)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(1;5;2)$; 4) $\frac{1}{3}(1;2;2)$, $\frac{1}{3}(2;1;-2)$, $\frac{1}{3}(2;-2;1)$.

Глава III. § 3.

3.5. 1) $\Gamma_e=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(x,y)=-1$; 2) $\Gamma_e=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $(x,y)=2$; 3) $\Gamma_e=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(x,y)=7$;

4) $\Gamma_e=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(x,y)=3$.

3.6. 1) 8; 2) 4; 3) 12714.

Глава III. § 4.

4.2. 1) $(2;-2;-1;0)$, $(1;1;0;-1)$; 2) $(0;1;0;-1)$, $(1;0;-1;0)$; 3) $(-3;1;-2;0)$, $(1;-1;-2;1)$.

4.3. 1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ -18x_1+x_2+18x_3+11x_4=0; \end{cases}$ 2) $x_2+x_4=0$.

4.4. 1) подпространство, натянутое на многочлен $1+t+t^2+...+t^n$; 2) подпространство, натянутое на многочлен $t+t^3+...+t^{2k+1}$, где $2k+1$ – наибольшее нечетное число, не превосходящее *n*; 3) подпространство, натянутое на многочлен $1+2t+3t^2+...+(n+1)t^n$; 4) подпространство всех нечетных многочленов $M^n[t]$.

4.5. 1) подпространство скалярных матриц; 2) подпространство кососимметрических матриц; 3) подпространство симметрических матриц; 4) подпространство нижних треугольных матриц с нулевой главной диагональю.

4.6. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0;0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0;0;1;1)$, $\frac{1}{2}(1;-1;-1;1)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(-2;1;2;1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(3;1;2;1)$.

4.7. 1) $g=(5;2;-9;-8)$, $h=(9;-5;3;1)$; 2) $g=(0;-3;5;2)$, $h=(2;-2;-2;2)$; 3) $g=(1;-1;-1;5)$, $h=(3;0;-2;-1)$.

4.8. 1) $g=(1;2;-5;1)$, $h=(-4;-2;0;8)$; 2) $g=(0;-3;5;2)$, $h=(2;-2;-2;2)$; 3) $g=(1;-1;-1;5)$, $h=(3;0;-2;-1)$.

4.9. 1) $g(t)=-2+t+t^4$, $h=2+4t+6t^2+8t^3$; 2) $g(t)=3+5t^2-t^4$, $h=3t+3t^3$; 3) $g(t)=6t^2-4t^4$, $h=2-2t^2-3t^4$.

4.10. 1) $\sqrt{14}$; 2) 2.

4.11. 1) 60^0; 2) 30^0.

4.12. 45^0. Найти минимум углов векторов плоскости с их ортогональными проекциями на первую плоскость.

Глава III. § 5.

5.3. 1) $\Gamma_e=\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ 1-i & 3\end{pmatrix}$, а) $\Gamma_f=\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 3\end{pmatrix}$, б) $\Gamma_f=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; 2) $\Gamma_e=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ i & 2 & 2+i\\ 0 & 2-i & 6\end{pmatrix}$,

а) $\Gamma_f=\begin{pmatrix}3 & 1-2i & 2+i\\ 1+2i & 3 & 2+i\\ 2-i & 2-i & 6\end{pmatrix}$, б) $\Gamma_f=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5.4. 1) $\Gamma_e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $(x,y)=1+3i$; 2) $\Gamma_e=\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $(x,y)=7i$.

5.6. 1) $\frac{1}{2}(1+i;-1+i)$; 2) $\frac{1}{2}(1-i;1;-i)$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{5}}(0;1;-5i)$.

5.7. 1) $(11-3i;1;-6+i)$; 2) $(4+3i;16+8i;8+3i)$.

5.8. 1) $(2;1;-i)$, $(1+i;-1;-2+i)$, $(-1+i;4-i;-1+2i)$; 2) $(0;1-i;2)$, $(1;1+i;-i)$.

5.9. $g=(2-i;-1;i)$, $h=(-2+i;i;-1+5i)$.

