МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Арзамасский филиал

Е.В. Баранова,

С.В. Менькова

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Арзамасского филиала ННГУ
для студентов филиала,
обучающихся по направлениям подготовки
050100, 44.03.01 Педагогическое образование
профили Математика, Информатика

Арзамас
2014

УДК 512
ББК 22.1
Б 24

Б 24 Баранова Е.В., Менькова С.В. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. - Часть 1: учебно-методическое пособие. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2014. – 99 с.

Рецензенты:

к.п.н., доцент кафедры "Высшая математика" НГТУ им Р.Е.Алексеева

С.В. Лещева;

к.п.н., доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике Арзамасского филиала ННГУ **С.В. Арюткина**

В пособии излагаются теоретические сведения о методах и способах решения задач элементарной математики. Основные методы проиллюстрированы примерами, к каждому разделу прилагается система заданий, направленная на формирование умений решать задачи.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 050100, 44.03.01 «Педагогическое образование», профили «Математика», «Информатика».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии физико-математического факультета
Арзамасского филиала ННГУ,
к.п.н., доцент **Л.Ю. Нестерова**

УДК 512
ББК 22.1

Введение

Основными целями изучения дисциплины «Элементарная математика» являются: систематизация знаний школьного курса математики; раскрытие роли и специфики математического языка и базовых понятий математики; выработка практических навыков решения задач, развитие математической культуры и интуиции.

Процесс изучения дисциплины «Элементарная математика» по данному пособию направлен на формирование компетенций владения основами речевой профессиональной культуры; базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом; культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой, основными методами математических рассуждений; содержанием и методами элементарной математики.

Пособие включает в себя следующие разделы «Арифметика», «Тождественные преобразования», «Уравнения и неравенства», «Тригонометрия».

В начале каждого параграфа кратко изложен теоретический материал (определения, основные теоремы, формулы), знание которого необходимо для решения задач данного раздела, далее рассматриваются методы и приемы решения задач какого-либо вида и разбираются конкретные примеры на использование соответствующих методов. В конце параграфа приводятся задания для аудиторной и самостоятельной работы, а также проверочные работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «050100, 44.03.01 Педагогическое образование
профили Математика, Информатика.

§1 Множество действительных чисел

1. Натуральные числа

Множество чисел, употребляемых при счете, называется множеством натуральных чисел: $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$.

Множество $\boldsymbol{N}$ является бесконечным, имеет наименьший элемент 1 и не имеет наибольшего элемента. Множество натуральных чисел является упорядоченным множеством, т.е. для каждого натурального числа можно указать следующее за ним число.

На множестве натуральных чисел определены операции сложения и умножения, т.е. если даны два натуральных числа a и b, то результатом операции сложения или умножения над этими числами будет также некоторое натуральное число.

2. Признаки делимости натуральных чисел

Разделить натуральное число a на натуральное число b - значит найти натуральное число q такое, что $a=qb$.

Справедливы *утверждения:*

а) если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма их делится на это число;

б) если один из сомножителей делится на какое-либо число, то и произведение их делится на это число.

Признак делимости на 2: Чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была четной.

Признак делимости на 3: Чтобы данное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Признак делимости на 4: Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 5: Чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была либо 0, либо 5.

Признак делимости на 9: Чтобы данное число делилось на 9 , необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Признак делимости на 10: Числа, оканчивающиеся на 0, делятся на 10.

Признак делимости на 25: Число делится 25, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 25.

Определение. Натуральное число называется простым, если оно не имеет делителей, кроме единицы и самого себя. Натуральное число, имеющее более, чем два делителя называется составным. Натуральное число 1 принято не относить ни к простым, ни к составным числам.

Любое составное число можно разложить на простые множители, причем единственным образом. Это можно сделать следующим образом: пользуясь признаками делимости подбирать наименьшее простое число, на которое делится данное число, записывать его справа от черты, а результат деления под самим числом, и т.д.

Пример. $78540 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$

3. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Определение. **Наибольшим общим делителем (НОД)** двух натуральных чисел называется наибольший из общих делителей этих чисел.

Пример.

1) Найти НОД (24, 60). Сначала находим все делители этих чисел: 24:$\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, 60: $\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$. Выделим общие делители чисел 24 и 60: $\{1,2,3,4,6,12\}$. Наибольший из этих элементов является наибольшим общим делителем данных чисел, т.е. НОД(24,60) = 12.

2) Найти НОД (234, 1080, 8100).

$8100 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, $234=2\cdot 3^2\cdot 13$, НОД (234,1080,8100)=$2\cdot 3^2$= 18.

Определение. **Наименьшим общим кратным (НОК)** двух натуральных чисел называется наименьшее число из их общих кратных.

Пример.

1) Найти НОК (12, 18). Составим множества чисел, кратных этим числам: 12:$\{12,24,36,60,\ldots\}$, 18:$\{18,36,54,72,\ldots\}$. Выделим числа, являющиеся общими кратными 12 и 18:$\{36,72,108,\ldots\}$. Наименьший элемент этого множества является наименьшим общим кратным чисел 12 и 18, т.е. НОК (12, 18) = 36.

2) Найти НОК (234, 1080, 8100).

$8100 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, $234=2\cdot 3^2\cdot 13$,

НОК (234, 1080, 8100) = $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13$ = 210600.

Замечание: НОД и НОК чисел A и B удовлетворяют равенству: **НОД(*A*,*B*)·НОК(*A*,*B*)=*A*·*B*.**

Определение. Числа A и B называются **взаимно простыми**, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы. Например, 3 и 14; 16 и 25.

4. Целые числа

Определение. Объединение множеств натуральных, им противоположных чисел и нуля образует новое числовое множество–**множество целых чисел Z**.

Теорема. Если a – любое целое число и b – любое натуральное число, то всегда найдется единственная пара целых чисел q и r таких, что $a=bq+r$, причем $0 \le r < b$.

При этом число a называется делимым, b - делителем, q - частным, r - остатком, и говорят, что число a делится на b с остатком r.

Если $r = 0$, то число a делится на b без остатка.

Следствия теоремы:

1. Любое четное число a может быть записано в виде $a=2q$, где q - некоторое целое число.
2. Любое нечетное число a может быть записано в виде $a=2q+1$, где q - некоторое целое число.
3. Любое целое число a, делящееся нацело на некоторое натуральное число $к$, может быть записано в виде $a=кq$, где q некоторое целое число.
4. Любое целое число a, не делящееся нацело на некоторое натуральное число $к$, может быть записано в виде $a=кq+r$, где r – одно из чисел $1,2,\ldots,(к-1)$, а q-некоторое целое число.

5. Рациональные числа

Определение. **Рациональным числом *r*** называется число, представимое в виде $r=p/q$, где p - целое, а q - натуральное число. Все рациональные числа образуют **множество рациональных чисел Q**.

Если p делится на q нацело, то рациональное число r называется целым, в противном случае – дробным.

Свойства рациональных чисел:

1. Любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Если знаменатель обыкновенной дроби можно представить в виде произведения только двоек и пятерок, то десятичная дробь будет конечной, в противном случае – бесконечной периодической.

Пример 1. 1) $\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 0{,}15$; 2) $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571... = 0,(428571)$

2. Любую десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Пример 2.

1) Представить бесконечную периодическую дробь 0, (31) в виде обыкновенной:
Обозначим 0, (31)=x, умножим это число на 100 (чтобы после запятой стояло тоже выражение) 31,(31)=100x. Теперь вычтем почленно из второго равенства первое и получим 99x=31, откуда $x = \frac{31}{99}$.

2) Представить бесконечную периодическую дробь 4,2(3) в виде обыкновенной:
4,2(3)=x, умножим это число на 10 и на 100 (так, чтобы после запятой стояли одинаковые выражения) 42,(3)=10x, 423,(3)=100x. Вычтем почленно из второго

равенства первое и получим 90x=381, откуда $x=\frac{381}{90}=4\frac{21}{90}=4\frac{7}{30}$. Или: $4,2(3)=4+0,2(3)=4+\frac{21}{90}=4\frac{7}{30}$.

6. Действительные числа

Нетрудно заметить, что решение уравнения $x^2=2$ не может быть найдено на множестве рациональных чисел, т.е. числа $\sqrt{2}$ в множестве Q не существует, хотя реально такое число существует, т.к. длина диагонали квадрата со стороной, равной 1, будет выражаться числом $\sqrt{2}$. Если это число представить в виде десятичной дроби, то получится бесконечная непериодическая дробь.

<u>*Определение*</u> Число, которое представляется в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называется **иррациональным**. Например, $\sqrt[3]{7}$, e, π, $log_2 5$ – иррациональные числа.

<u>*Определение*</u> Множество $\boldsymbol{R}$, являющееся объединением рациональных и иррациональных чисел, называется **множеством действительных чисел**.

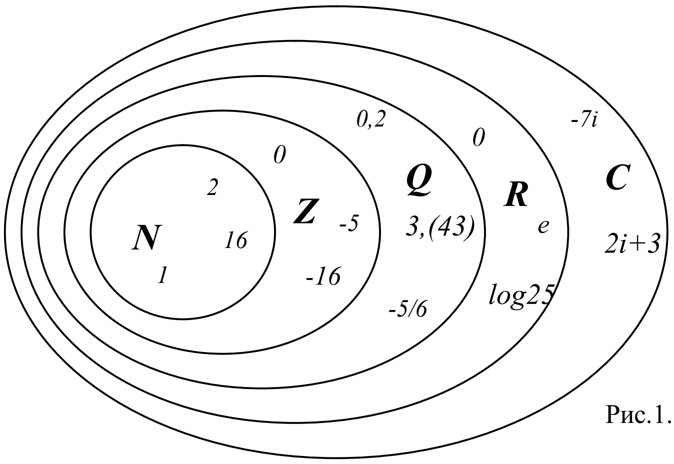


Рис.1.

Задания для самостоятельной работы

1. Представьте числа $\frac{7}{8}$; $-\frac{27}{11}$ *и* $\frac{301}{250}$ в виде десятичных дробей.
2. Вычислите:

   а) $3,5(72)-0,(2)$; б) $\dfrac{0,23(7)+\dfrac{43}{450}}{0,5(61)-\dfrac{113}{495}}$; в) $\dfrac{(\dfrac{2}{3}+0,(3)):0,25}{0,12(3):0,0925}+12,5\cdot 0,32$.
3. Найти x, если $\dfrac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)}\cdot x=10$.
4. Запишите общий вид чисел: а) кратных 4; б) кратных 23; в) дающих при делении на 4 остаток 2; г) дающих при делении на 13 остаток 5.
5. Напишите наибольшее пятизначное число, кратное 9, такое, что первая его цифра была 3, и все цифры были бы различны.

6. Делится ли число 2613456 на 36 ?
7. Найти сумму остатков от деления данного числа на 2, 3, 4, 5, 9, 10 и 25:
   а) 324144603; б) 513414513.
8. Доказать, что: а) $10^{37}-1$ и $10^{33}+8$ делятся на 3 и на 9,
   б) 9^n-1 делится на 2 для любого натурального n.
9. Докажите, что сумма любых двух последовательных нечетных чисел кратна 4.
10. Докажите, что числа, запись которых состоит из трех одинаковых цифр, делятся на 3 и на 37.
11. Докажите, что если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.
12. Сократите дроби: $a)\ \dfrac{37373737}{81818181}$; $б)\ \dfrac{609609609}{201201201}$.
13. Какой цифрой оканчивается:
    а) сумма $26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 + 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54$;
    б) произведение всех натуральных чисел от 7 до 81 включительно;
    в) сумма всех трехзначных чисел?
14. Каков будет остаток от деления выражения $7778 \cdot 7779$ на 7 ?
15. Доказать, что при любом натуральном n дробь $\dfrac{14n+3}{21n+4}$ несократима.
16. Найти положительное двузначное число, которое в 9 раз больше цифры его единиц.
17. Число десятков двузначного числа на 5 больше его единиц, произведение же этого числа на сумму его цифр равно 648. Найти это число.
18. Доказать, что $\forall n \in N \quad 1+2+3+\ldots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$.
19. Ученикам двух пятых классов выдали 469 учебников. Каждый получил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников и сколько учебников получил каждый из них?
20. Найти: а) НОД (60; 90; 840); б) НОД (1176; 4620);в) НОК (90; 84; 135);
    г) НОК (520; 1050).
21. Найти a, если НОК (60; a) = 2100.
22. Найти $c \le 450$, если НОД (c; 150) = 75.
23. На пост председателя комитета городской думы претендовали кандидаты А и Б. В голосовании приняли участие 198 человек, причем голоса распределились между кандидатами в отношении 8:3. На сколько больше голосов получил победитель?
24. Комната с размерами 4 м и 6 м составляет 3/4 площади всей квартиры. Какова площадь квартиры?
25. В школьной библиотеке 210 учебников математики, что составляет 15% всего библиотечного фонда. Сколько всего книг в библиотечном фонде?
26. Банк за год начисляет 20% на вложенную сумму. Какую сумму вкладчик внес на счет, если через год на счету оказалось 1920 рублей?

27. Определите стоимость товара до уценки, если после снижения цены на 30% он стал стоить 56 рублей.
28. В магазине продали 126 булочек; это оказалось на 10% меньше, чем было продано батонов. Сколько продали батонов?
29. В школе два девятых класса. В 9 «а» учатся 52% всех девятиклассников, а в 9 «б» - 24 человека. Сколько всего учеников в девятых классах.
30. Утром было продано 28% товара, днем - в два раза больше, а вечером – оставшиеся 32 кг. Сколько всего килограммов товара было продано?
31. Два года подряд население города увеличивалось ежегодно на 20%. На сколько процентов увеличилось население города за эти два года?

Проверочная работа

Вариант 1

1. Дано множество чисел:

$$0{,}00(7);\quad \frac{25}{5};\quad \sqrt{1-\sqrt{3}};\quad -1{,}3;\quad 0;\quad \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2;\quad \pi;\quad \log_2 8;\quad \left(\frac{7}{3}\right)^0$$

Подчеркните ровной линией натуральные числа и волнистой рациональные числа.

2. Вычислите $\dfrac{5{,}2(70)+\dfrac{2}{7}}{0{,}1-\dfrac{1}{3}}$.
3. Найдите НОД и НОК для чисел 350 и 1260.
4. Найдите сумму остатков от деления числа 126450747 на 2,3,4,5,9,10 и 25.
5. Напишите наибольшее пятизначное число, кратное 4, и чтобы все цифры были различны.
6. По договору банк начислял на вклад ежегодно 10%. На сколько процентов увеличился вклад за два года?

Вариант 2

1. Дано множество чисел:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3};\quad 0{,}0(1);\quad 3-\sqrt{3};\quad \ell;\quad \frac{0}{4};\quad 5i+2;\quad \sqrt[3]{-27};\quad \frac{1}{4}\lg 100;\quad -\frac{8}{2}$$

Подчеркните ровной линией целые числа и волнистой действительные числа.

2. Вычислите $\dfrac{1\dfrac{2}{3}-5{,}3}{0{,}1(1)}:\dfrac{1}{2}$.
3. Найдите НОД и НОК для чисел 1020 и 198.
4. Найдите сумму остатков от деления числа 510701337 на 2,3,4,5,9,10 и 25.

5. Напишите наибольшее пятизначное число, кратное 3, и чтобы все цифры были различны.
6. Два квартала подряд предприятие увеличивало объем выпуска продукции на 30% ежеквартально. На сколько процентов увеличился объем выпуска продукции за эти два квартала?

Вариант 3

1. Дано множество чисел:

   $\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2$; $5,(5)$; $0,1728...$; $\lg 20$; $2^{\sqrt{36}}$; $-\frac{1}{8}$; $i+1$; $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}$; 1^0

   Подчеркните ровной линией числа, не являющиеся рациональными и волнистой линией действительные числа.
2. Вычислите $\dfrac{\frac{1}{7}}{3,1(20)}\cdot\left(0,53-\frac{5}{6}\right)$.
3. Найдите НОД и НОК для чисел 945 и 4530.
4. Найдите сумму остатков от деления числа 373709628 на 2,3,4,5,9,10 и 25.
5. Напишите наименьшее пятизначное число, кратное 4, и чтобы все цифры были различны.
6. Количество зайцев в заповеднике уменьшалось в течении двух лет на 20% ежегодно. На сколько процентов уменьшилось количество зайцев в заповеднике за эти два года?

Вариант 4

1. Дано множество чисел:

   $\log_2 49$; $\left(\sqrt[3]{7,5}\right)^3$; $0,(18)$; $(-5)^{\sqrt{9}}$; $\frac{11}{37}$; $3i$; $\frac{1}{\pi}$; $-101,0$; $\left(\sqrt{2}+1\right)^0$

   Подчеркните ровной линией целые числа и волнистой рациональные числа.
2. Вычислите $\dfrac{5,31-8\frac{1}{8}}{0,6+1,2(30)}$.
3. Найдите НОД и НОК для чисел 2475 и 3630.
4. Найдите сумму остатков от деления числа 150572844 на 2,3,4,5,9,10 и 25.
5. Напишите наименьшее пятизначное число, кратное 3, и чтобы все цифры были различны.
6. Два месяца подряд количество туристов, направляющихся в опасные регионы, уменьшалось на 40% ежемесячно. На сколько процентов уменьшилось количество туристов за эти два месяца?

§2. Тождественные преобразования выражений

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений

Среди аналитических выражений, рассматриваемых в элементарной математике, различают алгебраические и трансцендентные.

Определение. **Алгебраическим выражением** называется выражение, получающееся из чисел и некоторых букв с помощью арифметических операций и возведения в степень с рациональным показателем.

Определение. Алгебраическое выражение называется **рациональным**, если оно содержит только операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел и переменных. Алгебраическое выражение называется **иррациональным**, если оно содержит операцию извлечения корня из переменной или операцию возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом. Например:

$\frac{a}{в}$; $\frac{3ax^2+\sqrt[3]{3}вx}{4{,}5x+a+в}$ называют рациональными выражениями; $\sqrt{x^2+1}$; $\sqrt[3]{(5y-7)^2}+4ay$ называют иррациональными выражениями.

К **трансцендентным** выражениям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические выражения.

Определение. Два выражения называют **тождественно равными**, если при всех допустимых для них значениях переменных соответственные значения этих выражений равны. *Например*:

$(x+1)^2$ *и* x^2+2x+1 тождественно равны при всех *x;*

$1+a+2{,}3-5a$ *и* $3{,}3-4a$ тождественно равны при всех *a;*

$\frac{5x^3}{4x^2}$ *и* $\frac{5x}{4}$ тождественно равны при всех *x*, кроме *x*=0;

$\frac{y-1}{y^2-1}$ *и* $\frac{1}{y+1}$ тождественно равны при всех *y*, кроме *y*=1.

Определение. Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением, называют **тождественным преобразованием** выражения.

При выполнении тождественных преобразований выражения может изменяться его область определения. Так, приводя подобные члены при упрощении выражения $y^2-5y+2+\sqrt{y}-\sqrt{y}=y^2-5y+2$, мы расширяем его область определения от $y\ge 0$ до любого значения *y*. Поэтому, выполняя преобразования данного выражения и получив в результате другое выражение, нужно всегда уметь ответить на вопрос, на каком множестве заданное выражение тождественно равно полученному.

Определение. Равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных, называют **тождеством**. *Например*: $n+(-n)=0$,

$(a+в)+c=a+(в+c)$, $(x-y)^3=(x-y)^2(x-y)$, $a^2-в^2=(a-в)(a+в)$.

Напомним основные тождества, необходимые для выполнения тождественных преобразований.

Формулы сокращенного умножения

$(x\pm y)^1=x\pm y$	1 1
$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$	1 2 1
$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$	1 3 3 1
$(x\pm y)^4=x^4\pm 4x^3y+6x^2y^2\pm 4xy^3+y^4$	1 4 6 4 1
$(x\pm y)^5=x^5\pm 5x^4y+10x^3y^2\pm 10x^2y^3+5xy^4\pm y^5$	1 5 10 10 5 1

………………………………………………………………

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}xy^{n-1}+y^n.$$

Примечание: Справа от формул записаны коэффициенты разложения соответствующего многочлена. Данную запись называют треугольником паскаля. Последнюю формулу называют биномом Ньютона.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, $x^4+y^4=(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$,

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3$,

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$,

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

Свойства степеней

Свойства арифметических корней

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, *где* $(a\ge 0)$

$\sqrt[m\cdot к]{a^{n\cdot к}}=\sqrt[m]{a^n}$ $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^к=\sqrt[m]{a^{n\cdot к}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad где\ a \rangle 0$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(ав)^n = a^n \cdot в^n, \qquad \left(\dfrac{a}{в}\right)^n = \dfrac{a^n}{в^n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Свойства логарифмов

$$\log_a b = c, \quad a^c = b, \quad a \neq 1, \ a > 0, b > 0 \qquad a^{\log_a b} = b$$

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \qquad \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^p = p \log_a b, \qquad \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Пример 1. Упростить выражение $f(x) = \dfrac{9x^2 + 12x + 3}{x+1}$.

Решение.

$$9x^2 + 12x + 3 = 0, \quad x_1 = -1, \ x_2 = -\frac{1}{3},$$

$$9x^2 + 12x + 3 = 9(x+1)(x + \frac{1}{3}) = 3(x+1)(3x+1),$$

$$\frac{9x^2 + 12x + 3}{x+1} = \frac{3(x+1)(3x+1)}{x+1} = 3(3x+1).$$

Пример 2. Разложить на множители $2a^2 + ab - b^2$.

Решение. *1-й способ.* Применим метод группировки:

$$2a^2 + ab - b^2 = 2a^2 + 2ab - ab - b^2 = (2\text{a}^2 + 2ab) - (ab + b^2) =$$
$$2a(a+b) - b(a+b) = (a+b)(2a-b)$$

2-й способ. Найдем корни трехчлена $2a^2 + ab - b^2$ считая *a* переменной:

$$a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot 2\cdot(-b^2)}}{4}=\frac{-b\pm\sqrt{9b^2}}{4}=\frac{-b\pm 3b}{4},$$

$$a_1=\frac{b}{2},\ a_2=-b,$$

тогда $2a^2+ab-b^2=2(a-\frac{b}{2})(a+b)=(2a-b)(a+b)$

Пример 3. Разложить на множители многочлен x^4+x^2-20.

Решение. Обозначим $x^2=y$, тогда

$$x^4+x^2-20=y^2+y-20=(y-4)(y+5)=(x^2-4)(x^2+5)=(x-2)(x+2)(x^2+5).$$

Пример 4. Разложить на множители многочлен x^4-10x^2+169.

Решение. Если сделаем замену $x^2=y$, получим квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней. Поэтому применим прием группировки и выделения полного квадрата:

$$x^4-10x^2+169=(x^4+169)-10x^2=\left[(x^4+26x^2+169)-26x^2\right]-10x^2=$$

$$(x^2+13)^2-(6x)^2=(x^2-6x+13)(x^2+6x+13).$$

Пример 5. Найти $f(x^2)-f(x-3)$, если $f(x)=\frac{2x+1}{4-x}$.

Решение.

$$f(x^2)=\frac{2x^2+1}{4-x^2},\quad f(x-3)=\frac{2(x-3)+1}{4-(x-3)}=\frac{2x-5}{7-x},$$

$$f(x^2)-f(x-3)=\frac{2x^2+1}{4-x^2}-\frac{2x-5}{7-x}=\frac{(2x^2+1)(7-x)-(2x-5)(4-x^2)}{(4-x^2)(7-x)}=$$

$$\frac{14x^2-2x^3+7-x-8x+2x^3+20-5x^2}{(4-x^2)(7-x)}=\frac{9x^2-9x+27}{(4-x^2)(7-x)}.$$

Пример 6. Упростить $\sqrt[8]{(2-\sqrt{7})^4}$.

Решение. $\sqrt[8]{(2-\sqrt{7})^4}=\sqrt{\left|2-\sqrt{7}\right|}=\sqrt{7}-2$, *т.к.* $2-\sqrt{7}\langle 0$.

Пример 7. Упростить $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

Решение.

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8+2\cdot 2\sqrt{2}+1}}} =$$
$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}} =$$
$$\sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}} = \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} =$$
$$\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}} = \sqrt{25+2\cdot 5\cdot 3\sqrt{2}+18} = \sqrt{(5+3\sqrt{2})^2} =$$
$$5+3\sqrt{2}.$$

Пример 8. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})}{(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3})\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} =$$
$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt[4]{7^3}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{7^2}+\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3^3})}{4} = \frac{\sqrt[4]{1372}+\sqrt[4]{588}+\sqrt[4]{252}+\sqrt[4]{108}}{4}$$

Пример 9. Вычислить $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$.

<u>Решение.</u> *1-й способ:*

$$49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = 7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25} = 7^{2-\log_7 5} = 7^{\log_7 49-\log_7 5} = 7^{\log_7\frac{49}{5}} = \frac{49}{5} = 9{,}8.$$

2-й способ: $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = \dfrac{49}{49^{\frac{1}{4}\log_7 25}} = \dfrac{49}{7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7 5}} = \dfrac{49}{7^{\log_7 5}} = \dfrac{49}{5} = 9{,}8.$

Пример 10. Вычислить $\log_3 18$, если $\log_3 12 = a$.

<u>Решение.</u> *1-й способ:* $\log_3 18 = \log_3(3^2\cdot 2) = 2+\log_3 2$.