5.10. 1) $g=(2+i;1-9i;4+3i)$, $h=(-2-i;-1+2i;3+4i)$; 2) $g=(3+i;-4+2i;-1+3i)$, $h=(1-i;-2i;1+i)$; 3) $g=(0;i;0;-1)$, $h=(3-i;1+i;2;1-i)$.

Глава IV. § 1.

1.2. 1) $A_e=\begin{pmatrix}2&-11&6\\1&-7&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$; 2) $A_e=\begin{pmatrix}-2&11/3&5/3\\-4&13/3&10/3\\2&-5/3&-5/3\end{pmatrix}$.

1.3. 1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, если положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный угол во второй; 3) $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_3&a_2b_1&a_2b_3\\a_1b_2&a_1b_4&a_2b_2&a_2b_4\\a_3b_1&a_3b_3&a_4b_1&a_4b_3\\a_3b_2&a_3b_4&a_4b_2&a_4b_4\end{pmatrix}$,

где $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&2&0&\dots&0\\0&0&0&3&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&n\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$.

1.4. 1) а) $\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}1/2&3/2&0\\3/2&-1/2&3\\1/2&1/2&1\end{pmatrix}$; 2) а) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}-1/2&0&3/2\\1/2&1&-1/2\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}$;

3) а) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

1.5. 1) а) $A_e=\begin{pmatrix}2&-11&6\\1&-7&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$, б) $A_f=\begin{pmatrix}1&3&0\\-2&-8&1\\-1&-5&2\end{pmatrix}$; 2) а) $A_e=\begin{pmatrix}-2&11/3&5/3\\-4&13/3&10/3\\2&-5/3&-5/3\end{pmatrix}$,

б) $A_f=\begin{pmatrix}-10/3&-7&3\\5/3&3&-2\\1/3&2&1\end{pmatrix}$; 3) а) $A_e=\begin{pmatrix}5&-20&33\\7&-24&38\\0&0&0\end{pmatrix}$, б) $A_f=\begin{pmatrix}-5&-10&-7\\6&13&-10\\17&36&-27\end{pmatrix}$.

1.6. 1) $\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1+i\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2i\end{pmatrix}$.

1.7. 1) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\cdot 2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot 3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & h & h^2 & \dots & h^{n-1}\\ 0 & 0 & 2 & 3ht & \dots & C_n^1 h^{n-2} t\\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 & \dots & C_n^2 h^{n-3} t^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^{n-1} t^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$;

4) $\operatorname{diag}\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots;\frac{1}{n+1}\right)$.

1.8. 1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

1.9. 1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-6 & -9 & -3\\ 8 & 12 & -4\\ 10 & 15 & -5\end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 4 & 6 & -8\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

1.10. 1) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 8\\ 4 & -7 & 4\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

1.11. 1) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Глава IV. § 2.

2.1. 1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

2.2. $\operatorname{diag}(1,2,3)$.

2.3. 1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}20 & -5 & 15\\ -16 & 4 & -12\\ 24 & -6 & 18\end{pmatrix}$.

2.4. 1) $\begin{pmatrix}-5 & -12\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 4 & 5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

2.5. 1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -9\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -12 & 7\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

2.6. 1) $\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\operatorname{diag}(-1, 1+i, 1-i)$.

2.7. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; 4, 5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

порядка $n+1$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

2.8. $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

2.9. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $c(1;1;-1)$ $c \neq 0$; 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $c_1(1;2;0) + c_2(0;0;1)$ $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

2.10. $\{0\}$, V, $\langle(2;2;-1)\rangle$, $U = \langle(1;1;0), (1;0;-1)\rangle$, $\langle(2;2;-1), a\rangle$, $\langle a\rangle$, где $a \in U$.

2.11. 1) $\lambda_1 = 1$, $\langle(1;1;1)\rangle$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\langle(1;1;0), (1;0;-1)\rangle$; 2) $\lambda_1 = 3$, $\langle(1;2;2)\rangle$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\langle(1;1;0), (1;0;-1)\rangle$.

Глава IV. § 3.

3.1. 1) Образ – плоскость $(x,a) = 0$, ядро – прямая $[x,a] = 0$; 2) если $(a,b) = 0$, то образ – прямая $[x,b] = 0$, а ядро – плоскость $(x,a) = 0$, если $(a,b) \neq 0$, то образ – плоскость $(x,a) = 0$, а ядро $[x,b] = 0$.