Значит нужно вычислить $\log_3 2$, зная, что $\log_3 12 = a$. Для этого выразим число 2 через числа 3 и 12, пользуясь операциями умножения, деления и возведения в степень:

$$2 = \sqrt{\frac{12}{3}}, \quad \log_3 2 = \log_3\sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{1}{2}(\log_3 12-\log_3 3) = \frac{1}{2}\left(a-1\right)$$
$$\log_3 18 = 2+\frac{a-1}{2} = \frac{a+3}{2}.$$

2-й способ:

$\log_3 18 = 2 + \log_3 2$

Обозначим $\log_3 2 = x$, следовательно $\log_3 18 = 2 + x$

$\log_3 12 = \log_3 3 \cdot 2^2 = 1 + 2\log_3 2 = 1 + 2x = a$,

тогда $x = \dfrac{a-1}{2}$

Задания для самостоятельной работы

1. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $\dfrac{4a^2 - 1}{2a - 1}$ и $2a + 1$

б) $x^2 + 3x - 5 + \sqrt{x} - \sqrt{x}$ и $x^2 + 3x - 5$

в) $\dfrac{16 - y^4}{4 + y^2}$ и $4 - y^2$

г) $\sqrt{x^2}$ и x

д) $|a|$ и $\sqrt{a^2}$

е) $\sqrt[3]{-125x^3y^6}$ и $-5xy^2$

2. Разложите на множители:

а) $y^6 + 1$ б) $x^2 + 2xy + 2yz - z^2$

в) $a^4 + a^2в^2 + в^4$ г) $x^8 + x^4 + 1$

3. Раскройте скобки:

а) $(5x^2 - 4x + 3)^2$ б) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2$

в) $(2a + в)^5$ г) $(m - 2)^6$

4. Сократите дроби:

а) $\dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - x - 2}$ б) $\dfrac{x^3 + 27y^3}{9y^2 + x^2 - 3xy}$

в) $\dfrac{a^2 + 6aв + 8в^2}{a^2 - 4в^2}$ г) $\dfrac{a^2 - 20aв + 100в^2}{a^2 - 15aв + 50в^2}$

д) $\dfrac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 + 8x^2 + 15}$ е) $\dfrac{a^{12} - 2a^6 + 1}{a^{12} - 1}$

5. Найдите $f(x^2) - f(x+2)$, если $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-4}$

6. Упростите выражения:

а) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{4x^3}{1+x^4} - \dfrac{8x^7}{1+x^8}$

б) $\dfrac{a}{a^2-1} + \dfrac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \dfrac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \dfrac{2a^3}{a^4-1}$

в) $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{в+c}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{в+c}} \cdot \left(1 + \dfrac{в^2 + c^2 - a^2}{2вc}\right)$

г) $\left(\dfrac{3a}{a^3 - в^3} \cdot \dfrac{a^2 + в^2 + aв}{a + в} - \dfrac{3}{в - a}\right) : \dfrac{2a + в}{a^2 + 2aв + в^2} \cdot \dfrac{3}{a + в}$

7. Приведите к простейшей форме:

а) $\sqrt[6]{a^9в^{15}}$ б) $\sqrt[10]{\dfrac{a^{16}}{в^2}}$ в) $\sqrt{\sqrt[3]{256a^2в^{14}}}$

8. Упростите выражение: $a)\ (4\sqrt{27}-\sqrt[3]{32})+(\sqrt[3]{108}-3\sqrt{48})$

$б)\ (\sqrt{45}-\sqrt[3]{24})+(\sqrt{80}-\sqrt[3]{81})$

9. Вычислите:

$$a)\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$

$$б)\ \frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$$

10. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

$a)\ \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ $\quad б)\ \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ $\quad в)\ \frac{3}{\sqrt[3]{5}+1}$ $\quad г)\ \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$ $\quad д)\ \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

11. Найдите $\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}$, если $\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}=1$

12. Упростите:

$a)\ \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ $\quad б)\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$в)\ \sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$ $\quad г)\ \sqrt{x^2+4xy+4y^2}-\sqrt{x^2-4xy+4y^2},\quad x,y\geq 0$

13. Упростите выражения:

$$a)\ \frac{a-2\sqrt{ав}+в}{a-в}\cdot\frac{a\sqrt{a}+в\sqrt{в}}{a+в-\sqrt{ав}}$$

$$б)\ \frac{\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{ав^4}-\sqrt[4]{a^4в}-\sqrt[4]{в^5}}{\sqrt{a}-\sqrt{в}}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{в}\right)$$

$$в)\left(\frac{1}{2}x^{0,25}+x^{0,75}\right)^2-x^{1,5}\left(1+x^{-0,5}\right)$$

$$г)\frac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\left(\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{n}{m-\sqrt{mn}}-\frac{m}{\sqrt{mn}+n}\right)$$

$$д)\left(\frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{-1}$$

14. Вычислите:

$a) -\log_8 \log_4 \log_2 16 \quad б)\ 16^{0,25\log_5 5+\log_2 3}$

$в)\ 81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} \quad г)\ \dfrac{7^{1-\log_2 2}}{7^{-\log_{\sqrt{7}} 5}}$

$д)\ \lg 1250,\ \ если\ \lg 2 = 0{,}3010 \quad е)\ \log_{100} 40,\ \ если\ \log_2 5 = a$

15. Упростите : $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1}\cdot \log^2{}_{1/2} \sqrt{a^2-1}}{\log^2{}_a (a^2-1)\cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$

16. Докажите: $\log_{a/b} x = \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_b x - \log_a x}$

Проверочная работа

Вариант 1

1. Укажите все номера рациональных чисел данного множества:

   1) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+1$; 2) $\left(\sqrt{7}\right)^{\log_9 81}$; 3) $\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^9$; 4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{7}}-\dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

2. Сократив дробь $\dfrac{3m^2-2mn-n^2}{6m^2-7mn+n^2}$, вычислите ее значение при $\dfrac{m}{n}=\dfrac{11}{3}$.

3. Найдите $f(x^2)-f(x+20)$, если $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-25}$.

4. Найдите число, если его 30% составляют $(3\sqrt{125}-2\sqrt{45}):\sqrt{5}$.

5. Упростите $\dfrac{\sqrt{a}}{1-a\sqrt{a}}:\dfrac{a+\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}$.

6. Вычислите $3^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5+2\sqrt{2}}}+3^{\log_9\left(2\sqrt{2}-5\right)^2}$.

Вариант 2

1. Укажите все номера рациональных чисел данного множества:

   1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{5}$; 2) $3^{\log_{49} 7}$; 3) $\sqrt[3]{49\sqrt{7}}:7^{-1/6}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

2. Сократив дробь $\dfrac{2a^2+ab-b^2}{4a^2+5ab+b^2}$, вычислите ее значение при $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{2}$.

3. Найдите $f(x+2)-f(x+6)$, если $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-4}$.

4. Найдите число, если его 70% составляют $6+(\sqrt{5}-\sqrt{7}):(\sqrt{7}+\sqrt{5})$.

5. Упростите $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$.

6. Вычислите $4^{\log_2\sqrt{2+\sqrt{7}}}+4^{\log_{16}(2-\sqrt{7})^2}$.

Вариант 3

1. Укажите все номера рациональных чисел данного множества:

 1) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\cdot 2^{1/3}$; 2) $2^{\log_{625}5}$; 3) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; 4) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

2. Сократив дробь $\dfrac{m^2+3mn-4n^2}{m^2-9mn+8n^2}$, вычислите ее значение при $\dfrac{n}{m}=\dfrac{5}{4}$.

3. Найдите $f(x+2)-f(x+8)$, если $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$.

4. Найдите число, если его 10% составляют $(2\sqrt[3]{875}-3\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$.

5. Упростите $\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)$.

6. Вычислите $5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+5^{\log_{25}(2\sqrt{3}-4)^2}$.

Вариант 4

1. Укажите все номера рациональных чисел данного множества:

 1) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[5]{32\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\sqrt{5}$; 4) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_2 8}$.

2. Сократив дробь $\dfrac{3a^2+2ab-b^2}{9a^2+10ab+b^2}$, вычислите ее значение при $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{5}$.

3. Найдите $f(x+4)-f(x+8)$, если $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-6}$.

4. Найдите число, если его 90% составляют $(3\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{40}):4$.

5. Упростите $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{3/2}+ab^{1/2}}-\dfrac{a-b}{a^{1/2}+b^{1/2}}\right):\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$.

6. Вычислите $8^{\log_2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}-2^{\log_4\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$.

2. Тригонометрические выражения и их преобразования

Определение. **Синусом** угла α называется ордината точки P_α, лежащей на единичной окружности ($\sin\alpha = y_\alpha$).

Определение. **Косинусом** угла α называется абсцисса точки $P\alpha$, лежащей на единичной окружности ($\cos\alpha = x_\alpha$).

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

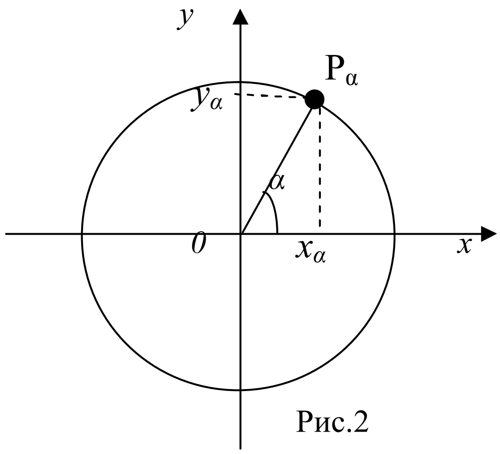


Рис.2

Угол поворота может измеряться в градусах и в радианах. Угол в один радиан – это угол поворота, при котором конец начального радиуса описывает дугу, длина которой равна радиусу.

$$1\,рад = \frac{180^o}{\pi} \approx 57^o, \qquad 1^o = \frac{\pi}{180}\,рад \approx 0{,}017\,рад.$$

Знаки тригонометрических функций:

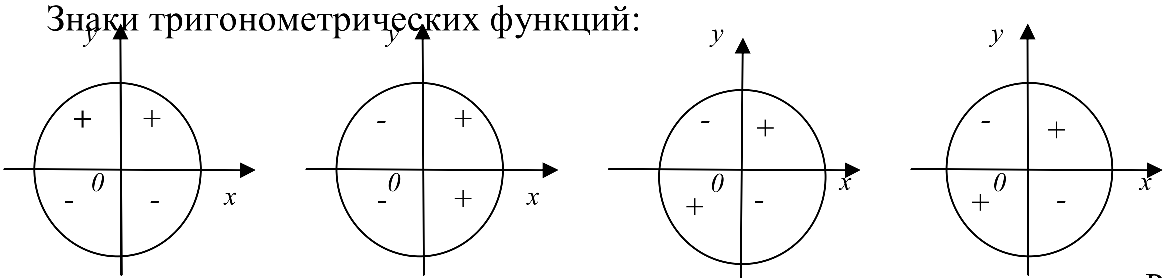


Рис.3

$y=\sin x$ $\quad$ $y=\cos x$ $\quad$ $y=tg\,x$ $\quad$ $y=ctg\,x$

Четность, периодичность:

Функция $y=\cos x$ является четной, остальные тригонометрические функции нечетные, т.е.

$\cos(-x) = \cos x$, $\quad \sin(-x) = -\sin x$,

$tg(-x) = -tg\,x$, $\quad ctg(-x) = -ctg\,x$.

Все тригонометрические функции являются *периодическими*. При этом $T=2\pi$ – основной период функций $y=\cos x$, $y=\sin x$, а $T=\pi$ - основной период функций $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$, т.е.

$\cos(x+2\pi) = \cos(x-2\pi) = \cos x$, $\sin(x+2\pi)= \sin(x-2\pi)=\sin x$,

$tg(x+\pi) = tg(x-\pi) = tg\,x$, $ctg(x+\pi) = ctg(x-\pi) = ctg\,x$.

α / *функция*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Формулы приведения: Для преобразования выражений вида $\cos(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha)$, $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$, $tg(\pi \pm \alpha)$ и т.п. используют следующее правило:

1) считая дугу α дугой первой четверти, находят в какой четверти расположена дуга $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, определяют, какой знак имеет заданная функция в этой четверти;

2) - если дуга α откладывается от горизонтального диаметра $(\pi \pm \alpha,\ 2\pi - \alpha)$, то название функции не меняется;

- если дуга α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ то функции синус, косинус, тангенс, котангенс меняются соответственно на косинус, синус, котангенс, тангенс.

<u>Основные формулы тригонометрии:</u>

1) формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad 1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + ctg^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

2) формулы двойного и половинного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha, \qquad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \qquad ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

3) формулы понижения степени: $cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

4) формулы суммы и разности аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \pm tg\alpha \cdot tg\beta},$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \mp ctg\beta},$$

5) формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad ctg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

6) формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

Пример 1. Упростить выражение: $\dfrac{\sin^3(\alpha-270^o)\cos(360^o-\alpha)}{tg^3(\alpha-90^o)\cos^3(270^o-\alpha)}$.

Решение. Воспользуемся четностью и нечетностью входящих в выражение функций и формулами приведения:

$$\frac{\sin^3(\alpha-270^o)\cos(360^o-\alpha)}{tg^3(\alpha-90^o)\cos^3(270^o-\alpha)}=\frac{-\sin^3(270^o-\alpha)\cos(360^o-\alpha)}{-tg^3(90^o-\alpha)\cos^3(270^o-\alpha)}=\frac{-cos^3\alpha\cdot\cos\alpha}{ctg^3\alpha\cdot(-\sin^3\alpha)}=\frac{\cos^4\alpha}{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}\sin^3\alpha}=\cos\alpha.$$

Исходное выражение тождественно cos α на множестве всех таких α, что $\sin\alpha\neq 0$ и cos α ≠0, откуда α≠πn/2, $n\in Z$.

Пример 2. Доказать тождество $\dfrac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\left(45^o-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Решение.

$$\frac{2\cos\alpha-\sin2\alpha}{2\cos\alpha+\sin2\alpha}=\frac{2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{2\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-\cos(90^o-\alpha)}{1+\cos(90^o-\alpha)}=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(45^o-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(45^o-\frac{\alpha}{2}\right)}=tg^2\left(45^2-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Пример 3. Проверить равенство $\sin 47^o+\sin 61^o-\sin 11^o-\sin 25^o=\cos 7^o$.

Решение.

$$\sin47^o+\sin61^o-\sin11^o-\sin25^o=(\sin47^o+\sin61^o)-(\sin11^o+\sin25^o)=$$

$$=2\sin54^o\cos7^o-2\sin18^o\cos7^o=2\cos7^o(\sin54^o-\sin18^o)=2\cos7^o\cdot2\sin18^o\cdot\cos36^o=$$

$$=\frac{2\cos7^o\cdot2\sin18^o\cdot\cos36^o\cdot\cos18^o}{\cos18^o}=\frac{2\cos7^o\cdot\sin36^o\cdot\cos36^o}{\cos18^o}=\frac{\cos7^o\cdot\sin72^o}{\sin72^o}=\cos7^o$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна:

   а) 0,5; б) 10; в) π/5; г) -9π/2; д) 12π.

2. Найдите радианную меру угла, равного:

а) 135°; б) 210°; в) 36°; г) 300°; д) -225°.

3. Вычислите: $а)\, tg^2 30^o + 2\sin 60^o - tg 45^o + \cos^2 30^o$; $б)\, ctg^2 45^o + \cos 60^o - \sin^2 60^o + \frac{3}{4} ctg^2 60^o$.

$в)\, 3\sin(-90^o) + 2\cos 0^o - 3\sin(-270^o)$; $г)\, 2\cos(-270^o) - \frac{1}{2} tg 180^o - \sin(-90^o)$.

4. Найти значение выражения:

а) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$, если $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$; б) $\sin\alpha + \cos\alpha$, если: $\alpha = -1710^\circ$.

5. Укажите наибольшее и наименьшее значение выражения:

а) $1+2\sin\alpha$, б) $3-4\cos\alpha$, в) $\left|\frac{1}{2}\sin\alpha\right|$, г) $2\cos^2\alpha$.

6. Напишите в порядке возрастания:

а) $\sin 40^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\sin 220^\circ$, $\sin 270^0$; б) $\cos 10^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\cos 180^\circ$, $\sin 90^\circ$.

7. Определите знак произведения: а) $\sin 1100^\circ \cos 1100^\circ \cdot tg 2300^\circ \cdot ctg 3200^\circ$;

б) $-\sin 50^\circ\, tg 170^\circ\, (-\cos(-91^\circ))\cdot ctg(-640^\circ)\cdot\sin 530^\circ$.

8. Может ли для какого-либо угла α выполняться условие:

$а)\, \sin\alpha = -\frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $б)\, \cos\alpha = -\frac{1}{5},\ tg\alpha = -2\sqrt{6}$;

$в)\, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3},\ ctg\alpha = 3$, $г)\, \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\neq 0, b\neq 0$?

9. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

$а)\, \sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$, б) $tg\alpha = -2{,}1$ и $\frac{3\pi}{2}\le\alpha\le\pi$.

10. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что: а) $\alpha = -510^0$; б) $\alpha = 27\pi/4$.

11. Упростите выражение: а) $\sin 160^\circ\cdot\cos 110^\circ + \sin 250^\circ\cdot\cos 340^\circ + tg\, 110^\circ\cdot tg\, 340^\circ$;

б) $tg\, 18^\circ\cdot tg 288^\circ + \sin 32^\circ\cdot\sin 148^\circ - \sin 302^\circ\cdot\sin 122^\circ$;

в) $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; г) $\frac{cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$.

12. Докажите:

$$а)\, \frac{tg\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos(2\pi-\alpha)}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$б)\, \frac{cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot ctg^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha;$$

$$в)\left(\frac{2}{1+tg\alpha}+tg2\alpha\right)\cdot\left(\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\right)=\cos^2\alpha; \qquad г)\, 1-\sin 8\alpha = 2\cos^2(45^o+4\alpha).$$

Проверочная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15}+\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{30}}$;

б) $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+tg(270^\circ+\alpha)+ctg(360^\circ+\alpha)$.

2. Доказать $ctg\,\alpha-\sin 2\alpha=ctg\alpha\cos 2\alpha$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(45^o+\alpha)-\cos(45^o+\alpha)}{\sin(45^o+\alpha)+\cos(45^o+\alpha)}$;

б) $\sin(\pi/2+\alpha)-\cos(\alpha-\pi)+tg(3\pi-\alpha)+ctg(5\pi/2-\alpha)$.

2. Доказать $ctg\,\alpha/2 - tg\,\alpha/2 = 2\,ctg\alpha$.

Вариант 3

1. Упростите выражение:

а) $\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ-\sin 100^\circ$;

б) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\pi)}{ctg(-3{,}5\pi+\alpha)\cdot\cos(1{,}5\pi+\alpha)}$.

2. Доказать: $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$.

Вариант 4

1. Упростите выражение:

а) $\cos 10^\circ-2\cos 50^\circ-\cos 70^\circ$;

б) $\dfrac{\sin(5\pi+\alpha)\cdot\sin(\alpha-2{,}5\pi)}{tg(7\pi+\alpha)\cdot\cos(\alpha-\pi)}$.

2. Доказать: $\sin 2\alpha - tg\,\alpha = tg\,\alpha\cos 2\alpha$.

§3. Построение графиков функций

1. Графики основных элементарных функций

Определение. **Функцией** (или функциональной зависимостью) называется закон, по которому каждому значению независимой переменной x из некоторого множества чисел, называемого **областью определения функции**, ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины y. Совокупность значений, которые принимает зависимая переменная y, называется **областью значений функции**.

Определение. **Графиком** функции называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;y)$, такими, что абсцисса x принимает все значения из области определения, а ордината y равна значению функции в точке x.

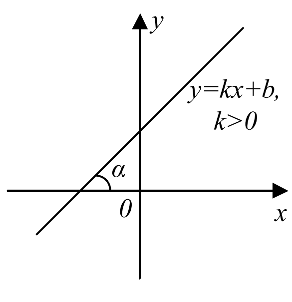
Определение. Функция $f(x)$ называется **четной**, если для любого x из ее области определения выполнено $f(-x)=f(x)$. Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если для любого x из ее области определения выполнено $f(-x)=-f(x)$.

Определение. Функцию $f(x)$ называют **периодической** с периодом $T(T\neq 0)$, если для любого x из ее области определения выполняется $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$.

Определение. Функция $f(x)$ **возрастает** на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, таких, что $x_1>x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. Функция $f(x)$ **убывает** на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, таких, что $x_1>x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

При описании функций принято указывать:

- Область определения функции $D(x)$.



• Область значений функции $E(x)$.
• Является ли функция периодической.
• Является ли функция четной или нечетной.
• Интервалы возрастания и убывания.
• Точки пересечения графика с осями координат.

I. Линейная функция $y = kx + b$

Свойства:

1. $D(x) = R$.
2. $E(x) = R$.
3. Функция непериодическая.
4. При $k \neq 0$, $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной.
   Если $k \neq 0$, $b = 0$, то функция нечетная.
5. При $k=0$, $b=0$ функция является и четной, и нечетной.
6. Если $k > 0$, то функция возрастающая, если $k < 0$, то функция убывающая.
7. При $k \neq 0$ график имеет следующие точки пересечения с осями координат: *A (0;b), B (-b/k; 0)*.

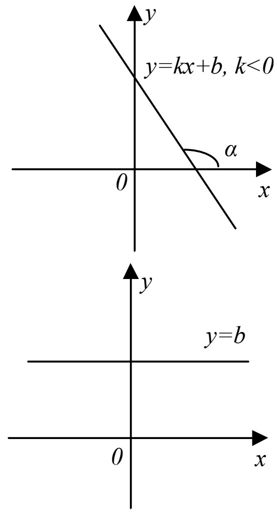


Рис.4

Графиком линейной функции является прямая. Число k называется угловым коэффициентом, причем $k = tg\ \alpha$, где α – угол между прямой и положительным направлением оси Ox. Число b показывает, какой отрезок отсекает прямая от оси Oy.

При $k=0$ функция принимает вид $y=b$. Это постоянная функция, ее графиком является прямая, параллельная оси абсцисс.

II. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Графиком квадратичной функции является парабола.

Свойства:

1. $D(x) = R$.
2. $E(x) = R$.
3. Функция непериодическая.
4. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ - вниз.
5. Ось ординат график функции пересекает в точке $(0;\ c)$.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то график пересекает ось абсцисс в двух точках.

Если $D = 0$, то график имеет с осью абсцисс одну общую точку.

Если $D < 0$, то график не пересекает ось абсцисс.

Абсциссы точек пересечения с осью Ox находятся по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Координаты вершины параболы $(x_0;\ y_0)$ можно находить двумя способами:

1) по формуле $x_o = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y\,(x_0)$,

2) выделив из квадратного трехчлена полный квадрат $ax^2 + \text{в}x + c = a(x - x_o)^2 + y_o$

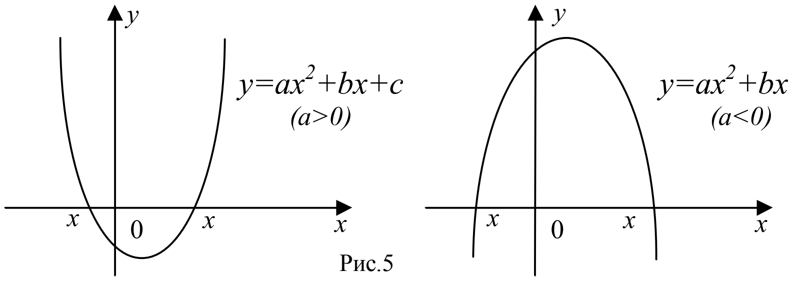


Рис.5

III. Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$

Графиком функции является гипербола.

Свойства:

1. $D(x) = R$, $x \neq 0$.
2. $E(x) = R$, кроме $y = 0$.
3. Функция непериодическая.
4. Функция нечетная.
5. Если $k > 0$, то функция убывает на интервалах $x<0$ и $x>0$,
   если $k < 0$, то функция возрастает на интервалах $x<0$ и $x>0$.
6. График не пересекает оси координат, но неограниченно к ним приближается, т.е. оси являются асимптотами графика.

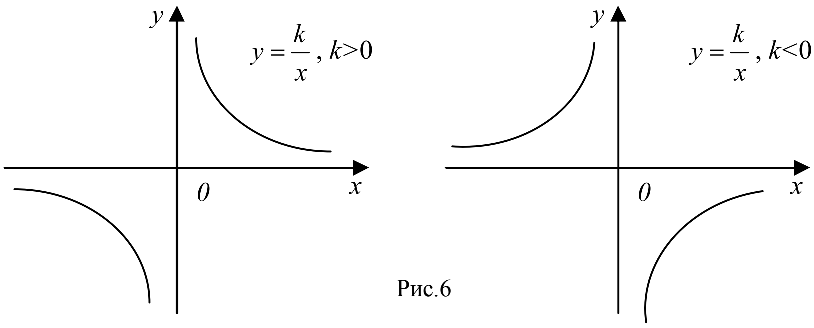


Рис.6

IV. Степенная функция $y = x^{\alpha}$

При рассмотрении степенной функции выделяют четыре случая:

1) Степенная функция с натуральным показателем $y = x^{\mathrm{n}}$:

   1. $D(x) = R$.
   2. Функция непериодическая.
   3. При четном n функция четная, а при нечетном n – нечетная.
   4. Если n – четное число, то на промежутке $x<0$ функция убывает, а на промежутке $x>0$ – возрастает. Если n – нечетное число, то функция возрастает на всей числовой прямой.

5. График проходит через начало координат.

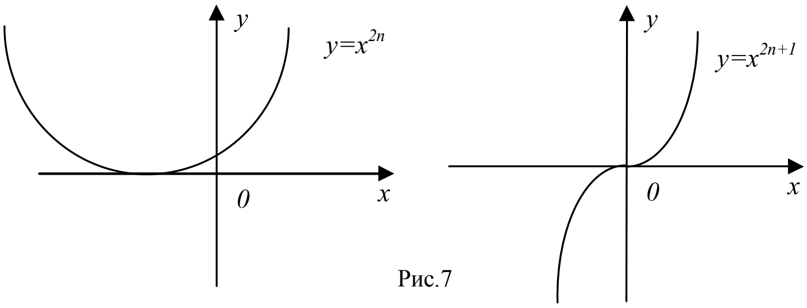


Рис.7

2) Степенная функция с целым отрицательным показателем $y = x^{-n}$:
   1. $D(x) = R,\ x \neq 0$.
   2. Функция непериодическая.
   3. При четном n функция четная, а при нечетном n – нечетная.
   4. Если n – четное число, то на промежутке $x<0$ функция возрастает, а на промежутке $x>0$ – убывает.
      Если n – нечетное число, то функция убывает и при $x<0$ и при $x>0$.
   5. График не пересекает оси координат, оси являются асимптотами графика.

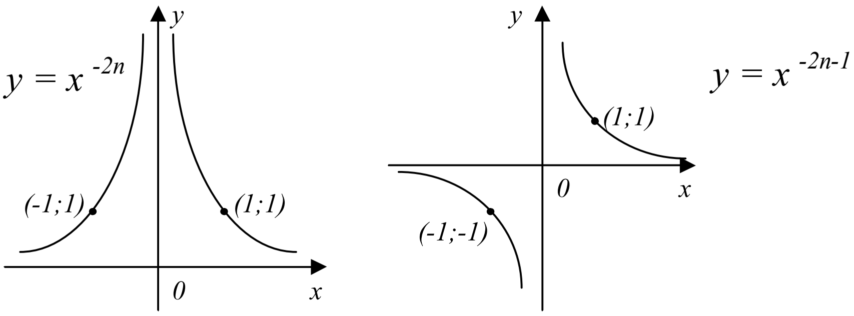


Рис.8

3) Степенная функция с положительным действительным показателем $y = x^{\alpha}$:
   1. $D(x)$: $x \geq 0$.
   2. Функция непериодическая.
   3. Функция не является ни четной, ни нечетной.
   4. Функция возрастает на всей области определения.
   5. График проходит через начало координат.

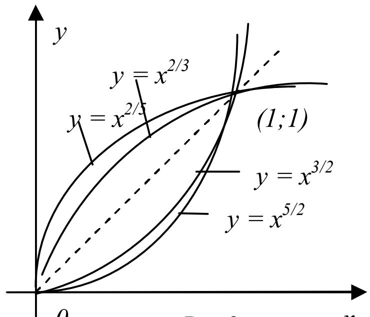


Рис.9

4) Степенная функция с отрицательным действительным показателем $y = x^{\alpha}$:
   1. $D(x)$: $x>0$.
   2. Функция непериодическая.
   3. Функция не является ни четной, ни нечетной.

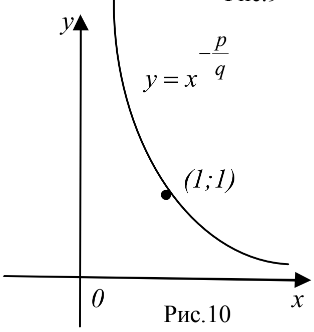


Рис.10

4. Функция убывает на всей области определения.