3.2. 1) $\operatorname{rg}A = 1$, базис образа – $(1;1;1)$, $\operatorname{def}A = 2$, базис ядра – $(1;-1;0)$, $(1;0;-1)$; 2) $\operatorname{rg}A = 2$, базис образа – $(2;1;1)$, $(-1;-2;1)$, $\operatorname{def}A = 1$, базис ядра – $(1;1;1)$; 3) $\operatorname{rg}A = 3$, $\operatorname{def}A = 0$; 4) $\operatorname{rg}A = 2$, базис образа – $(2;1;2)$, $(1;8;1)$, $\operatorname{def}A = 1$, базис ядра – $(0;1;1)$; 5) $\operatorname{rg}A = 2$, базис образа – $(1;2;0)$, $(-3;0;2)$, $\operatorname{def}A = 1$, базис ядра – $(2;1;-3)$.

3.3. В базисе $\{e\}$ координатные столбцы базисных векторов: 1) ядра – $(1\ \ 1\ -1)^T$, $(3\ \ 0\ \ 2)^T$, образа – $(1\ \ 1\ -1)^T$; 2) ядра – $(1\ -1\ \ 1)^T$, образа – $(1\ \ 1\ \ 0)^T$, $(0\ \ 1\ -1)^T$; 3) ядра – $(0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T$, $(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$, образа – $(1\ \ 1\ -3\ -3)^T$, $(1\ -1\ -1\ \ 1)^T$; 4) $\ker A = \{\theta\}$, $\operatorname{im}A = V$, A – изоморфизм.

3.4. $\operatorname{rg}F = 2$.

3.5. Образ – $M^{n-1}[x]$, ядро – $M^{o}[x]$.

3.6. Образ – $M^{n-1}[x]$, ядро – $M^{o}[x]$.

Глава IV. § 4.

4.1. 1) $\operatorname{diag}(1,\lambda^2)$; 2) $\operatorname{diag}(\lambda+1,\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2)$; 3) $\operatorname{diag}(1,\lambda^2+5\lambda)$;

4) $\operatorname{diag}\left(\lambda-1,(\lambda+1)(\lambda-1)^3\right)$; 5) $\operatorname{diag}(1,\lambda,0)$; 6) $\operatorname{diag}\left(1,1,(\lambda-2)^3\right)$.

4.2. 3) $\operatorname{diag}\left(1,\lambda-3,(\lambda-3)^2\right)$.

4.3. 1) , 2) подобны.

4.4. 1) $\lambda^2-4\lambda+4$; 2) $\lambda^2-5\lambda+6$.

4.5. 1) $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&3\\4&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6&3&2\\6&1&1\\-8&0&-1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&3&3\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&3&4\\1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\-1&1&0&6\\-1&0&0&7\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$.

4.6. 1) $\begin{pmatrix}3\cdot 2^{100}-2\cdot 3^{100} & 2\left(3^{100}-2^{100}\right)\\ -3\left(3^{100}-2^{100}\right) & 3^{101}-2^{101}\end{pmatrix}$; 2) $2^{50}\begin{pmatrix}-24&25\\-25&26\end{pmatrix}$; 3) $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7&1\\-1&9\end{pmatrix}$; 4) $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}12&2\\3&13\end{pmatrix}$,

$\pm\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}4e-3&2-2e\\6e-6&4-3e\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2e^2&-e^2\\e^2&0\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}3+2\pi in&-15&6\\1&-5+2\pi in&2\\1&-5&2+2\pi in\end{pmatrix}$, где

$i=\sqrt{-1}$, n – целое; 8) $\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Глава IV. § 5.

5.1. $\begin{pmatrix}3&6\\-1&-3\end{pmatrix}$.

5.2. $\begin{pmatrix}-36&-37&-15\\30&30&14\\26&27&9\end{pmatrix}$.

5.3. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4. B^* – проектирование на биссектрису второй и четвертой четверти параллельно оси Oy.

5.6. $A^*(y)=(y,b)a$.