V. Показательная функция *$y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.*

1. $D(x)= R$.
2. Функция непериодическая.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной.
4. Если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения;
   если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.
5. График не пересекает ось абсцисс, а ось ординат пересекает в точке с координатами (0; 1)

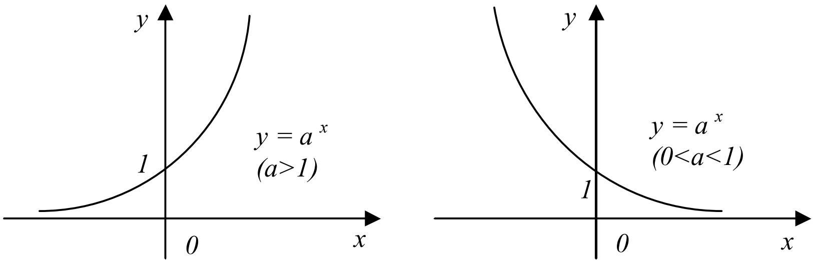


Рис.11

VI. Логарифмическая функция *$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$*

1. $D(x)$: $x > 0$.
2. Функция непериодическая.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной.
4. Если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения;

если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.

5. График не пересекает ось ординат, а ось абсцисс пересекает в точке с координатами (1; 0).

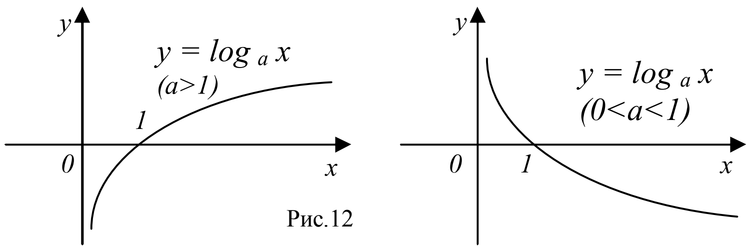


Рис.12

VII. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctgx$

1) $y = \sin x$

1. $D(x)= R$

2.Функция периодическая, $T = 2\pi$.

3. Функция нечетная

4. График проходит через начало координат и пересекает ось абсцисс в точках вида $(\pi n;0)$, $n \in Z$.

2) $y = \cos x$

1. $D(x)= R$

2.Функция периодическая, период $T=2\pi$.

3. Функция четная

4. График пересекает ось ординат в точке (0;1), а ось абсцисс в точках вида $(\pi/2 + \pi n,;0)$, $n \in Z$.

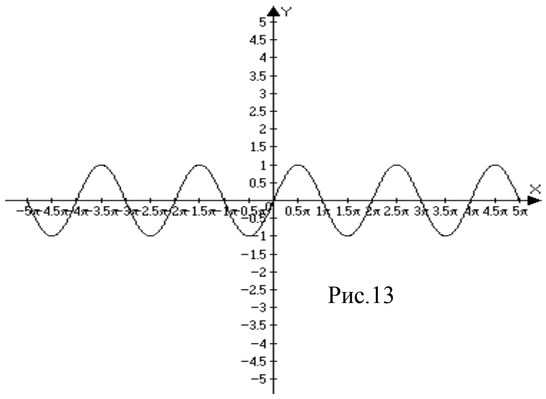


Рис.13

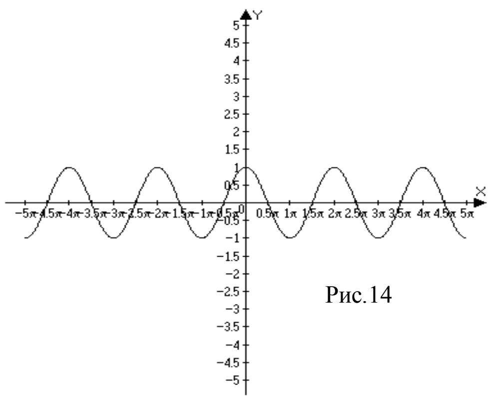


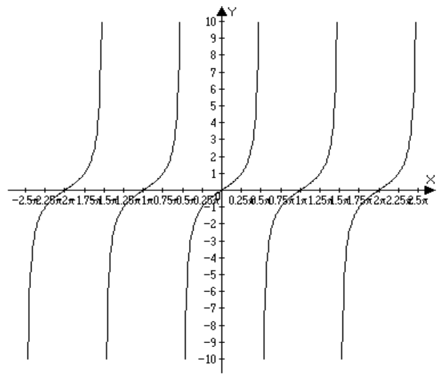
Рис.14

3) *y = tg α*

1. *D(y): x ≠ π/2 + πn, n Є Z*
2. Функция периодическая, основной период *T = π*.
3. Функция нечетная
4. График проходит через начало координат и пересекает ось абсцисс в точках вида (*πn;0), n Є Z.*

4) *y = ctg α*

1. *D(y): x ≠ πn, n Є Z*
2. Функция периодическая, основной период *T = π*.
3. Функция нечетная
4. График не пересекает ось ординат, а ось абсцисс пересекает в точках вида (*π/2+πn;0), n Є Z*



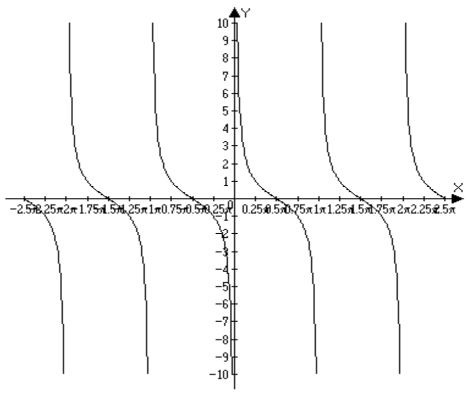


Рис.15 Рис.16

2. Преобразования графиков функций

В ряде случаев график заданной функции можно построить путем преобразования графика некоторой другой, уже известной функции.

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Тогда:

1. График функции $y = f(x) + b$ получается с помощью параллельного переноса данного графика вдоль оси *Oy* на *b* единиц вверх при *b* > 0, и на |*b*| единиц вниз при *b* < 0.

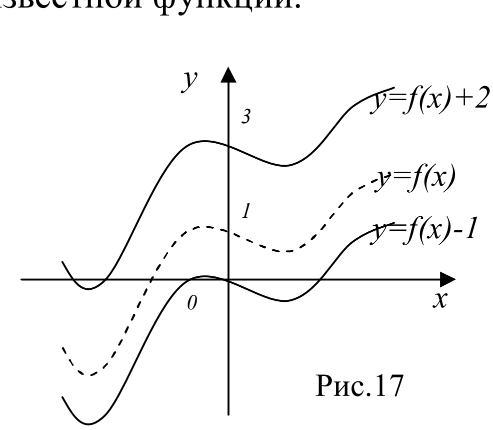


Рис.17

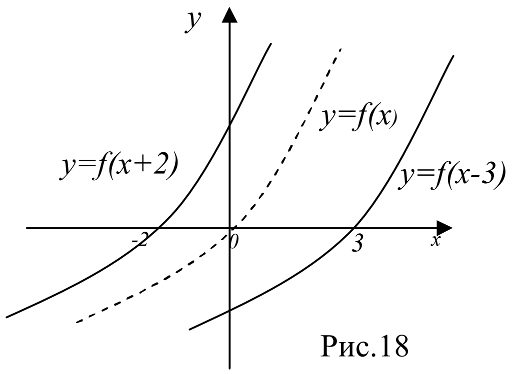


Рис.18

2.График функции $y = f(x+a)$ получается с помощью параллельного переноса данного графика вдоль оси *Ox* на *a* единиц влево при $a > 0$, и на $|a|$ единиц вправо при $a < 0$.

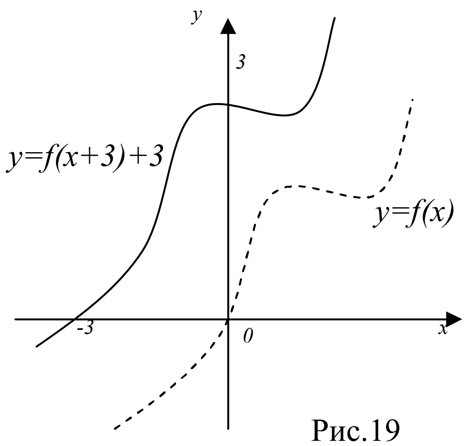


Рис.19

2. График функции $y = f(x+a)+b$ получается с помощью параллельного переноса данного графика вдоль обеих координатных осей.
3. График функции $y = -f(x)$ получается из данного графика отображением относительно оси *Ox*.
4. График функции $y = f(-x)$ получается из данного графика отображением относительно оси *Oy*.

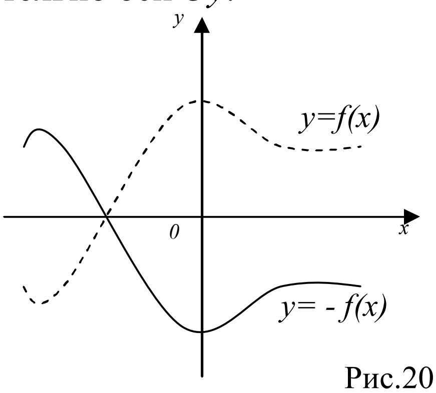


Рис.20

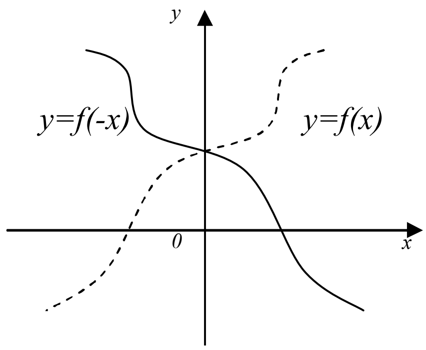


Рис.21

5. График функции $y = mf(x)$ получается из данного графика растяжением (при $|m|>1$) или сжатием (при $|m|<1$) вдоль оси *Oy*.
6. График функции $y = f(kx)$ получается из данного графика растяжением (при $|k|<1$) или сжатием (при $|k|>1$) вдоль оси *Ox*.

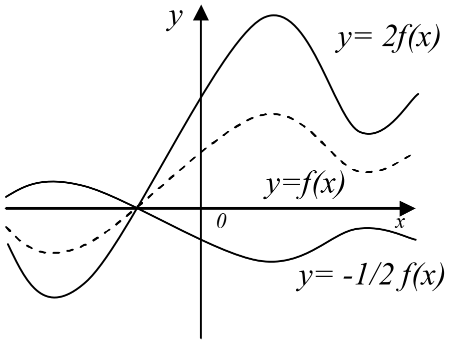


Рис.22

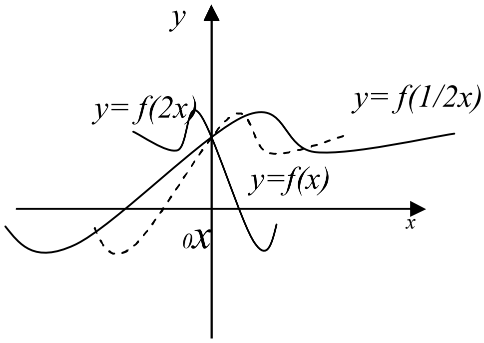
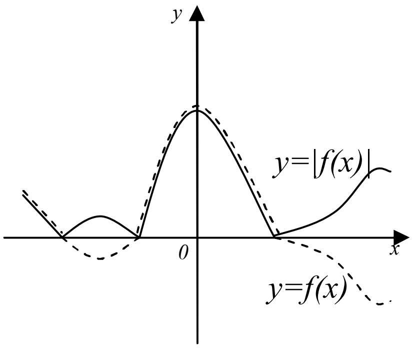
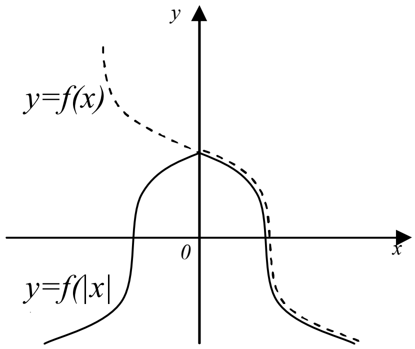


Рис.23

7. График функции $y=|f(x)|$ получается из данного графика следующим образом: та часть графика функции $y=f(x)$, которая лежит выше оси *Ox*, остается без изменения, а та часть, которая лежит ниже оси *Ox*, отображается симметрично относительно этой оси наверх.
8. График функции $y=f(|x|)$ получается из данного графика $y=f(x)$ следующим образом: та часть графика, которая расположена в правой полуплоскости, остается без изменения, а в левой полуплоскости достраиваем график симметрично правой части относительно оси *Oy*.





Пример 1. Решить графиче Рис.24 Рис.25

$x^3-2x+1=0$.

1) Преобразуем данное уравнение так, чтобы левая и правая части представляли собой элементарные функции $x^3=2x-1$.
2) Построим графики функций $y=x^3$ и $y=2x-1$.
3) Найдем абсциссы точек пересечения данных графиков: $x_1\approx-1{,}9$; $x_2\approx0{,}4$; $x_3\approx1{,}5$.

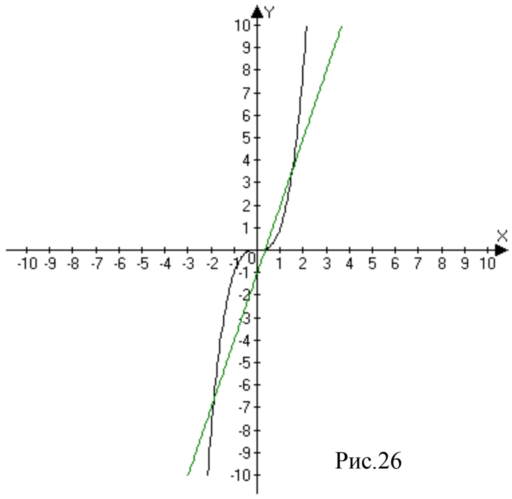


Рис.26

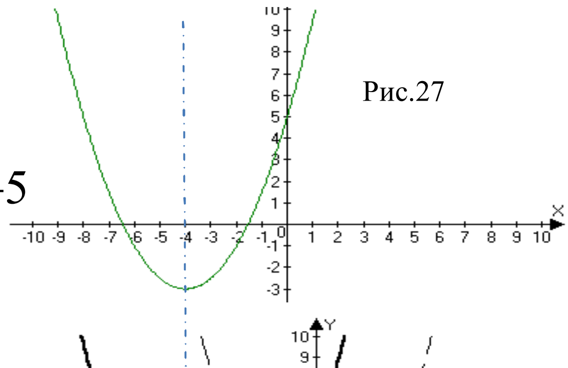
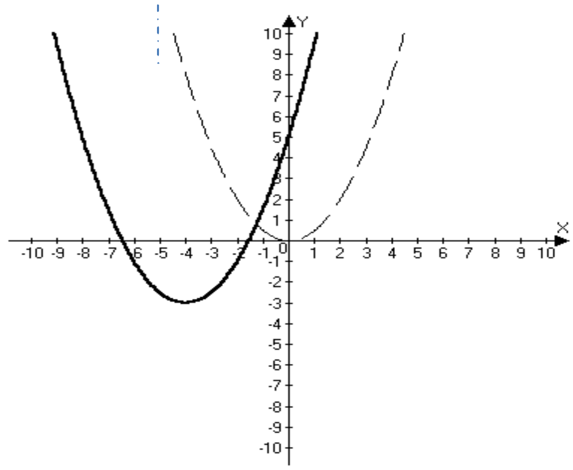


Рис.27

Пример 2. Построить графики функций :

$$а)\ y=\frac{1}{2}x^2+4x+5 \quad б)\ y=\frac{1}{2}x^2+4|x|+5$$

$$в)\ y=\left|\frac{1}{2}x^2+4x+5\right|$$



а) 1-й способ:

1) $x_O = -\dfrac{4}{2\cdot\frac{1}{2}} = -4,\ \ y_O = \dfrac{1}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4 + 5 = -3$

2) $\dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 5 = 0, \quad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-10}}{1} = -4 \pm \sqrt{6}$

3) ось симметрии $x = -4$.

Рис.28

2-й способ:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{2}(x^2 + 8x) + 5 =$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 16 - 16) + 5 =$$

$$\frac{1}{2}((x+4)^2 - 16) + 5 = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 3$$

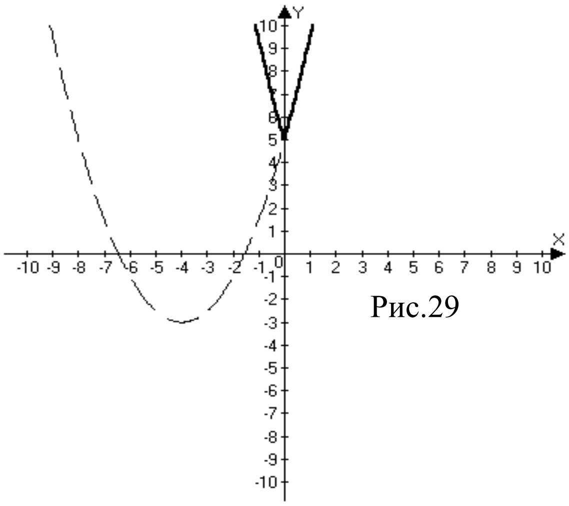


Рис.29

Видно, что график данной функции можно построить с помощью сдвига графика функции $y = \dfrac{1}{2}x^2$ на 4 единицы влево и на 3 единицы вниз.

б) Данная функция имеет вид $y = f(|x|)$. Сначала строим график функции $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 5$, затем часть графика, которая расположена в правой полуплоскости, оставляем без изменения, а в левой полуплоскости достраиваем график симметрично правой части относительно оси *Oy* (рис. 29).

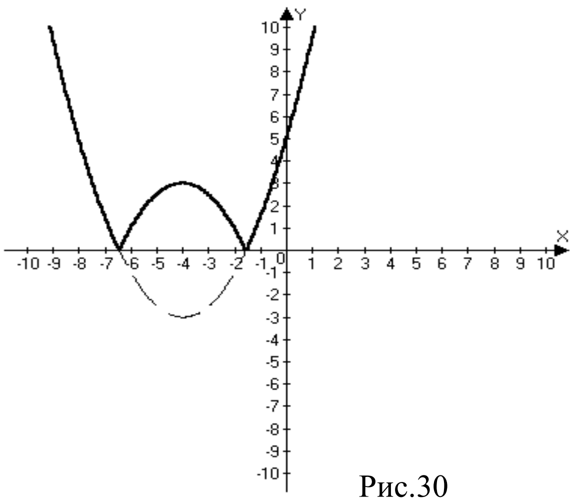


Рис.30

в) Данная функция имеет вид $y = |f(x)|$. Сначала строим график функции $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 5$, а затем часть графика, которая лежит выше оси *Ox*, оставляем без изменения, а ту часть, которая лежит ниже оси *Ox*, отображаем относительно этой оси наверх (рис. 30).

Пример 3. Построить график функции $y = \left|3\,|\,x+1\,| - 4\right|$.

Для удобства сначала внесем 3 под знак модуля: $y = \left||3x+3| - 4\right|$. Теперь выполним построение графика в несколько этапов:

1. $y = 3x + 3$,   2. $y = |3x + 3|$,   3. $y = |3x + 3| - 4$,   4. $y = ||3x + 3| - 4|$.

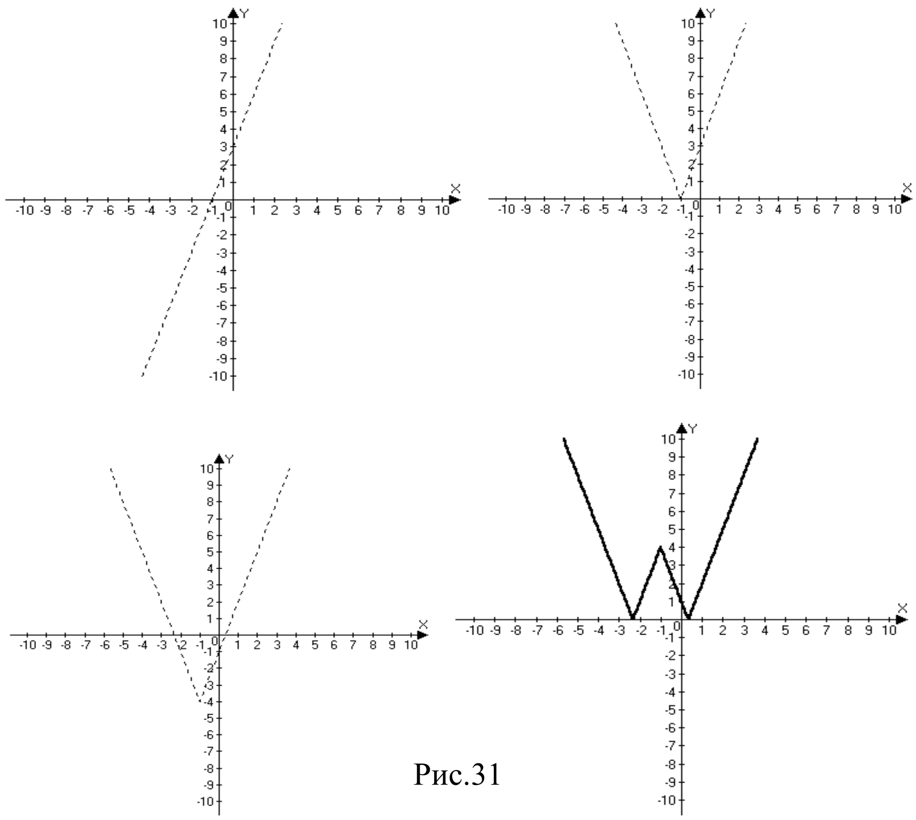


Рис.31

Пример 4. Построить график функции $y = \dfrac{-2x+4}{x-3}$.

$$\frac{-2x+4}{x-3} = -2 - \frac{2}{x-3}.$$

Положим $f(x) = -\dfrac{2}{x}$, $-2 - \dfrac{2}{x-3} =$ $f(x-3) - 2$.

Следовательно, для построения искомого графика нужно сместить график функции $y = -\dfrac{2}{x}$ на 3 единицы вправо и на 2 единицы вниз.

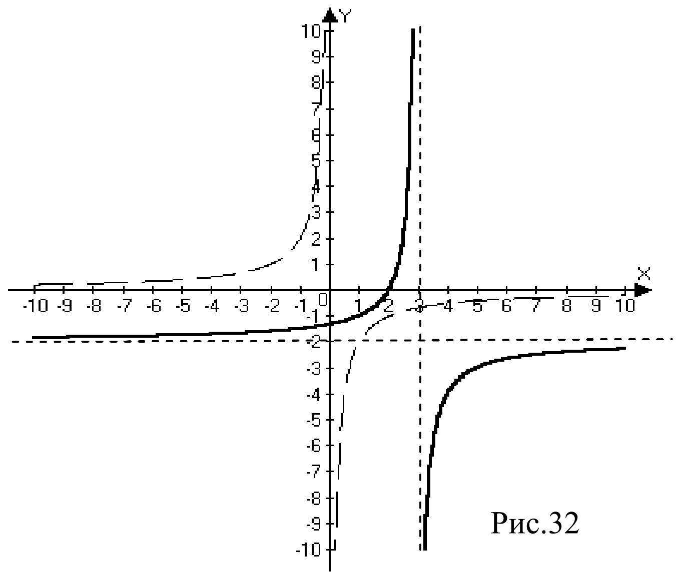


Рис.32

Задания для самостоятельной работы

1. Решить графически системы уравнений: а) $\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x+2. \end{cases}$

2. Решить графически уравнения:

   а) $2x-1=0$; б) $\sqrt{x}=\dfrac{8}{x}$; в) $2^x-1+x=0$; г) $\log_2 x - x^2 = 0$.

3. Дана функция $f(x)$. Найдите:

   $f(x+3),\quad f(x)+5,\quad -f(x^2),\quad f(-4x),\quad \dfrac{1}{3}f(|x|),\quad 2-\dfrac{3}{4}f(2x-1)$

а) $f(x)=x-3$; б) $f(x)=2x-x^2$

4. Указать, какое из соотношений для данной функции будет верным:

   а) $y=ax^2+bx+c$

   1) *ab<0;*
   2) *cD>0;*
   3) *bD>0;*
   4) *bc>0;*
   5) *aD>0.*

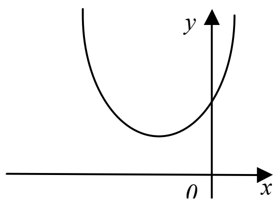


Рис.33

   б) $y=ax^2+bx+c$

   1) *aD<0;*
   2) *ba<0;*
   3) *bc>0;*
   4) *bD>0;*
   5) *Dc>0.*

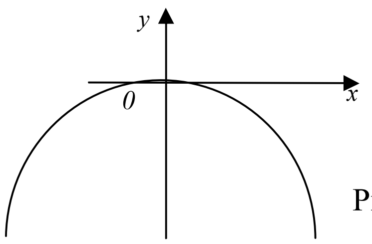


Рис.34

в) $y=\dfrac{к}{x+a}+в$

   1) *к>0,b>0, a>0;*
   2) *к>0,b<0, a<0;*
   3) *к<0,b<0, a>0;*
   4) *к>0,b<0, a>0;*
   5) *к<0,b<0,a<0.*

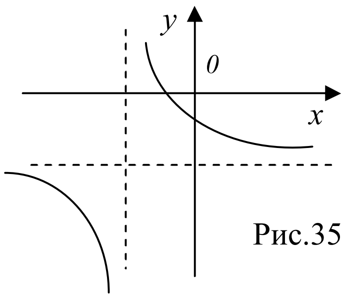


Рис.35

   г) $y=\dfrac{к}{x+a}+в$

   1) *к<0, b=0, a<0;*
   2) *к<0, b<0, a<0;*
   3) *к<0, b>0, a>0;*
   4) *к<0, b>0, a<0;*
   5) *к<0, b>0, a=0.*

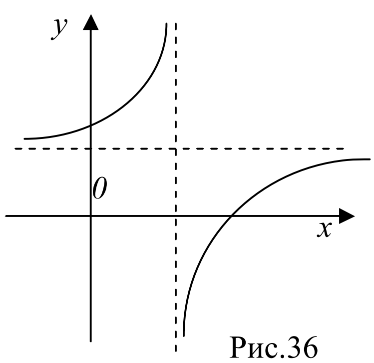


Рис.36

Построить графики следующих функций:

4. а) $y=\left|2x-4\right|$; б) $y=-3\left|x\right|+2$; в) $y=\left|\frac{1}{2}\left|x-2\right|-2\right|$.

5. а) $y=2x^2-1$; б) $y=-(x+2)^2+3$; в) $y=x^2+2x+3$;

г) $y=|x^2-x|$; д) $y=-x^2+3|x|+18$; е) $y=|3x^2-10|x|+3|$.

6. а) $y=-\frac{1}{2x}$; б) $y=\frac{2}{x+3}$; в) $y=\left|\frac{x+2}{x+4}\right|$; г) $y=\frac{|x|}{|x|-1}$.

7. а) $y=x^5$; б); $y=x^{-2}$; в) $y=x^{4/3}$; г) $y=x^{-5/2}$; д) $y=\sqrt[4]{x-3}+2$.

8. а) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; б) $y=4^x+2$; в) $y=2^{x-1}+3$;

г) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-3|}+5$; д) $y=\left|3^{x-1}-5\right|$; е) $y=\left|-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-2|}-4\right|$.