5.7. $D^*(f)=-f'$, $C^*(f)=x^3 f''+6x^2 f'+6xf$.

5.8. $\mathrm{P}^*(X)=A^T X$.

5.9. 1) $\operatorname{diag}(0;9;-6)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{18}}(4;-1;1)$, $f_2=\frac{1}{3}(1;2;-2)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;1)$;

2) $\operatorname{diag}(12;-2;-2)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1;2;-3)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3;0;1)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{35}}(1;-5;-3)$;

3) $\operatorname{diag}(-1;-4;4)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\sqrt{2};-1;1\right)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;1)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1;\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$;

4) $\operatorname{diag}(9;3;3)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1;-1;2)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;1)$;

5) $\operatorname{diag}(15;-3;-3)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{18}}(1;1;4)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0)$, $f_3=\frac{1}{3}(2;2;-1)$;

7) $\operatorname{diag}(1;1;-1;-1)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;0;1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;1;0)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;0;-1)$,

$f_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;-1;0)$;

8) $\operatorname{diag}(3;-1;-1;-1)$, $f_1=\frac{1}{2}(1;1;1;1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0;0)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(1;1;-2;0)$,

$f_4=\frac{1}{\sqrt{10}}(1;1;1;-3)$;

9) $\operatorname{diag}(5;-1)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i;1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1+i;-2)$;

10) $\operatorname{diag}(2;4)$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-i)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;i)$.

5.10. 1) $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$, $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1)$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

$e_1=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left(1;-i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left(i\left(1-\sqrt{2}\right);-1\right)$.

5.11. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $f_2 = (0;0;1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0)$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $f_2 = (0;0;1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0)$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;1;1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2;-1;-1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;-1)$;

4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3;1;-1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}(2;3;-3)$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4} & \sqrt{\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}} & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}\left(1-\sqrt{2};1;-1\right)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0;1;1)$,

$f_3 = -\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}\left(2;1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$;

6) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2};0;-1\right)$, $f_2 = (0;1;0)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1;0;\sqrt{2}\right)$.

Глава V. § 1.

1.2. 1) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \\ 11 & 10 & 29 \end{pmatrix}$.

1.3. 1) -43; 2) $1-19i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов, В. А. Сборник задач по алгебре [Текст]: учеб. для вузов. / В. А. Артамонов, Ю. А. Бахтурин, Э. Б. Винберг [и др.]; под ред. А. И. Кострикина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 464 с.
2. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст]: учеб. пособие / Л. А. Беклимишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров; под ред. Д. В. Беклимишева. 2-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 496 с.
3. Болгов, В. А. Сборник задач по математике для втузов [Текст]: учеб. пособие для втузов. В 4 ч. Ч. 1. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов [и др.]; под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1993. – 480 с.
4. Бутузов, В. Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах [Текст]: учеб. пособие. / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин; под ред. В. Ф. Бутузова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 248 с.
5. Икрамов, Х. Д. Задачник по линейной алгебре [Текст]: учеб. пособие / Х. Д. Икрамов; под ред. В. В. Воеводина. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
6. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: учеб. / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2008 – 400 с.
7. Ким, Г. Д. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи [Текст]: учеб. пособие. В II т., в 2 ч. Т. II, ч. 1. / Г. Д. Ким, Л. В. Крицков. – М.: Зерцало-М, 2003. – 170 с.
8. Рожков, В. И. Сборник задач математических олимпиад [Текст] / В. И. Рожков, Г. Д. Курдеванидзе, Н. Г. Панфилов. – М.: Изд-во УДН, 1987. – 28 с.
9. Садовничий, В. А. Задачи студенческих олимпиад по математике [Текст] / В. А. Садовничий, А. С. Подколзин. – М.: Наука. 1978. – 207 с.
10. Садовничий, В. А. Задачи студенческих математических олимпиад [Текст] / В. А. Садовничий, А. А. Григорян, С. В. Конягин. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1987. – 311 с.

Учебное издание

Коновалова Елена Игоревна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л.
Тираж экз. Заказ . Арт. - /2017

Изд-во Самарского университете
443086, Самара, Московское шоссе,34.