9. а) $y=\lg\left|x+2\right|$; б) $y=\log_{1/2}|x|-3$; в) $y=\lg(x-1)+2$;

г) $y=\left|\lg 10x\right|$; д); $y=\log_2(2x-4)$ е) $y=\left|\log_{1/3}\left|27x-54\right|\right|$.

10. Установить знак неравенства между m и n, если:

а) $(1,3)^m<(1,3)^n$; б) $\left(\frac{1}{6}\right)^m\geq\left(\frac{1}{6}\right)^n$; в) $\log_{\sqrt{2}} m\geq\log_{\sqrt{2}} n$; г) $\log_{0,7} m\leq\log_{0,7} n$.

Проверочная работа

Вариант 1

1.Решить графически уравнение $x^3-x^2+2x=1$.

2.Какие преобразования нужно выполнить, чтобы из графика функции $y=\log_2 x$ получить график функции $y=\log_2(4x-5)+1$?

3. Построить графики функций:

а) $y=\left|2|x|-3\right|$ *б)* $y=\frac{x+2}{x-3}$ *в)* $y=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+3|}$ *г)* $y=\left|-(x+4)-1\right|$

Вариант 2

1. Решить графически уравнение $x^2-2x+\frac{2}{x}=0$.
2. Какие преобразования нужно выполнить, чтобы из графика функции $y=3^x$ получить график функции $y=3^{2x-5}+4$?
3. Построить графики функций:

а) $y=\left|2-3|x|\right|$; *б)* $y=\frac{x}{2x+1}$; *в)* $y=\log_{0,5}\left|x+1\right|-3$; *г)* $y=\left|-(x-3)^2+4\right|$.

Вариант 3

1. Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{x}{2} = 0$.
2. Какие преобразования нужно выполнить, чтобы из графика функции $y = \log_{1/2} x$ получить график функции $y = \log_{1/2}(3x+7) - 5$?
3. Построить графики функций:

$$а)\ y = \left|2|x+2| - 5\right|; \quad б)\ y = \frac{2x+1}{x-3}; \quad в)\ y = 4 - 2^{|x+2|}; \quad г)\ y = \left|(x+3)^2 - 3\right|.$$

Вариант 4

1. Решить графически уравнение $\log_{1/2} x - x^2 + 4x = 0$.
2. Какие преобразования нужно выполнить, чтобы из графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ получить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+7} - 6$?
3. Построить графики функций:

$$а)\ y = \left|5 - |x+3|\right|; \quad б)\ y = \frac{3-x}{x+3}; \quad в)\ y = \log_3|x+2| - 2; \quad г)\ y = \left|(x-2)^2 + 5\right|.$$

.

§4. Уравнения и неравенства

1.Равносильность уравнений и неравенств

Определение. **Уравнением с одной переменной** называется равенство, содержащее эту переменную. Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, называется **корнем** (или решением) уравнения. Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Определение. **Областью определения уравнения** (или **ОДЗ** - областью допустимых значений) *f(x)=g(x)* называется множество тех значений переменной *x*, при которых одновременно имеют смысл выражения *f(x)* и *g(x)*.

Определение. Два уравнения называются **равносильными**, если совпадают множества их решений. (В частности, уравнения, не имеющие корней равносильны.) При решении уравнений часто используют понятие равносильности уравнений на множестве: два уравнения называются равносильными на множестве *A*, если совпадают множества их корней, принадлежащих множеству *A* (или они оба не имеют корней на множестве *A*).

Определение. Уравнение **равносильно совокупности уравнений** (неравенств, систем) на множестве *A*, если множество всех корней уравнения, принадлежащих *A*, совпадает с множеством всех решений совокупности уравнений (неравенств, систем), принадлежащих множеству *A*.

В определении равносильности двух уравнений ничего не говорится об ОДЗ этих уравнений. Равносильные уравнения могут иметь различные области допустимых значений.

Например, уравнение $x=1$ равносильно уравнению $\sqrt{x}=1$, так как число 1 является единственным корнем каждого из уравнений. ОДЗ первого уравнения - множество всех действительных чисел, а ОДЗ второго уравнения – множество неотрицательных действительных чисел.

В процессе решения используют следующие **правила преобразования уравнения в равносильное** ему:

─ если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному;

─ если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному;

─ если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое имеет смысл всюду в области определения данного уравнения и нигде в этой области не обращается в нуль, то получится уравнение, равносильное данному.

Уравнения вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$.

Если функции *f(x)* и *g(x)* определены на всей числовой оси, то уравнение вида $f(x)\cdot h(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ h(x)=0 \end{array}\right.$.

Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Если обе части уравнения *f(x)=g(x)* неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному.

Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 1$) равносильно уравнению *f(x)=g(x)*.

Если $f(x)>0$ и $g(x)>0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ (где $a>0$, $a\neq 1$) равносильно уравнению *f(x)=g(x)*.

Если уравнение имеет вид $f(x)h(x)=g(x)h(x)$, то деление на *h(x),* как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере корней.

Определение. Если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), то уравнение (2) называют **следствием** уравнения (1). Корни уравнения (2), не удовлетворяющие уравнению (1), называются посторонними корнями уравнения (1) и не считаются решениями этого уравнения.

Уравнение $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ является следствием уравнения $f(x)/h(x)=g(x)$.

Уравнение $f(x)=g(x)$ является следствием уравнения $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$

Совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ h(x)=0 \end{array}\right.$ является следствием уравнения $f(x)\cdot h(x)=0$.

Уравнение $f^{2n}(x)=g^{2n}(x)(n\in N)$ является следствием уравнения $f(x)=g(x)$.

Уравнение $f(x)=g(x)$ является следствием уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0, a\neq 1)$.

Чтобы выяснить, имеются ли среди корней уравнения следствия посторонние корни исходного уравнения, необходимо проверить каждый из найденных корней подстановкой его в исходное уравнение.

Можно поступить иначе: на каждом этапе решения уравнения определять промежутки, в которых могут находиться корни уравнения. Все корни, не принадлежащие этим промежуткам, являются посторонними и должны быть отброшены. Однако остальные корни необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение.

Пример 1. Равносильны ли уравнения: $\frac{x^2-1}{x-1}=2$ и $x+1=2$?

Ответ: Уравнения не равносильны, так как число 1 является единственным корнем второго уравнения, но не является корнем первого уравнения.

Пример 2. Равносильны ли уравнения: $\frac{x^2-1}{x-1}=5$ и $x+1=5$?

Ответ: Уравнения равносильны, так как число 4 является единственным корнем и первого, и второго уравнений.

Пример 3. Равносильны ли уравнения $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-1}$ и $x^2-1=x^4-1$?

Решение. Корни второго уравнения –1, 0 и 1, корни первого уравнения: 1 и –1, число 0 не является корнем первого уравнения.

Ответ: Уравнения не равносильны. Второе уравнение является следствием первого.

Пример 4. Равносильны ли уравнение $(6x-5)\sqrt{2x^2-5x+2}=0$ и совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} 6x-5=0 \\ \sqrt{2x^2-5x+2}=0 \end{array}\right.$? Ответ: Не равносильны, так как число $\frac{5}{6}$ является решением совокупности уравнений, но не является корнем уравнения.

Определение. **Решением неравенства** с одной переменной называется множество значений переменной, при которых данное неравенство становится верным числовым неравенством.

Определение. Множество всех значений переменной, при которых определены каждая из функций, входящих в неравенство, называется **областью определения неравенства** (или **ОДЗ**).

Определение. Два неравенства называются **равносильными**, если совпадают множества их решений. (В частности, неравенства, не имеющие решений, равносильны.) Два неравенства называются равносильными на множестве А, если совпадают множества их решений, принадлежащих множеству А.

Равносильные неравенства могут иметь различные области допустимых значений. Например, неравенство $x>1$ равносильно неравенству $\sqrt{x}>1$, однако ОДЗ первого неравенства - множество всех действительных чисел, а ОДЗ второго неравенства – множество неотрицательных действительных чисел.

При решении неравенств используют следующие **правила преобразования неравенства в равносильное** ему:

- если какой-нибудь член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному;

- если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения данного неравенства), оставив без изменения знак неравенства, то получится неравенство равносильное данному;

- если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения данного неравенства), изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство равносильное исходному.

Неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$ равносильны, если функция $h(x)$ определена на ОДЗ неравенства $f(x)<g(x)$.

Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Если $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на множестве A, то после возведения обеих частей неравенства $f(x)>g(x)$ в одну и ту же четную степень получится неравенство $f^n(x) > g^n(x)$, равносильное данному на множестве A.

Определение. Если для данной пары неравенств любое решение первого неравенства является решением второго неравенства, то второе неравенство называется **следствием** первого неравенства. Если в процессе решения от неравенства переходят к его следствию, то в конце решения необходимо провести исследование, позволяющее из полученного множества чисел отобрать те из них, которые являются решениями исходного неравенства.

Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему** неравенств, если ставится задача отыскания тех значений переменной, которые удовлетворяют каждому из заданных неравенств. Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность** неравенств, если ставится задача отыскания всех значений переменной, каждое из которых удовлетворяют, по крайней мере, одному из заданных неравенств.

Пример 1. Равносильны ли неравенства $x-1>0$ и $(x-1)(x^2+1)>0$?

Ответ: Неравенства равносильны, так как множества решений каждого из неравенств $x>0$.

Пример 2. Равносильны ли неравенства $x+3-\frac{1}{x-1}>-x+2-\frac{1}{x-1}$ и $x+3>-x+2$?

Решение. Второе неравенство получено из первого неравенства прибавлением к обеим его частям одного и того же выражения $1/(x\text{-}1)$, которое не определено при x=1. Число 1 не может быть решением первого неравенств, однако является решением второго неравенства. Следовательно, неравенства не равносильны. Любое решение первого неравенства является решением второго неравенства и существует решение второго неравенства, которое не является решением первого неравенства, значит, второе неравенство является следствием первого неравенства.

Ответ: неравенства не равносильны.

2. Рациональные уравнения

Определение. Уравнение $f(x)=g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, называют **целым рациональным уравнением.** Целым рациональным уравнением степени n **стандартного вида** называют уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_0 \neq 0$.

Теорема. Если $x=a$ – корень многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится без остатка на двучлен $x\text{-}a$.

Теорема. **Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет** целые корни**, то они являются делителями свободного члена этого уравнения.**

Теорема. Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет **рациональный корень** $x_0 = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ - несократимая дробь, то p – делитель свободного члена a_n, а q- делитель старшего коэффициента a_0 .

Определение. Уравнение $f(x)=g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, хотя бы одно из которых содержит алгебраическую дробь, называют **дробно-рациональным уравнением.**

Всякое дробно-рациональное уравнение можно представить в виде: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Метод решения дробно-рациональных уравнений заключается в следующем:

1) находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение; определяют значения переменной, при которых он обращается в нуль (ОДЗ);
2) умножают обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решают получившееся целое уравнение;
4) исключают те из его корней, которые не входят в ОДЗ, т.е. которые обращают знаменатель в нуль.

При решении целых рациональных уравнений выполняются только равносильные преобразования, поэтому найденные корни не проверяют. При решении дробно-рациональных уравнений выполняется умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение (освобождение от знаменателя), что может привести к появлению посторонних корней, поэтому проверка необходима.

При решении рациональных уравнений основными методами решения являются: метод разложения на множители и метод введения новых переменных.

Метод разложения на множители заключается в следующем:

Уравнение $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ можно заменить совокупностью уравнений $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ldots,\ f_n(x)=0$.

Если исходное уравнение-целое рациональное, то оно равносильно совокупности уравнений, в другом случае, решив уравнения совокупности, нужно взять только те корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения.

Пример 1. $2x^3-3x^2-8x+12=0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$2x^3-3x^2-8x+12=x^2(2x-3)-4(2x-3)=(2x-3)(x^2-4).$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $(2x-3)(x^2-4)=0$, которое равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l}2x-3=0,\\ x^2-4=0\end{array}\right.$, x_1=1,5; x_2=2; x_3=- 2. Ответ: 1,5;2;-2.

Пример 2. $x^3-4x^2+x+6=0$.

Решение. Если это уравнение имеет целые корни, то ими могут быть только делители числа 6: ±1; ±2; ±3; ±6. Проверкой убеждаемся, что -1 является корнем, так как –1-4-1+6=0. Левая часть уравнения делится на $x+1$, т.е. данное уравнение можно представить в виде: $(x+1)(x^2-5x+6)=0$. Решая уравнение $x^2-5x+6=0$. находим еще два корня: $x_2=2$, $x_3=3$.

Ответ: -1; 2; 3.

Пример 3. $2x^3+7x^2-28x+12=0$.

Решение. Рациональным корнем этого уравнения может быть дробь $\frac{p}{q}$- где p – делитель свободного члена, а q- делитель старшего коэффициента. Для p возможны значения: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, для q_0 – значения ±1; ±2. Корнями уравнения могут быть числа ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12; $\pm\frac{1}{2};\pm\frac{3}{2}$. Подбором можно установить, что $x=\frac{1}{2}$ -является корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $(x-0,5)$, полученное частное приравниваем нулю и находим из последнего уравнения остальные корни: -6 и 2.

Ответ: 0,5; -6; 2.

Метод введения новых переменных. Если уравнение можно преобразовать к виду $h(g(x))=0$, то нужно ввести новую переменную $u=g(x)$, решить уравнение $h(u)=0$, а затем решить совокупность уравнений $g(x)=u_1$, $g(x)=u_2$, ... $g(x)=u_n$, где $u_1,u_2,\ldots,u_n$ – корни уравнения $h(u)=0$.

Метод введения новой переменной применяется, например, при решении биквадратных уравнений: уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ заменой $x^2=y$ сводится к квадратному уравнению.

Биквадратные уравнения являются частным случаем так называемых трехчленных уравнений: $ax^{2n}+bx^n+c=0$ $(a\neq 0)$. Заменой $x^n=y$ уравнение сводится к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$.

Пример 4. $x^6-9x^3+8=0$

Решение. Пусть $x^3=y$, тогда уравнение примет вид $y^2-9y+8=0$, корни которого $y_1=1$, $y_2=8$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} x^3=1, \\ x^3=8 \end{array}\right.$, отсюда $x=1$ и $x=2$.

Ответ: 1; 2.

Пример 5. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $(x^2+2x)^2-(x^2+2x+1)=55$. Пусть $x^2+2x=y$, тогда уравнение примет вид $y^2-y-56=0$, $y_1=-7$; $y_2=8$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2+2x=-7, \\ x^2+2x=8 \end{array}\right.$. Первое из этих уравнений не имеет действительных корней, корни второго: $x_1=-4$; $x_2=2$.

Ответ: -4; 2.

Метод замены переменных применяется при решении возвратных уравнений. Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$ называют обобщенными **возвратными** уравнениями четвертой степени. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения, то, разделив уравнение на x^2, получим равносильное уравнение $a\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{k}{x}\right)+c=0$, которое заменой $x+\frac{k}{x}=y$ сводится к квадратному уравнению относительно y.

Частным случаем возвратных уравнений является уравнение вида: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, (коэффициенты равноудаленные от начала и конца многочлена, равны между собой). Данное уравнение введением переменной $x+\frac{1}{x}=y$ это уравнение приводится к квадратному.

Пример 6. $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

Решение. Так как x=0 не является корнем этого уравнения, то разделим обе части уравнения на x^2, получим: $2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$. Сгруппируем равноотстоящие от концов члены уравнения: $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$. Введем новую переменную: $x+\frac{1}{x}=y$, тогда, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Выполнив подстановку, получим уравнение: $2(y^2-2)+3y-16=0$,

$2y^2+3y-20=0$. Корни полученного уравнения: $y_1=-4, y_2=2{,}5.$

Уравнение равносильно совокупности уравнений

$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=2{,}5 \\ x+\frac{1}{x}=-4 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0, \\ x^2+4x+1=0, \end{array}\right.$; $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$; $x_3=0{,}5; x_4=2$.

Ответ: $-2\pm\sqrt{3};$ 0,5;2.

Пример 7. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

Решение. Разложив знаменатели дробей на множители, получим:

$\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$. ОДЗ $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$.

$2x+(x-4)(x-2)=x+2$, $x^2-5x+6=0$

$x_1=3, x_2=2$. Но 2 не принадлежит ОДЗ, посторонний корень. Ответ: 3.

Метод оценки. При решении уравнений бывает полезно учесть множество значений функций, входящих в это уравнение и использовать ограниченность этих функций.

Пример 8. $(x-1)^4+\left(x^2-3x+2\right)^2=0.$

Решение. Заметим, что при любых действительных значениях x: $(x-1)^4\geq 0$ и $\left(x^2-3x+2\right)^2\geq 0$. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю. Поэтому исходное уравнение равносильно системе уравнений: $\begin{cases} (x-1)^4=0, \\ \left(x^2-3x+2\right)^2=0. \end{cases}$ Решением этой системы, а значит и исходного уравнения, является 1. Ответ:1.

Задания для самостоятельной работы

Равносильны ли уравнения:

1) $x^3+x=0$ и $\frac{x^3+x}{x}=0$; 2) $x^2+1=0$ и $\frac{x^2+1}{x}=0$; 3) $x^2+1=\sqrt{x}$ и $x^2+1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$; 4) $x^2-1=\sqrt{x}$ и $x^2-1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$?

Равносильны ли уравнение и совокупность уравнений:

5) $(x-4)(x-3)=0$ и $\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x-3=0 \end{array}\right.$; 6) $(x-4)\left(x+\frac{1}{x-4}\right)=0$ и $\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x+\frac{1}{x-4}=0 \end{array}\right.$?

Решите уравнения (найти действительные корни):

7) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$; 8) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$;

9) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)-4=0$; 10) $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$

11) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$; 12) $2x^3-3x^2-13x+2=0$;

13) $x^4-x^3-6x^2+4x+8=0$; 14) $3x^4-2x^3+4x^2-4x+12=0$;

15) $\frac{3}{8x^3+1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{x+3}{4x^2-2x+1}$; 16) $\frac{32}{x^3-2x^2-x+2}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+1}$.

17) При каких значениях a уравнение имеет один корень: $x^2 - 7x + a = 0$?

18) При каких значениях a уравнение может иметь более двух корней:

$(a^2-3a+2)x^2-(a^2-5a+4)x+a-a^2=0$?

Проверочная работа

Вариант 1

1) Равносильны ли уравнения: $x^2+1=0$ и $x^4+1=0$?

2) Решить уравнения: а) $(3x+2)^4-13(3x+2)^2+36=0$; б) $\frac{3x-2}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{3x+4}{x^2-2x}$;

в) $x^4+5x^3+4x^2-24x-24=0$; г) $x^4+4x^3-18x^2-12x+9=0$.

Вариант 2

1) Равносильны ли уравнения: $x^2=x$ и $\frac{x^2+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$?

2)Решить уравнения: а) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$; б) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$;

в) $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$; г) $x^4+2x^3=11x^2-4x+4$.

Вариант 3

1) Равносильны ли уравнения: $\sqrt{x+3}=5$ и $x+3=25$?

2) Решить уравнения: а) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$; б) $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$;

в) $x^3+4x^2-24=0$; г) $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$.

Вариант 4

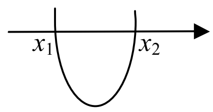
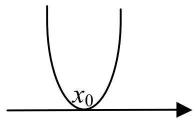
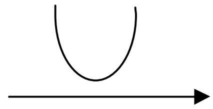
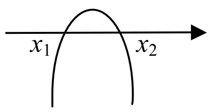
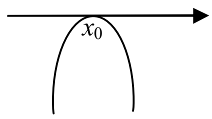
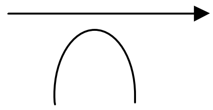
1) Равносильны ли уравнения: $\sqrt{(x+1)^2}=2$ и $x+1=2$?

2)Решить уравнения: а) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-6=0$;б) $\frac{2x-1}{14x^2+7x}+\frac{8}{12x^2-3}=\frac{2x+1}{6x^2-3x}$;

в) $x^3+5x^2-x-21=0$; г) $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

3. Рациональные неравенства

Решение квадратных неравенств с помощью эскиза графика в зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ и знака старшего коэффициента представлено в таблице:

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$ax^2+bx+c>0$	$x<x_1,\ x>x_2$	$x\neq x_0$	$x\in R$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$x_1\leq x\leq x_2$	$x=x_0$	$x\in\varnothing$
$a<0$			
$ax^2+bx+c>0$	$x_1<x<x_2$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$x\leq x_1,\ x\geq x_2$	$x\in R$	$x\in R$

Для решения неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (вместо знака > могут быть знаки ≥ , <, ≤) применяется **метод интервалов** (метод промежутков), который состоит в следующем:

1. На числовую ось наносят точки, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак. Такими точками являются точки, в которых функция обращается в нуль или терпит разрыв, т.е ими могут быть корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми – не удовлетворяющие ему.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значений x, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Если функции являются многочленами и не содержат множителей вида $(x-a)^{2n}$, где $n\in N$, то достаточно определить знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в любом промежутке, а в остальных промежутках знаки «+» и « - » будут чередоваться. Если в числителе или знаменателе дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеется множитель $(x-a)^{2n}$, где $n\in N$, то непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x=a$ заданному неравенству. Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью кривой, проведенной через отмеченные точки, лежащей

выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ на рассматриваемом промежутке.

Пример 1. Решить неравенство: $x^4 - 3 < 2x(2x^2 - x - 2)$.

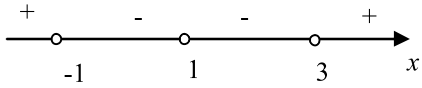


Рис.37

<u>Решение.</u> Перенесем все слагаемые в левую часть неравенства и приведем многочлен к стандартному виду. Получим равносильное неравенство:
$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 < 0$. Разложим многочлен на множители, тогда неравенство можно переписать в виде: $(x-1)^2(x+1)(x-3) < 0$. Решаем неравенство методом интервалов, получаем: (-1;1),(1;3).

<u>Ответ:</u> (-1;1), (1;3).

Пример 2. Решить неравенство: $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} < 0$.

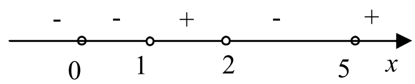


Рис.38

<u>Решение.</u> Разложим числитель и знаменатель на множители: $\dfrac{x^2(x-1)(x-2)}{x^2(x-5)} < 0$.

Нанесем числа 0, 1, 2, 5, при которых числитель или знаменатель обращаются в нуль, на числовую ось. Они разбивают ось на пять промежутков. Находим знак выражения на промежутках. <u>Ответ</u>: $(-\infty;0)$, (0;1), (2;5).

Пример 3. Решить неравенство: $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{1}{x}$.

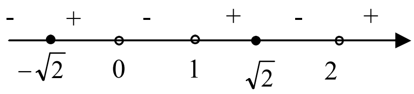


Рис.39

<u>Решение</u>. Перенесем все члены неравенства влево и приведем дроби к общему знаменателю, получим неравенство, равносильное исходному:

$\dfrac{x(x-1) + x(x-2) - (x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} \geq 0$, $\dfrac{x^2 - 2}{x(x-1)(x-2)} \geq 0$,

$\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x(x-1)(x-2)} \geq 0$. Решаем неравенство методом интервалов. Нули числителя: $x = \pm\sqrt{2}$; нули знаменателя $x=0$; $x=1$; $x=2$. Наносим числа 0,1,2, $\pm\sqrt{2}$ на числовую ось, определяем знаки на промежутках, получим ответ: $\left[-\sqrt{2};0\right), \left(1;\sqrt{2}\right], (2;\infty)$.

<u>Ответ</u>: $\left[-\sqrt{2};0\right), \left(1;\sqrt{2}\right], (2;\infty)$.

Пример 4. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 4}{x} < 1, \\ x^2 < 64. \end{cases}$

<u>Решение.</u> Решим сначала первое неравенство: $\dfrac{x^2 + x - 4}{x} - 1 < 0$; $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} < 0$.

Решение этого неравенства $(-\infty;-2)$ и (0;2).

Решаем второе неравенство системы: $x^2 - 64 < 0$, $(x-8)(x+8) < 0$. Решение этого неравенства (-8;8). Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x<-2,\\ 0<x<2,\end{array}\right.\\ -8<x<8\end{cases}$$

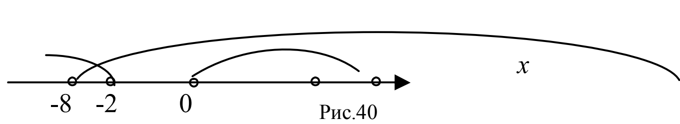


Рис.40

Отметив найденные решения первого и второго неравенств на общей числовой прямой, найдем пересечение решений. Ответ: (-8;-2); (0;2).

Пример 5. Решить совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^5 \ge 100x^3,\\ \dfrac{(x+9)(5x-x^2-18)}{x^2-18x+45} \ge 0\end{array}\right.$.

Решение. Преобразуем первое неравенство: $x^3(x-10)(x+10) \ge 0$.
Решение этого неравенства [-10;0] и [10;∞).

Рассмотрим второе неравенство. Квадратный трехчлен $-x^2+5x-18$ при всех значениях x принимает отрицательные значения, так как его дискриминант и старший коэффициент отрицательны. Разделив обе части неравенства на $-x^2+5x-18$ и изменив знак неравенства на противоположный, получим равносильное неравенство: $\dfrac{x+9}{(x-3)(x-15)} \le 0$.

Решаем неравенство методом интервалов, получим: (-∞;-9] и (3;15). Объединив найденные решения каждого из неравенств совокупности, получим решение исходной совокупности неравенств: (-∞;0] и (3;∞).

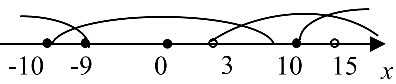


Рис.41

Ответ: (-∞;0] и (3;∞).

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенства 1-11: 1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2+4x+4>0$; 3) $-4x^2-4x-1\ge 0$; 4) $x^2-x-1<0$; 5) $2x^2-x+5\ge 0$; 6) $(x^2-1)(x^2+2)(x^2-4)>0$; 7) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\le 0$; 8) $x-2<\dfrac{3}{x}$;

9) $\dfrac{x^2-3x+5}{3+4x}<0$; 10) $\dfrac{(x^2-9)(x-2)}{x^2+2x-3}\ge 0$; 11) $\dfrac{x^2-9x+17}{(x-1)(x-3)}\ge -\dfrac{1}{x-3}$.

Решить систему неравенств (12-13): 12) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3-x}<2,\\ x^3<16x,\\ x^2\le 4\end{cases}$; 13) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-2}<1,\\ \dfrac{2x+3}{3x-2}<2\end{cases}$

Найти область определения функции (14-15):

14) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2-49}}$; 15) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-6}{x+2}}+\sqrt[4]{(x^4-5x^3+6x^2)(1-x^2)}$.

Проверочная работа

Вариант 1

1) $x^2+6x+9\le 0,$

2) $x^2>16,$

3) $-x^2+6x-5\ge 0,$

4) $x(x+1)<2(1-2x-x^2),$

5) $(x-2)^3(x+1)(x-1)^2(x^2+2x+5)<0,$

6) $\dfrac{x^2-4x+4}{(x-2)(x-4)}\ge -1,$

7) $\dfrac{12}{x^2+2x}-\dfrac{3}{x^2+2x-2}>1$

Вариант 2

1) $x^2+2x+1>0,$

2) $4x^2>9,$

3) $-x^2+6x-5\le 0,$

4) $(x-5)^2>37-(x-10)^2,$

5) $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)<0,$

6) $\dfrac{x^2-3x+3}{(x-2)(x-4)}\ge -\dfrac{1}{x-4},$

7) $\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{x-1}{x}<2$

Вариант 3

1) $4x^2+4x+1>0,$

2) $9x^2-1>0,$

3) $-3x^2+10x-3<0,$

4) $2x(x-1)<3(x+1),$

5) $(x^2-9)(1-3x)(2x^2-x+5)<0,$

6) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x-3)}\ge -1,$

7) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}>\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}+1$

Вариант 4

1) $4x^2+4x+1\le 0,$

2) $x^2<50,$

3) $-2x^2+4x-5\le 0,$

4) $x(x+1)>2(1-2x-x^2),$

5) $(x^2-6x+9)^3(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)\le 0,$

6) $\dfrac{x^2-10x+25}{(x-5)(x-7)}\ge -1,$

7) $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}<-1$

4. Системы уравнений

Определение. Любое конечное множество уравнений называется **системой уравнений**. **Решением** системы уравнений с n переменными называется упорядоченный набор n чисел, являющийся решением каждого из уравнений системы. Решить систему – значит найти все ее решения.

Правила преобразования систем уравнений:

1. Если в системе заменить какое-либо из уравнений на равносильное ему, а остальные оставить без изменения, то вновь полученная система равносильна исходной.

2. Пусть $f=g$ и $h=p$ - два какие-нибудь уравнения системы. Если в системе заменить уравнение $f=g$ на уравнение $f+h=g+p$, а остальные оставить без изменения, то полученная система равносильна исходной.

3. Пусть система содержит уравнение $x=f,$ где x - некоторая переменная, а f- некоторая функция. Тогда если во всех уравнениях системы кроме уравнения $x=f,$ вместо x подставить f, то полученная система равносильна исходной.

4. Если система содержит уравнение $f\cdot g=0,$ то она распадается на две системы, в одной из которых уравнение $f\cdot g=0,$ заменено на $f=0$, а в другой – на $g=0$. При этом каждое решение данной системы является решением одной из полученных систем. Если функции f *и* g определены на одном и том же множестве, то каждое

решение полученных систем является решением исходной системы. В этом случае говорят, что данная система равносильна совокупности полученных систем.

Основные методы решения систем уравнений: метод подстановки; метод алгебраического сложения; метод разложения на множители; метод замены переменных; графический.

1. Метод подстановки. Если из одного уравнения системы выразить одну переменную через другую и подставить полученное выражение во второе уравнение, то полученная система равносильна исходной, т.е.

$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x, f(x)) = 0 \end{cases}$ равносильны.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ x^4 + y^2 = 16. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения выражаем y, подставляем во второе уравнение, получаем: $\begin{cases} y = 4 - 2x^2, \\ x^4 + (4 - 2x^2)^2 = 16. \end{cases}$ Приведя второе уравнение к стандартному виду, получаем биквадратное уравнение $5x^4 - 16x^2 = 0$. Его корни: $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}, x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. Подставляя найденные значения, находим: y_1=4, y_2=-2,4, y_3= -2,4.

Ответ: $(0;4), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -2{,}4\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -2{,}4\right)$.

2. Метод алгебраического сложения уравнений основан на том, что если к обеим частям одного из уравнений системы (1) прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на одно и то же число, а другое оставить без изменения, то получим систему, равносильную данной.

Пример 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 4x - 7y = -12, \\ 6x + 3y = -18. \end{cases}$

Решение. Умножим все члены первого уравнения системы на –3, а второго уравнения на 2, тогда коэффициенты при x в полученных уравнениях будут противоположными числами: $\begin{cases} -12x + 21y = 36, \\ 12x + 6y = -36. \end{cases}$ Почленно сложим уравнения полученной системы: $\begin{cases} 27y = 0, \\ 4x - 7y = -12. \end{cases}$, получим $\begin{cases} y = 0, \\ x = -3. \end{cases}$. Ответ: (-3;0).

Пример 3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$.

Решение. Умножим второе уравнение системы на 2, результат сначала сложим с первым уравнением, а затем вычтем из него, получим: $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 49, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} (x + y)^2 = 49, \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases}$.

Полученная система равносильна совокупности четырех систем:

$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=-1. \end{cases}$ Решая эти системы уравнений, получаем: (4;3); (3;4); (-3;-4); (-4;-3).

Ответ: (4;3); (3;4); (-3;-4); (-4;-3).

3. Метод замены переменной основывается на утверждении 3.

Пример 4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{10}{2x+3y}+\dfrac{15}{4x-y}=8, \\ \dfrac{15}{2x+3y}-\dfrac{9}{4x-y}=0 \end{cases}$.

Решение. Пусть $a=\dfrac{1}{2x+3y}$, $b=\dfrac{1}{4x-y}$.Тогда система примет вид: $\begin{cases} 10a+15b=8, \\ 15a-9b=0. \end{cases}$ Решая эту систему , получим $a=\dfrac{8}{35}, b=\dfrac{8}{21}$. Следовательно, имеем систему: $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3y}=\dfrac{8}{35}, \\ \dfrac{1}{4x-y}=\dfrac{8}{21}. \end{cases}$ или $\begin{cases} 16x+24y=35, \\ 32x-8y=21. \end{cases}$ Отсюда $x=\dfrac{7}{8}, y=\dfrac{7}{8}$. Ответ: $x=\dfrac{7}{8}, y=\dfrac{7}{8}$.

Метод замены переменных используют при решении симметрических систем Выражение *F(x,y)* называется **симметрическим,** если оно при замене переменных *x* на *y, y* на *x* не изменится. Система, все уравнения которой симметрические, называется симметрической. Симметрические системы решают с помощью замены: *x+y=u, xy=v.*

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

Решение. Введем новые переменные: *u=x+y, v=xy*. Система примет вид: $\begin{cases} u+v=11, \\ uv=30 \end{cases}$

Решая эту систему, находим: $u_1=6$, $v_1=5$, $u_2=5$, $v_2=6$. Остается найти решение совокупности систем уравнений: $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$ Ответ: (5;1); (1;5); (3;2); (2;3).

Пример 6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

Решение. Пара (0;0) не является решением системы.

Разделим уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ на y^2. Получим уравнение $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0$.

Введем новую переменную $a = \frac{x}{y}$, уравнение примет вид $a^2 - 3a + 2 = 0$; $a_1=2$, $a_2=1$.

Значит $\frac{x}{y} = 2$ или $\frac{x}{y} = 1$.

Исходная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}.$$

Решая системы методом подстановки, находим следующие решения: $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$; $\left(-\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sqrt{5}; \sqrt{5}\right) \left(-\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$.

4. Метод разложения на множители основывается на том, что если выражения $f_1(x,y)$ $f_2(x,y)$ определены для всех значений переменных x и y, то система $\begin{cases} f_1(x,y) \cdot f_2(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Пример 7. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

Решение. Разложим на множители левую часть первого уравнения:

$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0,\ x^2 + xy - 3xy - 3y^2 = 0,$

$x(x + y) - 3y(x+y) = 0,$

$(x+ y)(x - 3y) = 0.$

Систему перепишем в виде: $\begin{cases} (x+y)(x-3y) = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$$

Решая эти системы методом подстановки, получим (-1,5;-0,5); (6;2); (-2;2); (1,5;-1,5).

Ответ: (-1,5;-0,5); (6;2); (-2;2); (1,5;-1,5).

Системы линейных уравнений

Определение. **Линейным уравнением** с переменными x_1, x_2, …, x_n называется уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$. При нахождении решений системы m линейных уравнений с n переменными удобно пользоваться **методом Гаусса** (или методом последовательного исключения неизвестных). Метод заключается в том, что при помощи алгебраического сложения систему приводят к так называемой треугольной форме.

Пример 8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$

Решение. Преобразуем ее в равносильную систему так, чтобы в первом уравнении переменная x стояла с коэффициентом единица. Для этого разделим почленно первое уравнение системы на коэффициент при x, т.е. на 2. Получим уравнение: $x - 2y + 2z = 5$.

Умножаем это уравнение на 3 и складываем его почленно со вторым уравнением, получим $2y - 4z = -10$, отсюда $y - 2z = -5$.

Умножаем первое уравнение на -4 и прибавляем почленно к третьему уравнению, получим $5y - 7z = -19$.

Получили систему $\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ 5y - 7z = -19. \end{cases}$, в которой переменная x исключена из второго и третьего уравнений. Второе уравнение полученной системы умножаем на -5 и прибавляем к третьему уравнению этой системы, получим $3z=6$, отсюда $z=2$.

$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ z = 2. \end{cases}$ $z=2$, $y=-1$, $x=-1$. Ответ: (-1;-1; 2).

При решении и исследовании систем линейных уравнений можно использовать **метод Крамера.** Рассмотрим применение этого метода к системам двух линейных уравнений с двумя переменными.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными приводится к виду: $\begin{cases} a_1x + b_2y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. Составляют определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

– если определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение,

определяемое формулами: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$;

– если определитель Δ=0, Δ_x =Δ_y=0, то система имеет бесчисленное множество решений;

– если определитель Δ=0, хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y отличен от нуля, то система решений не имеет.

Пример 9: При каких значениях m система $\begin{cases}(3+m)x+4y=5-3m,\\ 2x+(5+m)y=8\end{cases}$:

а) имеет бесчисленное множество решений; б) не имеет решений?

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3+m & 4\\ 2 & 5+m\end{vmatrix}=(3+m)(5+m)-8=m^2+8m+7.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5-3m & 4\\ 8 & 5+m\end{vmatrix}=-3m^2-10m-7. \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}3+m & 5-3m\\ 2 & 8\end{vmatrix}=14m+14.$$

Δ=0 при m= - 1 и m= -7; Δ_x=0 при m=-1 и $m=-\frac{16}{6}$; Δ_y =0 при m=-1.

а) Система имеет бесчисленное множество решений, если Δ= Δ_x =Δ_y = 0, т.е. при m = - 1.

б) Система не имеет решений, если Δ=0, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, т.е. при m = -7.

Ответ: а) -1; б) -7.

Пример 10. Найти все значения a, при которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}x+y=a,\\ 2x-y=3\end{cases}$, удовлетворяли бы неравенству $x>y$.

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3.$ $\Delta_x=\begin{vmatrix}a & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-a-3.$ $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & a\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-2a.$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-a-3}{-3}=\frac{a+3}{3}; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{3-2a}{-3}=\frac{2a-3}{3}.$$

$\frac{a+3}{3}>\frac{2a-3}{3}$, $a<6$.

Ответ: $a<6$.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений (1-11):

1) $\begin{cases}7x-2y=-1,\\ 3x-5y=12.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+y+3z=13,\\ x+y+z=6,\\ 3x+y+z=8.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y-z=3,\\ 3x-y+2z=-1,\\ 11x+y+4z=0.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-2y+3z=-1,\\ 2x+y-5z=9,\\ 4x-3y+z=7.\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^3y^3=-8\end{cases}$. 6) $\begin{cases}xy(x+y)=20,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4}\end{cases}$. 7) $\begin{cases}x^2+y^2=7+xy,\\ x^3+y^3=6xy-1\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=2{,}5,\\ x^2+y^2=20\end{cases}$.

9) $\begin{cases} 15x^2+xy-2y^2=0, \\ 7x^2-4xy-3y^2=-32 \end{cases}$. 10) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y}+\dfrac{2}{3x-2y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{2x-3y}+\dfrac{4}{3x-2y}=\dfrac{7}{4} \end{cases}$. 11) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0, \\ 3xy+7y=1 \end{cases}$.

12) Найти все значения p, при которых система уравнений $\begin{cases} x+py=1, \\ px+y=1 \end{cases}$ не имеет решений.

13) Найти все значения m и n, при которых система уравнений $\begin{cases} mx+ny=8, \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

14) Найти все значения a, при которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x+7y=a, \\ 2x-y=5 \end{cases}$, удовлетворяли бы неравенству $x > y$-2.

15) При каких значениях p система $\begin{cases} 5x-2y=2, \\ 3x+y=p \end{cases}$ имеет отрицательные решения?

Проверочная работа

Вариант 1

1) $\begin{cases} x^2-2xy=7, \\ x-3y=-2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3(x-5)-1=6-2x, \\ 3(x-y)-7y+4=0. \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+y+xy=-5, \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

4). $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{9}{2x+y}=2, \\ \dfrac{4}{x+y}=\dfrac{12}{2x+y}-1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ x-y+2z=-7, \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

6) Найти все значения p, при которых система уравнений $\begin{cases} px+y=1, \\ 4x-2y=p \end{cases}$ имеет бесчисленной множество решений.

Вариант 2

1. $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2-7x=12y-1, \\ x-y=-1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 6(x+y)-y+1=0, \\ 7(y+4)-(y+2)=0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1}+\dfrac{2}{3x+2y-3}=2, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{4}{3x+2y-3}=5 \end{cases}$;

4 $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$; 5 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x-5y+2z=-7 \end{cases}$

6. Найти все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x+7y=a, \\ 2x+5y=20 \end{cases}$ имеет положительные решения.

Вариант 3

1. $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2+3xy=70 \end{cases}$ .2. $\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x, \\ 12(x+y)-1=7x+12y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+3z=7, \\ 4x+3y-z=0 \end{cases}$

6. При каких значениях c система $\begin{cases} 5x-cy=2, \\ 3x-6y=1 \end{cases}$ имеет отрицательные решения.

Вариант 4

1. $\begin{cases} y+x^2=5, \\ y^2+x^4=17 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3(x+y)-7=12x=y, \\ 6(y-2x)-1+45x=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{10}{x-y}=1, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+xy^2=1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ 2x-3y+z=8, \\ -x+y-5z=-8 \end{cases}$

6. При каких значениях a система $\begin{cases} 3x+2ay=1, \\ (3a-1)x-ay=1 \end{cases}$ не имеет решений ?

5. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Наиболее распространенным методом решения уравнений, содержащих переменную величину под знаком модуля, является метод, основанный на **определении модуля** (абсолютной величины) $|a|=\left[\begin{array}{l} a,\ \forall a\ge 0, \\ -a,\ \forall a<0 \end{array}\right.$.

Раскрывая модуль по определению, уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ заменяем равносильной совокупностью двух систем:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -f(x)=g(x), \\ f(x)<0 \end{cases}.$$

Пример 1. Решить уравнение: $|x-6|-x^2+5x=9$.

<u>Решение.</u> Раскрывая модуль по определению, получим, что уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 6,\\ x-6-x^2+5x=9\end{cases}\\ \begin{cases}x<6,\\ -x+6-x^2+5x=9\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 6,\\ x^2-6x+15=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<6,\\ x^2-4x+3=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решением второй системы являются числа 1 и 3, первая система решений не имеет. <u>Ответ:</u> 1;3.

Пример 2. Решить уравнение: $\dfrac{1-2x}{2-|x-1|}=1$.

<u>Решение.</u> Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x-1 \ge 0,\\ \dfrac{1-2x}{2-(x-1)}=1\end{cases}, \quad \begin{cases}x-1<0,\\ \dfrac{1-2x}{2+(x-1)}=1\end{cases}.$$

Решаем первую систему: $\begin{cases}x \ge 1,\\ \dfrac{1-2x}{3-x}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x \ge 1,\\ x=-2\end{cases}$. Эта система решений не имеет.

Решаем вторую систему $\begin{cases}x<1,\\ \dfrac{1-2x}{x+1}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x<1,\\ x=0\end{cases}$. Решением этой системы является число 0. Следовательно, решение исходного уравнения x=0. <u>Ответ</u>: 0.

Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ равносильно также совокупности двух других систем: $\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x) \ge 0\end{cases}$ и $\begin{cases}-f(x)=g(x),\\ g(x) \ge 0\end{cases}$.

Если в уравнении функция *g(x)* имеет более простой вид, чем *f(x),* то его целесообразно заменить второй совокупностью систем.

Пример 3. Решить уравнение: $|3x^2+5x-4|=2x-1$.

<u>Решение.</u> Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}3x^2+5x-4=2x-1\\ 2x-1 \ge 0\end{cases}, (1) \quad \begin{cases}3x^2+5x-4=-(2x-1)\\ 2x-1 \ge 0\end{cases}, (2)$$

Решая первую систему, получим: $\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\\ x \ge 0{,}5\end{cases}$, т.е. $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Решая вторую систему, получим: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{109}}{6}, x_2 = \dfrac{-7-\sqrt{109}}{6}, \\ x \geq 0{,}5 \end{cases}$ т.е. $x = \dfrac{-7+\sqrt{109}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-7+\sqrt{109}}{6}$.

Уравнение вида $|f(x)| = b, b \in R$

при $b<0$ решений не имеет;

при $b=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

при $b>0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = b, \\ f(x) = -b. \end{array}\right.$

Пример 4. Решить уравнение: $||2|x-1|-3|=5$.

Решение. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$\left[\begin{array}{l} 2|x-1|-3=5, \\ 2|x-1|-3=-5, \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} |x-1|=4, \\ |x-1|=-1, \end{array}\right.$

Второе из этих уравнений корней не имеет, а первое равносильно совокупности уравнений:

$\left[\begin{array}{l} x-1=4, \\ x-1=-4 \end{array}\right.$; $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

Ответ: 5; -3.

Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$.

Пример 5. Решить уравнение: $|3x-5| = |5-2x|$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 3x-5=5-2x, \\ 3x-5=-5+2x \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0 \end{array}\right.$.

Ответ: 0; 2.

Уравнения вида: $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x)$, где $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), g(x)$ - некоторые функции, решают **методом интервалов.**

Для этого: 1) находят все точки, в которых хотя бы одна из функций $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ меняет знак; эти точки делят область допустимых значений уравнения на промежутки, на каждом из которых все функции сохраняют свой знак; 2) используя определение модуля, раскрывают модули на каждом из промежутков.

Пример 6. Решить уравнение: $\left|\,|3-x| - |x+2|\,\right| = 5$.

Решение. Найдем значения *x,* при которых выражения *3-x* и *2+x* обращаются в нуль, т.е. числа 3 и –2.Находим интервалы знакопостоянства выражений *3-x* и *2+x* : (-∞; -2); [2; 3]; (3; ∞). Решим уравнение на каждом из этих промежутков, т.е. решим равносильную совокупность систем:

$$\begin{cases} x < -2, \\ 3 - x + x + 2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2 \le x \le 3, \\ 3 - x - x - 2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 3, \\ -3 + x - x - 2 = 5 \end{cases},$$

или $\begin{cases} x < -2, \\ 5 = 5 \end{cases} \begin{cases} -2 \le x \le 3, \\ x = -2 \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ -5 = 5 \end{cases}.$

Решение первой системы совокупности - (-∞; -2); решение второй системы *x*=-2; третья система решений не имеет.

Объединяя найденные решения, получим луч: (- ∞ -2]. Ответ: (- ∞ -2].

При решении неравенств, содержащих переменную величину под знаком модуля, также можно использовать определение модуля.

Пример 7. Решить неравенство: $\left|x^2 - 2x\right| < x$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получим, что неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x \ge 0, \\ x^2 - 2x < x, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ -(x^2 - 2x) < x \end{cases} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;0] \cup [2;\infty), \\ x \in (0;3), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;2), \\ x \in (-\infty;0) \cup (1;\infty) \end{cases} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x \in [2;3), \\ x \in (1;2) \end{array}\right..$$

Объединяя полученные решения, получим $x \in (1;3)$. Ответ: (1;3).

Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств: $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$,

неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно двойному неравенству: $-g(x) < f(x) < g(x)$, или системе: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}.$

Пример 8. Решить неравенство: $\left|x^2-4x\right|<5$.

Решение. Равносильно системе неравенств: $\begin{cases} x^2-4x<5, \\ x^2-4x>-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-4x-5<0, \\ x^2-4x+5>0. \end{cases}$

Первое неравенство выполняется при $-1<x<5$, а второе при любых *x*. Тогда решение исходного неравенства является интервал (-1;5).

Ответ: (-1;5).

Пример 9. Решить неравенство: $\left|\dfrac{2x+3}{3x-2}\right|>1$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности неравенств:

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{3x-2}>1, \\ \dfrac{2x+3}{3x-2}<-1 \end{array}\right.$. Решаем неравенства этой совокупности, имеем:

$\dfrac{2x+3-(3x-2)}{3x-2}>0$; $\dfrac{5-x}{3x-2}>0$; $\dfrac{2}{3}<x<5$.

$\dfrac{2x+3+(3x-2)}{3x-2}<0$; $\dfrac{5x+1}{3x-2}<0$; $-\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{2}{3}\right),\left(\dfrac{2}{3};5\right)$.

Неравенства $\left|f_1(x)\right|+\left|f_2(x)\right|+\ldots+\left|f_n(x)\right|<g(x)$ (знак неравенства может быть любой) удобнее решать **методом интервалов**.

Пример 10. Решить неравенство: $|x|+|x-1|+|x-2|<4$.

Решение. Точки *x=0; x=1 и x=2* делят числовую ось на четыре промежутка: $(-\infty;0),[0;1),[1;2),[2;\infty)$. Решим данное неравенство на каждом из промежутков, т.е. неравенство равносильно совокупности четырех систем:

$\begin{cases} x<0, \\ -x-(x-1)-(x-2)<4 \end{cases}$, (1) $\begin{cases} 0\le x<1, \\ x-(x-1)-(x-2)<4 \end{cases}$, (2)

$\begin{cases} 1\le x<2, \\ x+(x-1)-(x-2)<4 \end{cases}$, (3) $\begin{cases} x\ge 2, \\ x+(x-1)+(x-2)<4 \end{cases}$. (4)

Решая полученные системы, получим четыре промежутка: $\left(-\frac{1}{3};0\right)\left[0;1\right),\left[1;2\right)\left[2;\frac{7}{3}\right)$.

Объединяя найденные решения, получим решение неравенства: $\left(-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Неравенство $|f(x)|<|g(x)|$ можно решать также, переходя к равносильному неравенству: $f^2(x)<g^2(x)$

Пример 11. Решить неравенство: $|2x-1|<|3x+1|$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству: $(2x-1)^2<(3x+1)^2$.
$4x^2-4x+1<9x^2+6x+1$, $5x^2+10x>0$, $x<-2$; $x>0$.   Ответ: $(-\infty;-2),(0;\infty)$.

Задания для самостоятельной работы:

Решить уравнения и неравенства:

1) $|x|=3$; 2) $|x|<5$; 3) $|x|>14$; 4) $|x|=x$; 5) $|x|<x$; 6) $|x|>x$; 7) $|x+3|<-5$; 8) $|2x|>-13$; 9) $|3x-5|=|5-2x|$; 10) $x^2-4|x-3|-7x+11=0$; 11) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$;

12) $|x-2|+|3-x|=6$; 13) $|2-|1-|x|||=1$; 14) $|x^2-9|+|x-2|=5$;

15) $x^2+5|x|-24>0$; 16) $x^2-4|x+1|+5x+3>0$; 17) $|1-3x|-|2x+3|\geq 0$;

18) $|2x+1|-|5x-2|\geq 1$; 19) $|3x-2|<2x-1$; 20) $|2x+7|\geq 7x-2$; 21) $\left|\frac{2x+3}{3x-1}\right|>1$;

22) $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|\leq 3$; 23) $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}\geq 1$; 24) $\left|\frac{2-3|x|}{1+|x|}\right|>1$;

25) $||x^3+x-3|-5|\leq x^3-x+8$; 26) $||x^2-3x+2|-1|>x-2$

Проверочная работа

Вариант 1

1) $|x+2|=2(3-x)$;
2) $x^2+3x+|x+3|=0$;
3) $|x^2-4x|<-5$;
4) $|2x-3|>3x+1$;
5) $\left|\frac{x+3}{x-2}\right|\leq 2$;
6) $|2x+5|-|3x-4|\leq 2x-4$

Вариант 3

1) $|3x-2|+x=11$;
2) $2x^2-5|x|+3=0$;
3) $||x-1|+2|+1=0$;
4) $|x+8|<3x-1$;
5) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2$;
6) $|3x-1|+|2x-3|-|x+5|<2$

Вариант 2

Вариант 4

1) $|x| = -3x-5$;

2) $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$;

3) $|x^2 - 9| + 9 < 0$;

4) $|x-2| < 2x-10$;

5) $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right| > 2$;

6) $|2x-5| - 3|x+4| < 3$

1) $|4-5x| = 5x-4$;

2) $x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0$;

3) $\big|2x|x-5| - 2\big| + 3 < 0$;

4) $|2x+1| \geq 7x-2$;

5) $\left|\dfrac{x+4}{x+2}\right| \leq 1$;

6) $|x+1| - |x+2| - |x+3| + 2|x-4| > 1$

6. Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональные уравнения

<u>*Определение.*</u> **Иррациональными** называют уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком корня. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной.

При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному. При возведении обеих частей уравнения в четную степень получается уравнение, которое является следствием исходного, поэтому возможно появление посторонних корней. Каждый из найденных корней должен быть проверен, является ли он решением исходного уравнения, или нет.

При решении уравнений вида $\sqrt[2k]{f(x)} = \varphi(x)$ можно избежать проверки, заменив уравнение равносильной ему системой $\begin{cases} f(x) = \varphi^{2k}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$, которая равносильна системе

$$\begin{cases} f(x) = \varphi^{2k}(x), \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Решить уравнение: $\sqrt{3+x} = 3-x$.

<u>Решение.</u> Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 3+x = (3-x)^2, \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$.

Корнями уравнения $3+x=(3-x)^2$ являются числа $x_1=1$ и $x_2=6$. Число 6 – посторонний корень. <u>Ответ:</u> 1.

Пример 2. Решить уравнение: $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$.

<u>Решение.</u> Возведя обе части уравнения в квадрат и проведя преобразования, получим уравнение $2\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 60 - 3x$. После возведения в квадрат обеих его частей получим уравнение $4(2x^2 + 3x - 5) = (60 - 3x)^2$, являющееся следствием

исходного уравнения. Корни этого уравнения x_1=10 и x_2=362. Проверкой убеждаемся, что 10 удовлетворяет уравнению, а 362 является посторонним корнем.

Ответ: 10.

Пример 3. Решить уравнение: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в третью степень, получим равносильное уравнение $3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1.$ По условию $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$. Подставляя его в полученное уравнение, получим уравнение $3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1$, являющееся следствием исходного уравнения, поскольку оно может иметь корень, который не обязательно удовлетворяет равенству $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$. Преобразуем уравнение к виду: $\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x.$ Возведем уравнение в третью степень, получим уравнение: $(2x-1)(x-1)=(1-x)^3$. Корни этого уравнения x_1=0 и x_2=1. Проверка показывает, что 0 – посторонний корень, а 1 удовлетворяет ему.

Ответ: 1.

Пример 4. Решить уравнение: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$.

Решение. Уединяя один из радикалов и возводя обе части уравнения в квадрат, получаем: $(\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2})^2=(\sqrt{x-1})^2$, отсюда

$7x-2=2\sqrt{5x-1}\cdot\sqrt{3x-2}$.

Снова возводим обе части уравнения в квадрат, после преобразований получаем уравнение: $11x^2-24x+4=0$, $x_1=\frac{2}{11}$, $x_2=2$.

Для выявления посторонних корней найдем область допустимых значений уравнения: $\begin{cases}5x-1\geq 0,\\ 3x-2\geq 0,\\ x-1\geq 0,\end{cases}$ т.е. $x\geq 1$.

$\frac{2}{11}$ не принадлежит ОДЗ исходного уравнения. Проверкой убеждаемся, что 2 является корнем данного уравнения.

Ответ: 2.

Заметим, что при решении некоторых уравнений применение стандартного приема (возведения в степень) приводит к довольно громоздким вычислениям. В этих случаях может быть полезно сначала найти область допустимых значений неизвестного.

Пример 5. Решить уравнение: $\sqrt[4]{x-2}-\sqrt[6]{-x^2+3x-2}=0$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\begin{cases}x-2\geq 0,\\ -x^2+3x-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2,\\ x^2-3x+2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2,\\ 1\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Область допустимых значений неизвестного состоит только из одного числа 2. Подставим это значение в уравнение:

$\sqrt[4]{2-2}-\sqrt[6]{-2^2+3\cdot 2-2}=0$ - получили верное числовое равенство. Следовательно, 2 является корнем уравнения. <u>Ответ:</u>2.

Пример 6. Решить уравнение: $2x^2-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+6$.

<u>Решение.</u> $2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0$.

Пусть $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$, тогда получим уравнение: $y^2-2y-8=0$, корни которого: $y_1=4$, $y_2=-2$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$\sqrt{2x^2-3x+2}=4$, $\sqrt{2x^2-3x+2}=-2$.

Корни первого уравнения $x_1=3{,}5$ и $x_2=-2$.

Второе уравнение совокупности корней не имеет. Проверкой убеждаемся, что 3,5 и -2 являются корнями исходного уравнения. <u>Ответ:</u> 3,5; -2.

Задания для самостоятельной работы

Доказать, что уравнения не имеют решений (1-5). 1) $\sqrt{x+2}=-2$;

2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3}=0$; 3) $\sqrt{-1-x}=\sqrt[3]{x-5}$; 4) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=2$; 5) $5\sqrt{x}-3\sqrt{-x}+\frac{17}{x}=4$.

Решить уравнения (6-16):

6) $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x-2}=0$; 7) $\sqrt{2x^2-x+10}=2+x$; 8) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$; 9) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x-1}}=2$; 10) $\sqrt{\frac{3x+7}{3x+2}}+4\sqrt{\frac{3x+2}{3x+7}}=4$; 11) $\sqrt[3]{(x-1)^4}-6\sqrt[3]{(x-1)^2}+9=0$;

12) $\sqrt{5x-4}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$; 13). $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$; 14). $\frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}}=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}}$;

15) $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x+\sqrt{5+x=0}}$; 16) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

Проверочная работа

Вариант 1

1) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$; 2) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=2$; 4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$;

5) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$; 6) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

Вариант 2

1) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$ 2) $3+\sqrt{3x^2-4x+2}=2x$; 3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$;

4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=\sqrt{2x-8}$; 5) $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$; 6) $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$

Вариант 3

1) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0$; 2) $\sqrt{8-6x-x^2}-x=6$; 3) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$;

4) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}-\sqrt{8x-7}=0$; 5) $3x+7=\sqrt{x^2-3x+5}+x^2$;6) $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{5}$

Вариант 4

1) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; 2) $\sqrt{6-4x-x^2}-x=4$; 3) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}-1=0$;

4) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$; 5) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$; 6) $\sqrt[3]{x^2-2x-3}=x+1$.

Иррациональные неравенства

<u>*Определение*</u>. Неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными.**

Основным методом решения таких неравенств является метод возведения в степень. При этом неравенство сводится к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

При возведении в одну и ту же нечетную степень обеих частей неравенства получается неравенство, равносильное данному, поэтому

неравенство $\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)}$, где $n\in N$, равносильно неравенству $f(x)<g(x)$.

неравенство $\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x)$, где $n\in N$, равносильно неравенству $f(x)<g^{2n+1}(x)$.

Неравенство $\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x)$, где $n\in N$, равносильно неравенству $f(x)>g^{2n+1}(x)$.

После возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень получится неравенство, равносильное исходному лишь в том случае, когда каждая часть неравенства неотрицательна. Исходя из этого

неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}<\sqrt[2n]{g(x)}$,где $n\in N$, равносильно системе $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$,

неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)$,где $n\in N$, равносильно системе $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^{2n}(x) \end{cases}$,

(если знак неравенства нестрогий, то знак второго и третьего неравенств системы также нестрогий);

неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$ равносильно совокупности двух систем неравенств $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases}$, $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$.

В первой системе неравенство $f(x) \ge 0$ можно опустить, так как оно является следствием третьего неравенства этой системы.

Пример 1. Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{x+4}}{3-2x-x^2} < 0$.

Решение. Числитель дроби неотрицателен, тогда знаменатель должен быть меньше нуля и неравенство равносильно системе:

$\begin{cases} x+4>0, \\ 3-2x-x^2<0, \end{cases}$; $\begin{cases} x > -4, \\ x \in (-3;-1) \end{cases}$; $x \in (-3;-1)$.

Ответ: (-3;-1).

Пример 2. Решить неравенство: $\sqrt[4]{x+2} > \sqrt[4]{8-x^2}$.

Решение. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} 8-x^2 \ge 0, \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases}$.

Решаем систему: $\begin{cases} |x| \le 2\sqrt{2}, \\ x^2+x-6>0 \end{cases}$, $\begin{cases} -2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}, \\ x<-3, x>2 \end{cases}$, следовательно, $2 < x \le 2\sqrt{2}$ **.**

Решением неравенства служит промежуток (2; $2\sqrt{2}$].　　　　Ответ: (2; $2\sqrt{2}$].

Пример 3. Решить неравенство: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}} > -1$.

Решение. Неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x+1}{x} > -1$.

$\dfrac{x+1}{x}+1>0$, $\dfrac{2x+1}{x}>0$. Решаем неравенство методом интервалов.

Решением неравенства являются два промежутка (-∝;-0,5) и (0;+∝)

Ответ: (-∝; -0,5) , (0;+∝)

Пример 4. Решить неравенство: $\sqrt{x-1} < 3-x$ **.**

Решение. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 3-x>0, \\ x-1<(3-x)^2 \end{cases}$.

Решая систему, получим: $\begin{cases} x \ge 1 \\ x<3 \\ x<2, x>5 \end{cases}$. Решением системы, а значит и решением неравенства, является промежуток [1;2).　　　　Ответ: [1;2).

Пример 5. Решить неравенство: $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-3x-10>(x-2)^2 \end{cases} \quad (1) \quad , \qquad \begin{cases} x-2<0 \\ x^2-3x-10\ge 0 \end{cases}. \ (2)$$

Решая первую систему, получим: $\begin{cases} x\ge 2 \\ x>14 \end{cases}$, $x>14$.

Решая вторую систему, получим: $\begin{cases} x<2 \\ x\ge 5, x\le -2. \end{cases}$ $x\le -2$.

Множеством решений является объединение множеств решений двух систем, т.е. два промежутка (-∞; 2] и [14;+∞).

Ответ: (-∞; 2] , [14;+∞).

Пример 6. Решить неравенство: $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$.

Решение. Неравенство равносильно системе: $\begin{cases} 25-x^2\ge 0, \\ x^2+7x\ge 0, \\ \left(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}\right)^2>3^2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -5\le x\le 5, \\ x\le -7, \quad x\ge 0, \\ 25-x^2+2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x}+x^2+7x>9 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0\le x\le 5, \\ 2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x}>-16-7x \end{cases}.$$

Так как при 0≤ x ≤ 5, –16-7x<0, а $2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x}\ge 0$, то неравенство $2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x}>-16-7x$ верно при любых 0≤ x ≤ 5.

Решением системы, а значит и исходного неравенства, являются все числа из промежутка 0≤ x ≤ 5. Ответ: [0;5].

Пример 7. Решить неравенство: $5\sqrt{x^2+5x+28}>x^2+5x+4$ **.**

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y=\sqrt{x^2+5x+28}$, тогда $x^2+5x+4=y^2-24$, неравенство преобразуется к виду: $y^2-5y-24<0$, решение которого $-3<y<8$. Таким образом, имеем $-3<\sqrt{x^2+5x+28}<8$.

Так как $\sqrt{x^2+5x+28}\ge 0$ при всех допустимых значениях *x,* то неравенство $\sqrt{x^2+5x+28}>-3$ выполняется при всех x из области определения исходного неравенства, поэтому достаточно решить неравенство $\sqrt{x^2+5x+28}<8$. Это неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2+5x+28\ge 0, \\ x^2+5x+28<64 \end{cases}$.

Неравенство $x^2+5x+28\ge 0$ выполняется при любых x, так как квадратный трехчлен $x^2+5x+28$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент.

Решаем второе неравенство, получим: $x^2+5x-36<0$, $(x+9)(x-4)<0$, решение этого неравенства, а значит и решение исходного неравенства: (-9;4).

Ответ: (-9;-4).

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенства:

1) $\sqrt{x^2+x-6}>-1$; 2) $\sqrt[4]{7-2x}<-5$; 3) $(x-1)\sqrt{2+x-x^2}\ge 0$; 4) $\frac{3x^2-2x-1}{\sqrt{1+2x}}>0$;

5) $2\sqrt{2x+1}>3\sqrt{-x^2-x+6}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{2x-2}{3x+6}}<1$; 7) $1-x>\sqrt{x+5}$; 8) $x-2<\sqrt{7-2x}$

9) $\sqrt{2x-1}<x+2$; 10) $\sqrt{(x+2)(x-1)}\ge 2(x+2)$; 11) $\sqrt{x^2-x-12}<x$; 12) $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$;

13) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\ge 1$; 14) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}>7$; 15) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\ge 2$;

16) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8$; 17) $x^2-\sqrt{x^2+4}-8\le 0$; 18) $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}+\sqrt{1-\frac{2x}{2+x}}\ge\frac{10}{3}$;

19) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

Проверочная работа

1 Вариант

1) $\sqrt{x}<2$; 2) $\sqrt{2x+1}>-8$; 3) $\frac{\sqrt{5-2x}}{2x^2-3x-2}>0$;

4) $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$; 5) $\sqrt{2x+1}<\frac{2x+2}{2-x}$

3 Вариант

1. $\sqrt{1-x^2}>-8$; 2. $\sqrt{x-3}<5$; 3. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2}<0$;

4. $x+4<\sqrt{-x^2-8x-12}$; 5. $\sqrt{x^2-3x+2}<5-x$

2 Вариант

1) $\sqrt{3x-8}<-2$; 2) $\sqrt{x^2-x}>\sqrt{2}$;

3) $\frac{\sqrt{x+3}}{4-3x-x^2}\ge 0$; 4) $\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$;

5) $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$

4 Вариант

1) $\sqrt{2x-8}<-5$; 2) $\sqrt[3]{x+2}\le -5$;

3) $\frac{\sqrt{4x+5}}{2x^2+x-1}>0$; 4) $\sqrt{x^2-5x-24}>x+2$;

5) $\frac{x-1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$

7. Показательные уравнения и неравенства
Показательные уравнения

<u>Определение.</u> Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются **показательными.**

Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x=b$ (где $a>0$, $a\neq 0$), при $b>0$ это уравнение имеет единственный корень $x=\log_a b$.

Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, (где $a>0$, $a\neq 0$) основано на том, что оно равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Выделяют три основных метода решения показательных уравнений:

1) метод приведения обеих частей уравнения к одному основанию (или уравнивания показателей);

2) метод введения новой переменной;

3) метод оценки.

Пример 1. Решить уравнение: $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} = 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} = 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}$.

Это уравнение равносильно уравнению $\frac{3x-1}{3(x-1)} = \frac{3(x-3)}{3x-7}$.

Решая это уравнение, получим $x = \frac{5}{3}$. Ответ: $x = \frac{5}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение: $5^{2x-1} = 7^{3-x}$.

Решение. Представим $7 = 5^{\log_5 7}$, тогда $5^{2x-1} = 5^{\log_5 7^{3-x}}$. Это уравнение равносильно уравнению: $2x - 1 = (3-x)\log_5 7$.

$x(2 + \log_5 7) = 1 + 3\log_5 7$, отсюда $x = \frac{1 + 3\log_5 7}{2 + \log_5 7}$.

Ответ: $x = \frac{1 + 3\log_5 7}{2 + \log_5 7}$.

Пример 3. Решить уравнение: $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

Решение. Сгруппируем члены, содержащие степени с основанием 5 и с основанием 3.

$7 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}$ Вынесем общий множитель за скобки

$3^{x+1}(7 - 3^3) = 5^{x+2}(1-5)$, $3^{x+1}(-20) = 5^{x+2}(-4)$, $5 \cdot 3^{x+1} = 5^{x+2}$,

$3^{x+1} = 5^{x+1}$. Разделим уравнение на 3^{x+1}, получим

$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = 1$, $x+1=0$, т.е. $x= -1$. Ответ: $x = -1$.

Уравнение вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = t$ сводится к квадратному уравнению $At^2 + Bt + C = 0$.

Пример 4. Решить уравнение: $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$.

Решение. Пусть $5^x = t$, тогда $5^{2x} = (5^x)^2 = t^2$ данное уравнение примет вид: $t^2 - 2t - 15 = 0$, корни этого уравнения: $t_1 = 5$; $t_2 = -3$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $5^x = 5$, $5^x = -3$.

Второе уравнение этой совокупности корней не имеет, так как $5^x > 0$ при любом x. Из первого уравнения находим, что 1 – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

Пример 5. Решить уравнение: $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

Решение. $3\cdot 4^{2x} + 2\cdot 9^{2x} = 5\cdot 4^x\cdot 9^x$. Разделив обе части уравнения на $9^{2x} \neq 0$, получим $3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$. Пусть $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, тогда уравнение примет вид $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{2}{3}$. Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ и $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$. Решая их, находим: $x_1=0$, $x=0{,}5$. Ответ: 0; 0,5.

Пример 6. Решить уравнение: $5^x = 6 - x$.

Решение. Применим метод оценки.

Очевидно, что $x=1$ является корнем уравнения, так как $5^1=5$, $6-5=1$.

Функция $y = 5^x$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = 6-x$ – убывает на всей числовой прямой, значит уравнение может иметь не более одного корня. Таким образом, уравнение имеет единственный корень 1.

Ответ: 1.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение:

1) $3^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}$; 2) $3^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$; 3) $\frac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5\cdot 0{,}04^{x-1}$; 4) $3^{2x+1} - 10\cdot 3^x + 3 = 0$;

5) $2^x - 2 = 15\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$; 6) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; 7) $2^{3\sqrt{x}} + 3\cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20$;

8) $4^{2x} - 3^{2x-0{,}5} = 3^{2x+0{,}5} - 2^{4x-1}$; 9) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1} = 35^{0{,}5(5x+6)}$;10) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$;

11) $4^{x+1{,}5} + 9^x = 6^{x+1}$; 12) $4^{-\frac{1}{x}} - 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$; 13) $3^{2x-1} = 5^{3-x}$; 14) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

Проверочная работа

Вариант 1

1) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; 2) $3^{4x+8} - 4\cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$;

3) $5^{2x} - 7^x - 35\cdot 5^{2x} + 35\cdot 7^x = 0$;

4) $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$; 5) $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \frac{12}{7} = 2^x$

Вариант 3

1) $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$; 2) $4^{x+1{,}5} + 2^{x+2} = 4$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$;

4) $6\cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13\cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$; 5) $3^x + 4^x = 5^x$.

Вариант 2

1) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot\left(10^{x-1}\right)^5$; 2) $5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$;

3) $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-2}=2\cdot 3^{2x-1}+1$;

4) $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$; 5) $-\frac{1}{2}-x=2^x$

Вариант 4

1) $5^{\sqrt[x]{64}}=625$; 2) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$;

3) $2\cdot 16^x-2^{4x}-4^{2x-2}=15$;

4) $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0$; 5) $2^{x+1}+x=-1{,}5$.

Показательные неравенства

Определение. Неравенства, содержащие переменную в показателе степени, называются **показательными.**

Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, где $a>0$, $a\neq 0$, основано на следующих утверждениях:

если $a>1$, то неравенство $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)<g(x)$.

если $0<a<1$, то неравенство $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)>g(x)$.

Пример 1. Решить неравенство: $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}>5\cdot 0{,}04^{x-1}$.

Решение. $\frac{(5)^{-(x-0{,}5)}}{5^{0{,}5}}>5\cdot\left(5^{-2}\right)^{x-1}$, после преобразований получаем: $5^{-x}>5^{-2x+3}$, так как $5>1$, то неравенство равносильно неравенству $-x>-2x+3$, отсюда $x>3$.

Ответ $(3;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство: $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

Решение. $4\cdot 2^{x+2}-8\cdot 2^x-16\cdot 2^x>5\cdot 5^x-25\cdot 5^x$,

$2^x(4-8-16)>5^x(5-25)$,

$2^x<5^x$, разделим обе части неравенства на 5^x ($5^x>0$), получим:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x<1$, так как $0<\frac{2}{5}<1$, то $x>0$. Ответ: $(0;+\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство: $4^{-x+0{,}5}-7\cdot 2^{-x}<4$.

Решение. Заметим, что $4^{-x+0{,}5}=\left(2^2\right)^{-x+0{,}5}=2^{-2x+1}=2\cdot 2^{-2x}$.

Обозначим $2^{-x}=t$, $t>0$, получим неравенство $2t^2-7t-4<0$.

$\begin{cases}2(t+0{,}5)(t-4)<0\\ t>0\end{cases}$, $0<t<4$. Исходное неравенство равносильно неравенству

$2^{-x}<4$. Так как $2>1$, то $-x<2$, $x>-2$. Ответ: $(-2;+\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство: $3\cdot 16^x + 37\cdot 36^x \ge 26\cdot 81^x$.

<u>Решение</u>. $3\cdot 4^{2x} + 37\cdot 4^x\cdot 9^x \ge 26\cdot 9^{2x}$. Разделим обе части неравенства на 9^{2x}, получим: $3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 37\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x - 26 \ge 0$.

Пусть $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, тогда неравенство примет вид: $3t^2 + 37t - 26 \ge 0$, корни квадратного трехчлена: $t_1 = \frac{2}{3},\ \ t_2 = -13.$ Неравенство равносильно неравенству $3\left(t - \frac{2}{3}\right)(t+13) \ge 0$, решение которого: $t \ge \frac{2}{3}$ и $t \le -13$. Необходимо решить совокупность двух неравенств: $\left(\frac{4}{9}\right)^x \le -13$, $\left(\frac{4}{9}\right)^x \ge \frac{2}{3}$.

Решаем первое неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \ge \frac{2}{3}$, так как $0 < \frac{2}{3} < 1$, то $2x \le 1$, $x \le 0{,}5$.

Второе неравенство решений не имеет. <u>Ответ:</u> $(-\infty;0{,}5]$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство:

1) $2^{9x-x^3} > 1$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$; 3) $4^x + 2^{x+1} - 6 \le 0$; 4) $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x \le 7\cdot 10^x$; 5) $2^x + 2^{-x} < 3$;

6) $5\cdot 2^{\sqrt{x}} - 3\cdot 2^{\sqrt{x-1}} \le 56$; 7) $4^x - 3^{x-0{,}5} + 2^{2x-1} - 3^{x+0{,}5} > 0$; 8) $(1{,}2)^{|x+7|} < (1{,}2)^{|x^2-3x+2|}$;

9) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$; 10) $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+1} - 2 \le 0$.

Проверочная работа

Вариант 1

1) $0{,}4^{x^2-x-20} > 1$; 2) $2^{-2x-2{,}5} < \frac{0{,}5^{x(x+3)}}{2^{0{,}5}}$;

3) $2^x + 2^{2x+2} - 3\cdot 2^{2x+1} > -3$;

4) $4^x - 6\cdot 2^x + 8 < 0$; 5) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x < 0$

Вариант 2

1) $(0{,}25)^{6x-x^2} > (0{,}25)^5$;

2) $(3{,}24)^{2\sqrt{x-5}} \ge \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x+1}}$;

3) $3^{2x+3} + 3^{2x} - 30 < 0$;

4) $6^{x+1} + 3^{x+1} > 3^{x+2} - 6^x + 3^x$;

Вариант 3

1) $0{,}1^{4x^2-2x-2} \le 0{,}1^{2x-3}$; 2) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}} - 64^{\frac{1}{3}}\cdot(0{,}25)^{-2} > 0$;

3) $4^{x+1} > 7\cdot 2^x + 2$; 4) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \ge 448$;

5) $9\cdot 4^{\frac{1}{x}} - 5\cdot 6^{\frac{1}{x}} \le 4\cdot 9^{\frac{1}{x}}$

Вариант 4

1) $6{,}3^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$; 2) $4^{4(x+1)} - \sqrt[5]{16^{x+100}} \le 0$;

3) $9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 > 0$;

4) $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} - 6\cdot 4^{x+1} + 0{,}5\cdot 9^{x+1} \le 0$;

5) $2\cdot 25^x - 5\cdot 10^x + 2\cdot 4^x \ge 0$

5) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}\geq 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$

8. Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмические уравнения

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида: $\log_a f(x)=b,$ где $a>0$, $a\neq 1$, оно равносильно уравнению $f(x)=a^b$. В случае, когда $f(x)=x$, логарифмическое уравнение $\log_a x=b,$ имеет решение $x=a^b$.

Пример 1. Решить уравнение: $\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{x}\right)=2$.

<u>Решение.</u> Исходное уравнение равносильно уравнению: $\left(-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, откуда x = -4.

<u>Ответ:</u> -4.

Уравнение вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$, равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0, \\ f(x)>0. \end{cases}$

В этой системе можно опустить одно из неравенств, так как каждое из них вытекает из уравнения и другого неравенства, поэтому уравнение равносильно одной из систем:

$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$.

Выбор определяется тем, какое из неравенств $f(x)>0$ или $g(x)>0$ решается проще.

При решении уравнений данного вида можно решить уравнение $f(x)=g(x)$, которое может иметь корни посторонние для исходного уравнения, проверить каждый из полученных корней подстановкой в исходное уравнение.

Пример 2. Решить уравнение: $\log_{0,1}\left(\frac{2x^2-54}{x+3}\right)=\log_{0,1}(x-4)$.

<u>Решение.</u> Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-4>0, \\ \frac{2x^2-54}{x+3}=x-4 \end{cases}$.

Решаем полученную систему:

$\begin{cases} x>4, \\ \frac{2x^2-54-(x-4)(x+3)}{x+3}=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>4, \\ \frac{x^2+x-42}{x+3}=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>4, \\ \left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases}$; x=6. <u>Ответ</u>:6.

Пример 3. Решить уравнение: $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению:

$$\log_7(x-2)+\log_7(2x-7)=\log_7 7+\log_7(x+2),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 2x-7>0, \\ x+2>0, \\ \log_7((x-2)(2x-7))=\log_7 7(x+2) \end{cases}; \begin{cases} x>2, \\ x>3{,}5, \\ x>-2, \\ (x-2)(2x-7)=7(x+2) \end{cases}; \begin{cases} x>3{,}5, \\ 2x^2-18x=0 \end{cases}; \begin{cases} x>3{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=9 \end{array}\right. \end{cases}; x=9.$$

Ответ: 9.

Если в уравнении содержатся логарифмы с разными основаниями, то прежде всего следует свести все логарифмы к одному основанию. Для этого используется формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}, a>0, a\neq 1, c>0<c\neq 1, b>0.$$

Уравнения вида $f(\log_a x)=0$ решаются с помощью **подстановки** $\log_a x=t$. Она приводит уравнение к виду: $f(t)=0$.

Пример 4: Решить уравнение: $\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{0,5} x=2$.

Решение. Область допустимых значений уравнения – множество всех положительных чисел.

Поскольку $\log_{\sqrt{2}} x=2\log_2 x$, $\log_{0,5} x=-\log_2 x$, то исходное уравнение равносильно уравнению: $4\log^2_2 x+3\log_2 x-\log_2 x=2$.

Обозначим $t=\log_2 x$, тогда уравнение можно записать в виде:

$4t^2+2t-2=0$; $2t^2+t-1=0$; t_1=-1, t_2=0,5.

Данное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x=-1 \\ \log_2 x=0{,}5 \end{array}\right.$, отсюда $\left[\begin{array}{l} x=0{,}5 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$. Ответ: 0,5; $\sqrt{2}$.

Пример 5. Решить уравнение: $\log_3 x=1+\log_x 9$.

Решение. Переходя к основанию 3, имеем: $\log_x 9=\frac{\log_3 9}{\log_3 x}=\frac{2}{\log_3 x}$.

Обозначим, $t=\log_3 x$ запишем исходное уравнение в виде: $t=1+\frac{2}{t}$. Корни этого уравнения: 2 и –1.

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2,\\ \log_3 x = -1\end{array}\right.$, откуда $x_1 = 9, x_2 = \dfrac{1}{3}$. Ответ: $9; \dfrac{1}{3}$.

Уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно одной из систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x),\\ g(x) > 0,\\ h(x) > 0,\\ h(x) \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x),\\ f(x) > 0,\\ h(x) > 0,\\ h(x) \neq 1 \end{cases}.$$

Уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$ равносильно одной из систем:

$$\begin{cases} h(x) = p(x),\\ f(x) > 0,\\ p(x) > 0,\\ p(x) \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} h(x) = p(x),\\ f(x) > 0,\\ h(x) > 0,\\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

Пример 6. Решить уравнение: $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^3+6>0,\\ x^2-1>0,\\ x^2-1\neq 1,\\ x^3+6 = 4x^2-x. \end{cases}$

Решая уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$, находим, что оно имеет три корня –1; 2; 3. Числа 2 и 3 являются решениями данной системы, а следовательно, и исходного уравнения.

Ответ:2;3.

Пример 7. Решить уравнение: $\log_{x^3+x}(x^2-4) = \log_{4x^2-6}(x^2-4)$.

Решение. Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^3+x = 4x^2-6,\\ x^2-4>0,\\ x^3+x>0,\\ x^3+x\neq 1. \end{cases}$

Уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$ имеет три корня –1; 2; 3. Из них только число 3 удовлетворяет всем требованиям системы, следовательно исходное уравнение имеет единственный корень – число 3.

Ответ: 3.

При решении показательно-логарифмических уравнений, содержащих как показательную, так и логарифмическую функцию, иногда целесообразно логарифмировать обе части уравнения.

Пример 8. Решить уравнение: $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$.

Решение. Так как логарифмическая функция определена при x>0, то левая и правая части данного уравнения положительны. Логарифмируя их по основанию 10, получим:

$$\lg x^{\frac{\lg x+5}{3}}=\lg 10^{\lg x+1};\ \left(\frac{\lg x+5}{3}\right)\lg x=\lg x+1.$$

Обозначим $t=\lg x$, уравнение примет вид: $t^2+5t=3t+3$; $t^2+2t-3=0$; t_1=-3, t_2=1. Откуда $x=10^{-3}$; x=10. Ответ: 0,001; 10.

При решении логарифмических уравнений может быть полезен **метод оценки.**

Пример 9. $\log_2 x=3-x$.

Решение. *1 способ.* В одной и той же систем координат строим графики функций $y=\log_2 x$ и $y=3-x$. Абсцисса точки пересечения графиков функций равна примерно 2. Проверкой убеждаемся, что 2 - единственный корень уравнения.

2 способ. Очевидно, что 2 – корень уравнения, так как $\log_2 2=1$ и 3-2=1, т.е. уравнение обращается в верное числовое равенство. Так как функция $y=\log_2 x$ возрастает, а функция $y=3-x$ - убывает, то заданное уравнение может иметь только один корень, т.о. 2 –единственный корень данного уравнения. Ответ: 2.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение: 1) $\lg(2x-5)^2=0$; 2) $\log_4(\log_3(\log_3(\log_2 x)))=0,5$;

3) $\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$; 4) $2\lg x^2-\lg^2(-x)=4$;

5) $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$; 6) $\log_x 2+\log_2 x=2,5$; 7) $\log_9^2 x-5\log_3 x+21=0$;

8) $\log_3^2 x+\log_3 x+1=\dfrac{7}{\log_3\frac{x}{3}}$; 9) $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\dfrac{2}{9}\right)=\log_5 0,2$; 10) $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$;

11) $\log_{0,1}+1=x^2$; 12) $6^{\log_6 x}+x^{\log_6 x}=12$; 13) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$;

14) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$; 14) $\dfrac{\lg 2+\lg(4-5x-6x^2)}{\lg\sqrt[3]{2x-1}}=3$

Проверочная работа

Вариант 1

1) $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2-4x+3}{4}=-2$;

2) $\log_{x-6}(x^2-5)=\log_{x-6}(2x+19)$;

3) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$;

Вариант 2

1) $\log_2(x^2+4x+3)=3$;

2) $\log_3(2-x)-\log_3(2+x)-\log_3 x+1=0$;

3) $\log_{x-2}(2x-9)=\log_{x-2}(23-6x)$;

4) $x^{1-\lg x}=0{,}01$; 5) $\lg^2 x-\lg x+1=\dfrac{9}{\lg 10x}$.

4) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$; 5) $\log_3^2 x+3\log_3 x+9=\dfrac{37}{\log_3 \frac{x}{27}}$.

Вариант 3

1) $\log_3((x-1)(2x-1))=0$;

2) $x^{1-\log_5 x}=0{,}04$;

3) $\lg(3x^2-17x+2)-\lg(x^2-6x+1)=\lg 2$;

4) $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2$;

5) $\lg^2 x-2\lg x+4=\dfrac{9}{\lg 100x}$.

Вариант 4

1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{6}}}} x^2=-\dfrac{2}{3}$; 2) $0{,}1x^{\lg x-2}=10^2$;

3) $\lg x+\lg(1+x)=\lg(5-6x)-\lg 2$;

4) $\log_{5x-2} 2+2\log_{5x-2} x=\log_{5x-2}(x+1)$;

5) $\lg^2 x+\log_3 x+1=\dfrac{7}{\lg \frac{x}{10}}$.

Логарифмические неравенства

При a>1 неравенство вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$

Первые два неравенства системы задают область определения исходного неравенства. Можно опустить первое неравенство, так как оно следует из второго и третьего. Поэтому

при a>1 неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$;

при 0<a<1 неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g(x) \end{cases}$.

В этой системе второе неравенство можно опустить, так как оно следует из первого и третьего, поэтому

при 0<a<1 неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$.

Пример 1. Решить неравенство: $\log_{0,5}\dfrac{5x-3}{x+2}>1$.

<u>Решение.</u> Так как $1=\log_{0,5} 0{,}5$, то заданное неравенство можно переписать так: $\log_{0,5}\dfrac{5x-3}{x+2}>\log_{0,5} 0{,}5$. Так как основание логарифма 0<0,5<1, то неравенство равносильно системе: $\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2}<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{5x-3}{x+2}>0. \end{cases}$.

Неравенство $\frac{5x-3}{x+2}>0$ выполняется при $-\infty<x<-2$ и $\frac{3}{5}<x<+\infty$.

Решаем неравенство $\frac{5x-3}{x+2}<0{,}5$; $\frac{2(5x-3)-(x+2)}{x+2}>0$; $\frac{9x-8}{x+2}>0$;

$-\infty<x<-2$ и $\frac{8}{9}<x<+\infty$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-\infty<x<-2,\\ \frac{3}{5}<x<+\infty,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-\infty<x<-2,\\ \frac{8}{9}<x<+\infty.\end{array}\right.\end{cases};\qquad x\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{8}{9};+\infty\right)$$

Ответ: $(-\infty;-2);\left(\frac{8}{9};+\infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство: $\log_2\frac{4}{x+3}>\log_2(2-x)$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}2-x>0,\\ \frac{4}{x+3}>2-x\end{cases};\quad \begin{cases}x<2,\\ \frac{(x+2)(x-1)}{x+3}>0\end{cases};\quad \begin{cases}x<2,\\ \left[\begin{array}{l}-3<x<2,\\ x>1\end{array}\right.\end{cases};\qquad x\in(-3;-2);\ (1;2).$$

Ответ: (-3;-2), (1;2).

Пример 3. Решить неравенство: $\log_{0,5}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$.

Решение. Поскольку основание логарифма меньше единицы, то данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0,\\ \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1,\\ \frac{x^2+x}{x+4}>0\end{cases};\quad \begin{cases}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1,\\ \frac{x^2+x}{x+4}>0\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{x^2+x}{x+4}>6,\\ \frac{x^2+x}{x+4}>0\end{cases};\quad \frac{x^2+x}{x+4}>6;\quad \frac{x^2+x}{x+4}-6>0\quad \frac{x^2-5x-24}{x+4}>0;$$

$\frac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0$. Решая неравенство методом интервалов, находим его решение

$-4<x<-3$; $8<x<+\infty$. Ответ: (-4;-3), (8;+∞) .

Неравенства вида $f(\log_a x)\geq 0$ при помощи замены $t=\log_a x$ сводится к неравенству $f(t)\geq 0$.

Пример 4. Решить неравенство: $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$.

Решение. Область допустимых значений переменной $x>1$.

По свойствам логарифма имеем: $\log_{0,5}(x-1)=-\log_2(x-1)$.

$\log_2(x-1)^2=2\log_2|x-1|=2\log_2(x-1)$, так как $x>1$.

Получим неравенство. $4\log_2^2(x-1)+\log_2(x-1)>5$.

Обозначим $t=\log_2(x-1)$, тогда неравенство примет вид: $4t^2+t-5>0$.

Откуда находим: $t<-\frac{5}{4}, t>1$.

Решая совокупность неравенств $\log_2(x-1)<-\frac{5}{4}$; $\log_2(x-1)>1$.

Из первого неравенства получаем $0<x-1<2^{-\frac{5}{4}}$, т.е. $1<x<1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Из второго неравенства получаем x-1 > 2, т.е. x >3.

<u>Ответ</u>: $(1;1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}});(3;\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство: $\log_4 x-\log_x 4\le 1{,}5$.

<u>Решение.</u> Запишем неравенство в виде: $\log_4 x-\frac{1}{\log_4 x}\le 1{,}5$.

Обозначим $t=\log_4 x$, получим неравенство: $t-\frac{1}{t}\le 1{,}5$, $\frac{2t^2-3t-2}{t}\le 0$. Решение этого неравенства: $t\le -0{,}5\,;0<t\le 2$. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$\left[\begin{array}{l}\log_4 x\le -0{,}5,\\ 0<\log_4 x\le 2\end{array}\right.$, отсюда $0<x\le 0{,}5$, $1<x\le 16$.

<u>Ответ:</u> (0; 0,5] ; (1; 16].

Пример 6. Решить неравенство: $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

<u>Решение.</u> Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>1,\\ 3-2x>0,\\ 3-2x>x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2<1,\\ 3-2x>0,\\ 3-2x<x^2.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-1,\end{array}\right.\\ x<1{,}5,\\ x^2+2x-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\ 0<x<1,\end{array}\right.\\ x<1{,}5\\ \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>1,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. ;\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-1\end{array}\right.\\ x<1{,}5\\ -3<x<1\end{cases}$$

; $x\in$(-3;-1). <u>Ответ:</u> (-3;-1).

Метод рационализации

Метод применяется при решении неравенств вида: $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)>0$.

Суть метода заключается в том, что: неравенство сводится к равносильной ему системе неравенств:

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Частный случай: решение неравенств вида $\log_{a(x)} f(x) > 0$ основан на равносильном переходе:

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\cdot(f(x)-1) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 7. Решить неравенство: $\log_{2x-1} \dfrac{x^4+2}{2x+1} \geq 1.$

Решение:

Перенесем 1 в левую часть неравенства и представим ее в виде логарифма по основанию$(2x$-$1)$, получим:

$$\log_{2x-1} \frac{x^4+2}{2x+1} - \log_{2x-1}(2x-1) \geq 0;$$

неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} (2x-1-1)\cdot\left(\dfrac{x^4+2}{2x+1} - (2x-1)\right) \geq 0, \\ \dfrac{x^4+2}{2x+1} > 0, \\ 2x-1 \neq 1, \\ 2x-1 > 0. \end{cases}$$

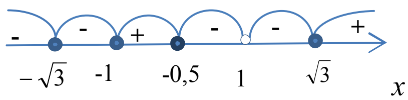


Рис.42

Решаем первое неравенство методом интервалов:

$$(2x-2)\cdot\left(\frac{x^4+2-4x^2+1}{2x+1}\right) \geq 0; \qquad (x-1)\cdot\left(\frac{x^4-4x^2+3}{2x+1}\right) \geq 0; \qquad \frac{(x-1)^2(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2x+1} \geq 0$$

Получили, решение первого неравенства: $x \in [-1;-0.5), [\sqrt{3};\infty), \{1\}$.

$$\begin{cases} x \in [-1;-0.5), [\sqrt{3};\infty), \{1\}, \\ x \in (-0,5;\infty), \\ x \neq 1, \\ x \in (0,5;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\sqrt{3};+\infty)$$

Ответ: $[\sqrt{3};+\infty)$

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенства:

1) $2-\log_2(x^2+3x)\ge 0$; 2) $\log_{0,2}(x^2-4)\ge -1$; 3) $\log_9\frac{2x}{x+1}>\frac{1}{2}$;

4) $\log_4(5x+7)>\log_2(5x+1)$;

5) $\log_{0,5}(x^2+6x+8)>\log_{0,5}(5x+10)$; 6) $\log_3(x+9)+\log_{\sqrt{3}}(x+9)+\log_{\frac{1}{3}}(x+9)<6$;

7) $\log_2^2 x^2-5\log_2 x+1\le 0$;8) $\log_{0,3}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$; 9) $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-2,5$;

10) $1-\frac{1}{5-\lg x}<\frac{2}{1+\lg x}$; 11) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\ge -2$; 12) $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}$;

13) $\log_{(x+1)^2}(x+3)>1$; 14) $\log_x\log_9\left(3^x-9\right)<1$.

Проверочная работа

Вариант 1

1) $\log_{\frac{1}{3}}\left(4-\frac{2}{3}x\right)>-1$; 2) $\log_2^2 x^2-15\log_2 x\le 4$;

3) $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$;

4) $\log_7 x-\log_x\frac{1}{7}\ge 2$; 5) $\log_{\frac{8}{3}}\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-6)\ge 0$;

6) $\log_x\frac{2x-1}{x-1}>1$.

Вариант 2

1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(8-\frac{4}{5}x\right)>-2$; 2) $\log_3^2 x^2+13\log_3 x+3<0$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+5)-\log_{\frac{1}{5}}(16-x^2)<-1$;

4) $\log_x\frac{1}{4}+\log_4 x^{-1}\le -2$; 5) $\log_x\frac{4x+51}{6-5x}<-1$;

6) $\log_{\frac{12}{11}}\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x-4)\le 0$.

Вариант 3

1) $\log_{0,5}(5+4x-x^2)>-3$; 2) $\log_2^2 x+\log_{0,5} x\ge 12$;

3) $\log_{0,1}(x^2+75)-\log_{0,1}(x-4)\le -2$;

4) $2\log_2\sqrt{x}-2\ge\log_x\frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5}\left(\log_8\frac{x^2+8x}{x-3}\right)<0$;

6) $\log_{2x-x^2}\left(x-1,5\right)>0$.

Вариант 4

1) $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$; 2) $\log_2^2 x^2-5\log_2 x+1\le 0$;

3) $\log_{0,5}(4-x)\ge\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$;

4) $\log_x 3-4\ge -4\log_3 x$; 5) $\log_{0,(3)}\left(\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}\right)<0$;

6) $\log_{\frac{2x-4}{25}}\frac{x^2-14x+51}{50}\le 0$.

9. Тригонометрические уравнения и неравенства

Тригонометрические уравнения

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$\cos x = a$, где $-1\le a\le 1$, $x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in Z$;

$\sin x = a$, где $-1\le a\le 1$, $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k$, $k\in Z$;

$tg\, x=a$, $x = arctg\,a+\pi k$, $k\in Z$;

$ctg\, x=a$, $x = arcctg\,a+\pi k$, $k\in Z$.

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений:

$\cos x = 0$, $x=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$; $\sin x = 0$, $x=\pi k$, $k\in Z$; $tg\,x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$;

$\cos x = 1$, $x=2\pi k$, $k\in Z$; $\sin x=1$, $x=\pi/2+2\pi k$, $k\in Z$; $ctg\,x=0$, $x=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$.

cos$x$ =-1, x=π +2πk, k∈Z; sin$x$= -1, x=-π/2+2πk,k∈Z;

Если тригонометрическое уравнение целого вида содержит только синусы или (и) косинусы, то область допустимых значений переменной - множество действительных чисел.

Проверка найденных решений необходима:

1) если в процессе решения произошло расширение области определения уравнения в результате некоторых преобразований (освобождение от знаменателя, сокращение дроби; приведение подобных членов);

2) если в процессе решения использовалось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) если при решении применялись тригонометрические тождества, левая и правая части которых имеют неодинаковые области определения, например:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\sin x\ ;\ tgx\cdot ctgx=1\ ;\ \frac{1-\cos x}{\sin x}=tg\frac{x}{2}\ ;\ tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}\ .$$

Использование этих тождеств «слева направо» приводит к расширению области определения уравнения, значит, может привести к появлению посторонних корней, «справа налево» ведет к сужению области определения, что может привести к потере корней.

При решении тригонометрических уравнений используют два основных метода: 1) разложение на множители; 2) введение новых переменных.

Рассмотрим основные **виды** тригонометрических уравнений.

1. Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

Уравнения вида $a\ \sin^2 f(x)+\ b\ \sin f(x)+c=0,\quad a\ \cos^2 f(x)+\ b\sin f(x)+c=0$ и др. с помощью замены переменной приводятся к квадратному уравнению.

Уравнения вида $a\ tg\, f(x)+\ b\ ctg\, f(x)+\ c=0$ приводятся к квадратному уравнению одной тригонометрической функции путем замены $ctgx=\frac{1}{tgx}$.

Пример 1. Решить уравнение: $8\sin^2 x - 6\sin x - 5=0$.

Решение. Обозначим $y = \sin x$, получим уравнение $8y^2 -6y - 5 =0$. Корни этого уравнения y_1=-0,5, y_2 =1,25. Следовательно, $\sin x$= - 0,5 или $\sin x$= 1,25. Решение первого уравнения: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \mathrm{Z}$. Второе уравнение корней не имеет.

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \mathrm{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение: $8\cos^2 x+ 6\sin x-3=0$.

Решение. Заменяя $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, получим уравнение

$8\sin^2 x - 6\sin x - 5=0$. Решение которого показано выше.

Пример 3. Решить уравнение: $2tgx - ctgx = 1$.

Решение. Область определения уравнения: $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \pi n, n \in Z \end{cases}$, т.е. $x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Обозначим $y=tgx$, имеем: $2y - \dfrac{1}{y} - 1 = 0$, $2y^2 - y - 1 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -0{,}5$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$, $x = -arctg 0{,}5 + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$, $x = -arctg\, 0{,}5 + \pi n, n \in Z$.

2. Однородные уравнения

Уравнение вида $a\sin f(x) + b\cos f(x) = 0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ называется **однородным первой степени** относительно $\sin f(x)$ и $\cos f(x)$. Они решаются делением обеих частей уравнения на $\cos f(x) \neq 0$ или на $\sin f(x) \neq 0$. В результате получается уравнение $a\, tg\, x + b = 0$ или $a + b ctg\, x = 0$.

Уравнение вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x)\cos f(x) + c\cos^2 f(x) = 0$ называется **однородным уравнением второй степени** относительно $\sin f(x)$ и $\cos f(x)$, если все три коэффициента или какие-либо два из них отличны от нуля. Считая, что $a \neq 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 f(x) \neq 0$ получим уравнение: $atg^2 f(x) + btgf(x) + c = 0$. Полученное уравнение равносильно исходному, так как корни уравнения $\cos^2 f(x) = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Если $a=0$, то уравнение примет вид $b\sin f(x)\cos f(x) + c\cos^2 f(x) = 0$. Это уравнение решается разложением на множители:

$\sin f(x)(b\cos f(x) + c\sin f(x)) = 0$.

Уравнение вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x)\cos f(x) + c\cos^2 f(x) = d$ при $d \neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному, заменив d тождественно равным выражением $d(\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x)) = d$.

Пример 4. Решить уравнение: $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Решение. Значения аргумента при которых $\cos x = 0$, не являются решениями этого уравнения, так как если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, но косинус и синус одного угла не могут одновременно быть равны нулю. Поэтому при делении обеих частей уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение, равносильное исходному: $2tg^2 x - 5tgx + 3 = 0$. Решая его, получим $tgx = 1$, $tgx = 1{,}5$, отсюда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = arctg 1{,}5 + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = arctg 1{,}5 + \pi n, n \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение: $22\cos^2 x+8\sin x\cos x=7$.

Решение. $22\cos^2 x + 8\sin x\cos x = 7(\cos^2 x+\sin^2 x)$, после преобразований получим однородное уравнение второй степени: $7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x=0$.

$7tg^2 x - 8tgx - 15=0$, $tgx=-1$, $tgx=\dfrac{15}{7}$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, $x=arctg\dfrac{15}{7}+\pi n, n\in Z$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, $x=arctg\dfrac{15}{7}+\pi n, n\in Z$.

Сведением к однородному уравнению второй степени можно решать уравнения вида: $a\sin f(x) + b\cos f(x)=c$.

Пример 6. Решить уравнение: $4\sin x - 6\cos x =1$.

Решение. Используя формулы синуса и косинуса двойного аргумента, основное тригонометрическое тождество, получим:

$$4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-6\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}.$$

$5\sin^2\dfrac{x}{2}+8\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-7\cos^2\dfrac{x}{2}=0$. Имеем однородное уравнение второй степени, после деления на $\cos^2\dfrac{x}{2}$ получим $5tg^2\dfrac{x}{2}+8tg\dfrac{x}{2}-7=0$. Корни этого уравнения: $x=2arctg\dfrac{-4\pm\sqrt{51}}{5}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $2arctg\dfrac{-4\pm\sqrt{51}}{5}+2\pi n, n\in Z$.

Пример 7. Решить уравнение: $\sin 2x+5\sin x+5\cos x+1=0$.

Решение. Обозначим $u=\sin x+\cos x$, тогда $u^2=(\sin x+\cos x)^2$, т.е. $u^2=1+\sin 2x$.

Исходное уравнение свелось к квадратному: $u^2+5u=0$, корни которого $u_1=0$, $u_2=-5$.

Решаем совокупность уравнений: $\sin x+\cos x=0$; $\sin x+\cos x=-5$.

Первое уравнение этой совокупности – однородное, делим на $\cos x$, получим: $tgx+1=0$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, второе уравнение решений не имеет, так как $|\sin x|\le 1$ и $|\cos x|\le 1$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

3. Уравнения, решаемые методом разложения на множители

Если уравнение можно преобразовать к виду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$, то задача сводится к решению совокупности уравнений $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0,\ldots$, $f_n(x)=0$. Полученная совокупность уравнений не всегда равносильна исходному уравнению, возможно появление посторонних корней. Из найденных решений совокупности уравнений нужно исключить те значения переменной, при которых исходное уравнение не имеет смысла.

Пример 8. Решить уравнение: $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Применим формулу синус двойного аргумента, получим: $2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$, $2\cos x(\sin x - \cos x) = 8$. Так как множители в левой части уравнения имеют смысл при любых значениях x, то это уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x - \cos x = 0,\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z},\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathrm{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathrm{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение: $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$.

Решение. Используя формулы понижения степени, имеем:

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1{,}5$,

$\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x = 0$,

$2\cos 4x \cos 2x - \cos 4x = 0$,

$\cos 4x\,(2\cos 2x - 1) = 0$

$\cos 4x = 0$ или $\cos 2x = 0{,}5$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathrm{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathrm{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathrm{Z}.$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathrm{Z}$.

Пример 10. Решить уравнение: $(1 - \sin x)\left(tg^2 x - 3\right) = 0$.

Решение. Область определения данного уравнения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$.

Решаем совокупность уравнений: $\sin x = 1$ и $tg^2 x = 3$.

Решение первого уравнения совокупности: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}$, не является решением исходного уравнения, так как не принадлежит области его определения. Решение второго уравнения: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathrm{Z}$, является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathrm{Z}.$

4.Уравнения, решаемые **методом введения вспомогательного угла.**

Уравнения вида $a\sin f(x) + b\cos f(x)=c$, где $a^2+b^2\neq 0$ можно решать **методом введения вспомогательного угла.**

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$. Получим уравнение: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin f(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos f(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то существует такое значение γ, что $\cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Уравнение примет вид $\cos\gamma\sin f(x)+\sin\gamma\cos f(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Применив формулу для синуса суммы двух аргументов, получим $\sin(\gamma+f(x))=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Это уравнение имеет решение, если $|c|\leq\sqrt{a^2+b^2}$. (Для преобразования уравнений можно использовать также формулы синуса разности, косинуса суммы и разности аргументов.)

Пример 11. Решить уравнение: $3\cos x+4\sin x=5$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2+4^2}=5$, получим $\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x=1$, пусть $\sin\varphi=\frac{3}{5}, \cos\varphi=\frac{4}{5}$. Тогда $\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x=1$

$\sin(x+\varphi)=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n-\varphi$, $n\in Z$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n-\arcsin\frac{3}{5}$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n-\arcsin\frac{3}{5}$, $n\in Z$.

5. Метод оценки.

Некоторые тригонометрические уравнения удается решить, используя органиченность множества значений функций: $|\cos x|\leq 1$, $|\sin x|\leq 1$.

Пример 12. Решить уравнение: $\cos x+\cos 2x=2$.

Решение. Так как $\cos x\leq 1$, $\cos 2x\leq 1$, то $\cos x+\cos 2x\leq 2$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $\cos x=1$ и $\cos 2x=1$. Т.о. исходное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=2\pi n, n\in Z,\\ x=\pi k, k\in Z.\end{cases}$; $x=2\pi n$, $n\in Z$. Ответ: $x=2\pi n$, $n\in Z$.

Отбор корней в тригонометрических уравнениях

С необходимостью отбора корней при решении тригонометрических уравнений приходится сталкиваться в двух случаях: 1) если в ходе решения произошло расширение области определения, при переходе к уравнению следствию могли появиться посторонние корни; 2) если в задаче требуется найти корни, удовлетворяющие некоторому условию, например, принадлежащие некоторому промежутку.

Существуют несколько способов отбора корней: 1) арифметический (перебор значений целочисленного параметра; непосредственная подстановка); 2) алгебраический (решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра); 3)геометрический (с помощью числовой окружности или графика тригонометрической функции). Рассмотрим их применение.

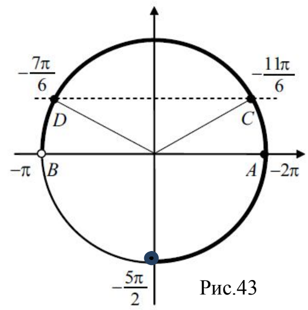


Рис.43

Пример 13. Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и найдите все его корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ то

$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$, $2\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Корни уравнения: $x = \pi n,\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}$

1 способ: Произведем отбор корней с помощью числовой окружности. Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками *A* и *B*, а корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ - точками *C* и *D*, промежуток $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ изображен жирной дугой (см. рис. 43). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения -2π, $-2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$ и $-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: $-2\pi,\ -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}$.

2 способ: Корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$, отберем с помощью графика функции $y = \sin x$. Прямая $y = 0$ (ось *Ox*) пересекает график в единственной точке $(-2\pi; 0)$, абсцисса которой принадлежит промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график ровно в двух точках, абсциссы которых принадлежат $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ (см. рис. 44). Так как период функции $y=\sin x$ равен 2π, то эти абсциссы равны, соответственно, $\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6}$.

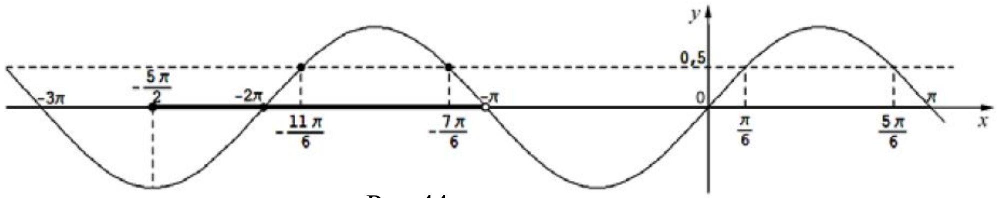


Рис.44

В промежутке $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ содержатся три корня: $-2\pi,\ -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}$.

<u>*3 способ:*</u> Пусть $x=\pi n, n\in Z$. Подставляя $n=\ldots-3,-2,-1,0,1,2,\ldots$, получаем $x=\ldots-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\ldots$. Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ принадлежит только $x=-2\pi$.

Пусть $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. Подставляя $k=\ldots-3,-2,-1,0,1,2,\ldots$, получаем: $x=\ldots\left(-\frac{1}{6}-3\right)\pi,\left(\frac{1}{6}-2\right)\pi,\left(-\frac{1}{6}-1\right)\pi,\frac{\pi}{6},\left(-\frac{1}{6}+1\right)\pi,\left(\frac{1}{6}+2\right)\pi,\ldots$.

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ принадлежат только $-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}$.

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ принадлежат корни: $-2\pi,\ -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}$.

<u>*4 способ:*</u> Отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ с помощью двойного неравенства. $-\frac{5\pi}{2}\le\pi n<-\pi\Leftrightarrow-\frac{5}{2}\le n\le-1\Leftrightarrow n=-2\ (n\in Z)$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$: -2π.

Пусть $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Тогда $-\frac{5\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+2\pi n<-\pi\Leftrightarrow-\frac{4}{2}<n\le-\frac{7}{12}\Leftrightarrow n=-1$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$: $-\frac{11\pi}{6}$.

Пусть $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, тогда $-\frac{5\pi}{2}\le\frac{5\pi}{6}+2\pi n<-\pi\Leftrightarrow-\frac{5}{3}\le n\le-\frac{11}{12}\Leftrightarrow n=-1$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$: $-\frac{7\pi}{6}$.

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ принадлежат корни: $-2\pi,\ -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}$.

<u>Ответ:</u> $\pi n,(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi k, n\in Z, k\in Z;\ -2\pi,\ -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}$.

Решение систем тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

Пример 14. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\sin x\cos y=-0{,}5,\\ \cos x\sin y=0{,}5.\end{cases}$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы, получаем равносильную систему: $\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=0,\\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1,\end{cases}$; $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(y-x)=1.\end{cases}$;

$$\begin{cases}x+y=\pi n,\\ y-x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\end{cases} k,n\in Z.$$

Складывая уравнения последней системы, получим:

$2y=\pi n+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}+\pi k$.

Вычитая из первого уравнения последней системы второе, получим:

$2x=\pi n-\dfrac{\pi}{2}-2\pi k$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}-\pi k$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}-\pi k$, $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}+\pi k$, $k\in Z, n\in Z$.

Пример 15. Решить систему уравнений: $\begin{cases}tgx+tgy=1,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Решение. Область определения системы уравнений $\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z,\\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.\end{cases}$

Применяя способ подстановки, получаем: $\begin{cases}tgx+tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-x.\end{cases}$

Решаем первое уравнение полученной системы: $tgx+\dfrac{tg\dfrac{\pi}{4}-tgx}{1+tg\dfrac{\pi}{4}tgx}=1$.

После упрощений получим: tg^2x - tgx = 0, tgx (tgx – 1) =0.
Система равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} tgx = 0, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x, \end{cases} \\ \begin{cases} tgx = 1, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x, \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = \pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - \pi k, k \in Z, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z. \end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $\left(\pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z\right); \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; -\pi k, k \in Z\right)$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение:

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 2$;   2) $\cos x \sin x = 1$;   3) $tgx\ ctgx = 1$;   4) $2\sin x - 3\cos x = 0$;
5) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$;   6) $1 + \sin x + \cos 2x = 0$;   7) $1 - \cos x = 2\sin 0{,}5x$;
8) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;   9) $\sin x + 7\cos x = 5$;   10) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
11) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;   12) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$;
13) $\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1$;   14) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$

Проверочная работа

Вариант 1

1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$;
2) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$;
3) $tgx\ ctgx = \cos x$;
4) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;
5) $2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 5\sin x\cos x$;
6) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}25, \\ \sin x \sin y = 0{,}75 \end{cases}$

Вариант 2

1) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$;
2) $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$;
3) $tgx \cdot ctgx = \sin x$;
4) $\sin^2 3x + 5\sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$;
5) $3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 3$;

Вариант 3

1) $2\sin^2 x = 3\cos x$;
2) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$;
3) $\sin x \cdot ctg 2x = 0$;
4) $4\sin 2x + 22\cos^2 x = 7$;
5) $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}875$;
6) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Вариант 4

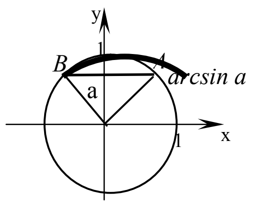
1) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$;
2) $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$;
3) $\cos^2 0{,}5x + \cos^2 1{,}5x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$;
4) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
5) $\dfrac{\sin x + 1}{tgx} = 0$;   6) $\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$$6)\ \begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=-0{,}5\end{cases}$$

Тригонометрические неравенства

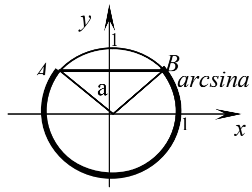
При решении простейших тригонометрических неравенств используют единичную окружность или график функции.

$\sin x > a$, $0<a<1$



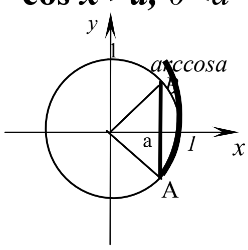
$$\arcsin a+2\pi k<x<\pi-\arcsin a+2\pi k,\ k\in Z$$

$\sin x < a$, $0<a<1$



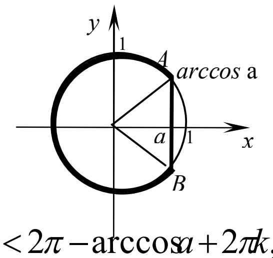
$$-\pi-\arcsin a+2\pi k<x<\arcsin a+2\pi k,\ k\in Z$$

$\cos x > a$, $0<a<1$



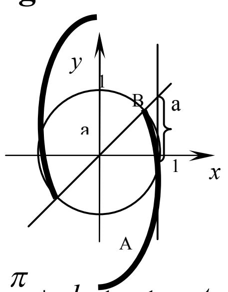
$$-\arccos a+2\pi k<x<\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$$

$\cos x < a$, $0<a<1$



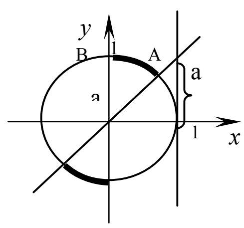
$$\arccos a+2\pi k<x<2\pi-\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$$

$\mathrm{tg}\, x < a$



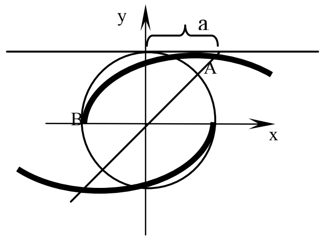
$$-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<arctga+\pi k,\ k\in Z$$

$\mathrm{tg}\, x > a$



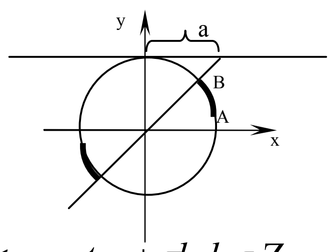
$$arctga+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

ctg x < a



$$arcctga+\pi k<x<\pi+\pi k,\ k\in Z$$

ctg x > a



$$\pi k<x<arcctga+\pi k,\ k\in Z$$

Пример 1. Решить неравенство: sin$x$ <0,5.

<u>Решение.</u> *1 способ.* Этому неравенству удовлетворяют все точки единичной окружности, ординаты которых меньше 0,5, т.е. эти точки дуги лежат ниже прямой y=0,5. Множество всех точек, удовлетворяющих данному неравенству, есть дуга AB (выделена на рисунке), т.е. $-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$. Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно к концам промежутка прибавить $2\pi k$.

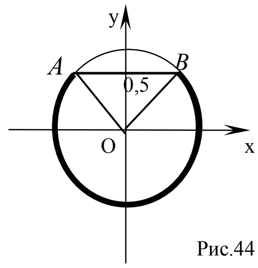


Рис.44

$$-\frac{7\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$$

2 способ. Строим графики функций y = sin$x$ и y = 0,5. Прямая y=0,5 пересекает синусоиду в бесконечном числе точек. На рисунке выделены несколько промежутков значений аргумента, удовлетворяющих данному неравенству, один из них ($-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}$). Учитывая периодичностью синуса, запишем ответ: $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

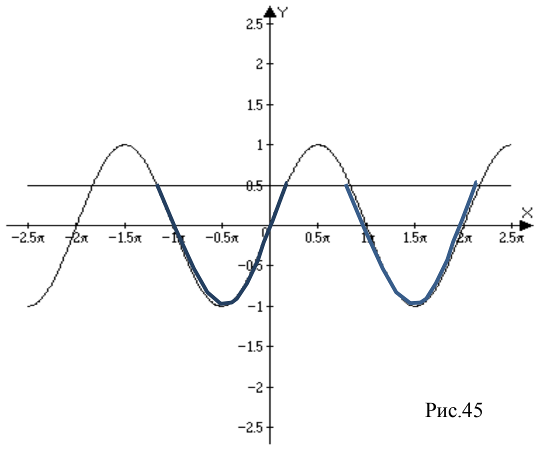


Рис.45

<u>Ответ:</u> $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Пример 2. Решить неравенство:cos$3x$ ≥-0,5.

<u>Решение.</u> Обозначим $3x$=α, cosα≥-0,5. Этому неравенству удовлетворяют все точки единичной окружности, абсциссы которых больше или равны –0,5, множество всех точек, удовлетворяющих данному неравенству, есть дуга (выделена на рис. 46). Концы этой дуги входят в искомое множество точек, так как их абсциссы равны –0,5 и значит, удовлетворяют данному неравенству. Таким образом, $-\frac{2\pi}{3}\le\alpha\le\frac{2\pi}{3}$. Учитывая периодичность косинуса, запишем множество решений неравенства: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\le\alpha\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$. Переходя к переменной x, получаем: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\le 3x\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$, $-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\le x\le\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$.

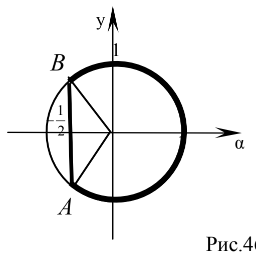


Рис.46

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}\le x\le \dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}, k\in Z.$

Пример 3. Решить неравенство: $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 \ge 0$.

Решение. Введем новую переменную $y=\sin x$. Тогда данное неравенство можно переписать в виде $6y^2 - 5y + 1\ge 0$. Разложим трехчлен на множители, имеем: $6\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\ge 0$. Решение этого неравенства - объединение промежутков $y\le\frac{1}{3}$, $y\ge\frac{1}{2}$. Получаем: $\sin x\le\frac{1}{3}$ или $\sin x\ge\frac{1}{2}$. Отсюда:

$$-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\le x\le \arcsin\frac{1}{3}+2\pi k, k\in Z,\quad \frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\le x\le \arcsin\frac{1}{3}+2\pi k, k\in Z,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$

Пример 4. Решить неравенство: $tg\, 2x \ge 1$.

Решение. Обозначим $\alpha=2x$. Тогда неравенство примет вид $tg\,\alpha\ge 1$. Построим единичную окружность и проведем линию тангенсов (рис.47), которая является касательной к окружности в точке (1;0). Так как α решение неравенства $tg\alpha\ge 1$, то ордината точки T_α линии тангенсов, равная $tg\alpha$, должна быть больше или равна 1. Все такие точки лежат на луче AT.

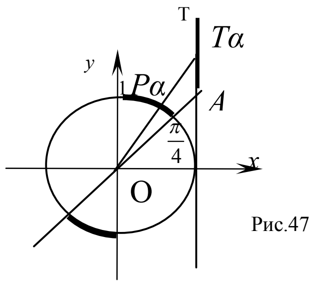


Рис.47

Точки P_α единичной окружности, соответствующие точкам T_α, образуют дугу (выделена на рис.47). Для точек P_α этой дуги выполняется неравенство: $\frac{\pi}{4}\le\alpha<\frac{\pi}{2}$

Чтобы получить все решения неравенства $tg\alpha\ge 1$, достаточно к концам указанного промежутка прибавить период тангенса, получим

$\pi k+\frac{\pi}{4}\le\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, так как $\alpha=2x$, то $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}\le x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

2 способ. Для решения неравенства $tg\ \alpha\ge 1$ построим графики функций $y= tg\ \alpha$ и $y=1$. График

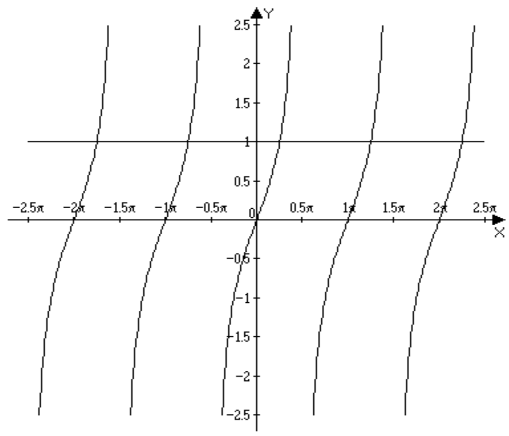


Рис.48

функции $y=tg\alpha$ лежит выше прямой $y=1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$, воспользовавшись периодичностью тангенса, получим: $\pi k+\frac{\pi}{4}\le\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$,отсюда $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}\le x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

<u>Ответ:</u> $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}\le x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенства: 1) $\sin x\ge-\frac{1}{2}$; 2) $2\cos(-x-\frac{\pi}{6})<-1$; 3) $\sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $|\sin x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\sin(-3x)\le-\frac{1}{2}$; 6) $\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})<\frac{1}{2}$; 7) $\cos 2x>0,2$; 8) $\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $\left|\cos\frac{x}{3}\right|\le\frac{1}{2}$; 10) $tg\frac{x}{2}\le 1$; 11) $ctg\frac{x}{3}<\frac{\sqrt{3}}{3}$; 12) $|tgx|\le\sqrt{3}$; 13) $ctg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3})>1$; 14) $tg^2x-\frac{1}{4}tgx-\frac{3}{4}>0$; 15) $6\cos^2x-5\cos x+1\le 0$; 16) $\sin x+\cos 2x>1$.

Проверочная работа

Вариант 1. 1) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(-2x)<\frac{1}{3}$; 3) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge-\sqrt{3}$; 4) $\cos^2 2x-2\cos 2x\ge 0$.

Вариант 2. 1) $\sin x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $4\cos 2x-1\le 0$; 3) $tg3x\ge 1$; 4) $2\sin^2 x-5\cos x+1>0$.

Вариант 3. 1) $\cos(-2x)\ge 0,5$; 2) $3\sin x+1>0$; 3) $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$; 4) $\sin x\le\cos^2 x$.

Вариант 4. 1) $4\cos x>1$; 2) $\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}<0$; 3) $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge\sqrt{3}$; 4) $2\cos^2 x+3\cos x-2\ge 0$.

Ответы

Множество действительных чисел

2. а) 3,3(50). **б)** 1. **в)** 7. **3.** 30. **7. а)** 19. **б)** 21. **20 а)** 30. **б)** 12. **в)** $2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7$. **г)**$2^3\cdot5^2\cdot7\cdot13$. **23.** 90. **24.** 32. **25.** 1400. **26.** 1600. **27.** 80. **28. 29.** 50. **30.** 200. **31.** 44%.

<u>Вариант 1</u>. **2.** $-\frac{38506}{1617}$. **3.** 70; 6300. **4.** 35. **6.** 21%.

<u>Вариант 2.</u> **2.** -65,4. **3.** 6; $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11\cdot17$. **4.** 23. **6.** 69%.

<u>Вариант 3.</u> **2.** $-\frac{429}{3089}$. **3.** 15; $2\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot151$. **4.** 14. **6.** 36%.

<u>Вариант 4.</u> **2.** $-\frac{2079}{12480}$. **3.** 165; $2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11^2$. **4.** 27. **6.** 64%.

Тождественные преобразования аналитических выражений

4.а) $\frac{5x-1}{x-2}$. **б)** $x+3y$. **в)** $\frac{a+4в}{a-2в}$. **г)** $\frac{a-10в}{a-5в}$. **д)** $\frac{x^2-4}{x^2+5}$. **е)** $\frac{a^6-1}{a^6+1}$. **5.** $\frac{-5(x+1)}{x^2-4}$. **6.а)** $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$. **б)** $\frac{a}{a-1}$. **в)** $\frac{(a+в+c)^2}{2вc}$. **г)** $\frac{9}{a-в}$. **8.а)** $24\sqrt{3}+\sqrt[3]{4}$. **б)** $7\sqrt{5}-5\sqrt[3]{3}$. **9.а)** 8. **б)** 1.

11. 1. **12. а)** $2+\sqrt{3}$. **б)** 3. **в)** $\sqrt{2}+1$. **г)** $4y$ при $x\geq 2y$, $2x$ при $x<2y$. **13.а)** 1. **б)** $a+в$. **в)** $\frac{1}{4}x^{1/2}$. **г)** $\sqrt{m}-\sqrt{n}$. **д)** $-\sqrt{x}$. **14.а)** 0. **б)** 162. **в)** 890. **г)** 25. **д)** 1,097. **е)** $\frac{3+a}{2+2a}$.

15. $\log_a \sqrt{a^2-1}$.

Вариант 1. **1.** 2;4. **2.** 4/7. **3.** $\frac{-51x-204}{x^2-25}$. **4.** 30. **5.** $\frac{1}{1-a}$. **6.** 10.

Вариант 2. **1.** 3;4. **2.** 2/5. **3.** $\frac{84}{x^2-4}$. **4.** $\frac{10\sqrt{35}}{7}$. **5.** $-\sqrt[4]{a}$. **6.** $2\sqrt{7}$.

Вариант 3. **1.** 1;3. **2.** -2/3. **3.** $\frac{102}{x^2-9}$. **4.** 40. **5.** $(1+a)^2$. **6.**8

Вариант 4. **1.** 1;4. **2.** 1/4. **3.** $\frac{44}{x^2-4}$. **4.** $\frac{20\sqrt[3]{5}}{9}$. **5.** $a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}$. **6.**4

Тригонометрические выражения и их преобразования:

Вариант 1.1.**а)**$cos\frac{\pi}{30}$,**б)**0. Вариант 2.1.**а)**tgα **б)**$2cos\alpha$. Вариант. 1.**а)**sin40°.**б)**$cos\alpha$.

Вариант 4.1.**а)**sin40°.**б)**-$cos\alpha$.

Рациональные уравнения

1) нет; **2)** да; **3)** да; **4)** нет; **5)** да; **6)** нет; **7)** 0;1; **8)** 2; 0б5; **9)** 3;-1; $1\pm\sqrt{10}$; **10)** $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$; **11)**3; $3\pm 2\sqrt{5}$; **12)**–2; $\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$; **13)** 2;-2;-1; **14)** $\varnothing$; **15)** $-\frac{1}{3}$; **16)** $2\pm\sqrt{35}$; **17)** 12б25; **18)** 1.

Вариант 1. **1)** да; **2. а)** 0; $-\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{5}{3}$; **б)** 4; **в)** –1;2; **г)** 3;-1; $-3\pm 2\sqrt{3}$.

Вариант 2. **1)** нет; **2. а)** –2;1; **б)** $\varnothing$; **в)** 1;2) **г)** 1; 2. $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

Вариант 3. **1)** да; **2.а)** 0; -5; **б)** 13; **в)** 2; **г)** 2; 0,5.

Вариант 4. **1)** нет; **2. а)** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; **б)** $\frac{-5\pm\sqrt{77}}{4}$; **в)** -3; ; $-1\pm 2\sqrt{2}$; **г)** 2; 0,5. $-2\pm\sqrt{3}$.

Рациональные неравенства

1) (-∞;-1), (4;∞); **2)**(-∞;-2), (2;∞); **3)**–0,5; **4)** $\varnothing$; **5)** x $\in\Re$; **6)** (-∞;-2], [-1;1], [2; ∞); **7)**–1;1; **8)**(-∞;-1), (0;3) **9)**(- ∞;-0,75); **10)** (1;2], [3; ∞); **11)** (-∞;1), (3; ∞); **12)** (0;1); **13)** (-∞;$-\frac{2}{3}$), (1,75;2);**14)** (-∞;-7), (-7;-2), (1;7), (7;8), (11; ∞); **15)** [2;3].

Вариант 1. **1)**-3; **2)** (-∞;-4), (4; ∞); **3)** [1;5]; **4)** $(-2;\frac{1}{3})$; **5)** (-1;1); (1;2); **6)** (-∞;2), (2;3], (4; ∞); **7)** (-4;-3),(-1-$\sqrt{3}$;–2); (0;-1+$\sqrt{3}$), (1;2).

Вариант 2. **1)**(-∞;-1), (-1;∞); **2)**(-∞;-1,5), (1,5; ∞); **3)**(-∞;1), (5; ∞); **4)** $\varnothing$; **5)**(-2;2), (2;4); **6)**(-∞;2), (4; ∞); **7)** (-∞;-1), (0; 0,5), (1; ∞).

Вариант 3. **1)**(-∞;-0,5), (-0,5;∞);**2)**(-∞;-$\frac{1}{3}$),($\frac{1}{3}$; ∞); **3)** (-∞;$\frac{1}{3}$),(3; ∞); **4)** (-∞;-1,5), (3; ∞); **5)**(-∞;-3), ($\frac{1}{3}$;3); **6)** (-∞;1), (1;2], (3; ∞); **7)** (–1;0), (1;2).

Вариант 4. **1)**–0,5; **2)** (-5;5); **3)** x $\in\Re$; **4)**(∞;-2), ($\frac{1}{3}$; ∞); **5)** (-∞;2), [4; ∞); **6)**(-∞; 5), (5;6], (7; ∞); **7)** (–5;1), (2;3).

Системы уравнений

1) (-1;-1); **2)**(1;2;3); **3)** (1;0;2); **4)** $\left(\frac{7c+17}{5};\frac{11c+11}{5};c;c\in\Re\right)$; **5)(**2;-1); (-1;2); **6)** (1;4);(4;1); $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$ $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$**7)** (2;3);(3;2);$\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}};-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$ $\left(-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}};-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$;

8)($3\sqrt{2};\sqrt{2}$)($-3\sqrt{2};-\sqrt{2}$)($3\sqrt{2};-\sqrt{2}$)($-3\sqrt{2};\sqrt{2}$); **9)** (1;3); (-1;-3); $\left(8\sqrt{\frac{2}{7}};-20\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ $\left(-8\sqrt{\frac{2}{7}};20\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ **10)** (0,8;-0,8); **11)** $(6+\sqrt{46};-4)$ $(6-\sqrt{46};-4)$; (5;1); (5;-8,5). **12)** p=-1; **13)** m=10;n=6; **14)** a<70; **15)** p<-1.

Вариант 1.**1)** (-3;-$\frac{1}{3}$);(7;3); **2)** (4,4;1,72);**3)**(-3;1),(1;-3),(3;-2),(-2;3);**4)**(2;2);**5)**(-3;2;-1);**6)**-2.

Вариант 2. **1)** (-0,5;0,5); (4;5); **2)** $\left(3\frac{4}{9};-4\frac{1}{3}\right)$;**3)** (1;1); 4) (3;2), (-2;3); 5) (2;3;1); **6)** $m\in(28;30)$

Вариант 3. **1)** (-2,5;-0,5); (4;2); **2)**(3;-0,5); **3)** (1;0); 4) (3;-2), (-2;3);5) (7;-3;-1);**6)**$c\in(10;12)$

Вариант 4. **1)** (2;1); (-2;1);(1;4); (-1;4);**2)**$\left(-\frac{1}{3};2\right)$;**3)**(-5,25; 2,25);4)$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$;**5)**(2;-1;1). **6)**$n=\frac{4}{3}$;

Уравнения и неравенства с модулем

1) 3;-3; **2)** (-5;5); **3)** (-∞;-14); (14;∞); **4)** [0;∞); **5)** ∅; **6)** (-∞;0); **7)** -0,5; 2,5; **8)** -1;3; **9)**0;2; **10)** (-∞;-3); (3;∞); **11)** $\frac{1}{5};\frac{2}{3}$; 12) -0,5;5,5; **13)** $\left[\frac{2}{7};\frac{2}{3}\right]$; 14)**-**3;2; $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$; **15)** $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;

16) $\frac{2}{3};5$, $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{3}\right)$ **; 17)** (-∞;-2]; [-1;∞) ; **20)** $\left[-\sqrt[3]{5};8\right]$; **22.** [0;$\frac{1}{3}$]

Вариант 1. **1)** $\frac{4}{3}$; **2)** –1;-3; **3)** ∅; 4)(-∞;-4); **5)**(-∞;-$\frac{1}{3}$], [7; ∞); **6)**[-5;- $\frac{5}{3}$], [$\frac{13}{3}$;∞).

Вариант 2. **1)** –2,5; **2)** 3;4; **3)** ∅ ; **4)**(8;∞); **5)** ($\frac{4}{3}$;3), (3;8); **6)** (-∞;-14), (-2;∞).

Вариант 3. **1)** 3,25; **2)** –1; -1,5; 1; 1,5; **3)** ∅ ; **4)**(-1,75; 4,5); **5)** (1,75; 1), (1; ∞); **6)** (-0,5; 2,75).

Вариант 4. **1)** (- ∞; 0,8]; **2)** $\frac{11-\sqrt{29}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ **3)** ∅; **4)** (-∞; -$\frac{1}{9}$]; **5)** (-∞; -3]; **6)** (-∞;1), (13; ∞).

Иррациональные уравнения

6) 2; $-\frac{1}{3}$; **7**) 2;3; **8**) 3;-1; **9**) 1; **10**) $-\frac{1}{9}$; **11**) 1 $1\pm\sqrt{27}$; **12**) 1; **13**) -1;3;3,5; **14**) 2; **15**) $-\frac{1}{6};-1$

16) $-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
.

Вариант 1. **1)** –1; 2; **2)** 3; **3)** 4; **4)** 1; **5)** 2;-7; **6)** -0,5; 0;5.
Вариант 2. **1)** –3; 2; **2)** 7; **3)** 0;5; **4)** 5;6; **5)** -1;5; **6)** 1; 20.
Вариант 3. **1)** –1; 2; **2)** -2; **3)** 1; **4)** 4; **5)** -1;4; **6)** $\pm\frac{10}{9}\sqrt{21}$.

Вариант 4. **1)** 0,5; 1; **2)** -1; **3)** 20; **4)** 1; **5)** 0;1; **6)** -1.

Иррациональные неравенства

1) $(-\infty;-3]$, $[2;\infty)$; **2)** $\varnothing$; **3)** -1;[1;2]; **4)** ($\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$;(1;∞);**5)** $\left(\frac{-17+\sqrt{2089}}{18};2\right]$; **6)** $(-\infty;-8)$, $(2;\infty)$;

7) [-5;-1); **8)** $(-\infty;3)$; **9)** [0,5; ∞); **10)** $(-\infty;-2]$; **11)** [4;∞); **12)** $\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$; **13)** [12;∞); **14)**(-∞;-1); (4;∞); **15)** $\left[4;4\frac{9}{16}\right]$; **16)** (10; ∞); **17)** $[-\sqrt{12};\sqrt{12}]$; **18)** (-2;-1,6], [1,6;2); **19)** 1; $\frac{25}{16}$.

<u>Вариант 1.</u> **1)** (0;4); **2)** (-0,5;∞); **3)** (-∞;-0,5);(2;2,5); **4)** (3;5]; **5)** $\left[-0{,}5;\frac{11-\sqrt{153}}{4}\right)$; [0;2).

<u>Вариант 2.</u> **1)** $\varnothing$; **2)** (-∞;-1), (2;∞); **3)** [-3;1); **4)** (-∞;-3]; $\left[6;\frac{34}{5}\right)$.; **5)** (-∞;-2), (0;∞).

<u>Вариант 3.</u> **1)** [-1;1]; **2)** [3;28); **3)** (-2;2); **4)**[-6; $-4+\sqrt{2}$); **5)** (-∞;-1], [2; $\frac{23}{7}$).

<u>Вариант 4.</u> **1)** $\varnothing$; **2)** (-∞;-127]; **3)** (-1,25;-1), (0,5;∞); **4)** (-∞;-3]; **5)** (2; $\left(2;\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

Показательные уравнения

1) $-\frac{2}{7}$;1; **2)** -0,6; **3)**3; **4)** -1;1; **5)**5; **6)** $\pm 1;\ \pm\sqrt{2}$; **7)** 1; **8)** 0,75; **9)** 4; **10)** 2; **11)** $\log_{\frac{3}{2}} 2$; $\log_{\frac{3}{2}} 4$; **12)**

$\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg 2-\lg(\sqrt{5}-1)}$; **13)** $\frac{3\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+\lg 5}$; **14)** 1.

<u>Вариант 1</u>. 1)$\frac{17}{3}$;**2)** -1,5; -1; **3**) 0; **4**) -2; **5**) 1. <u>Вариант 2.</u> **1**) 1,5; **2**) 0;1; **3**) 1; **4**) 4; **5**) -1.

<u>Вариант 3</u>. **1**)7; **2**) -2; **3**) $2+\frac{\lg 7-\lg 57}{kg 7-\lg 2}$; **4**) 1; -1; 5)2. <u>Вариант 4.</u> **1**)3; **2**)2; **3**)0; **4**) -1; 1; **5**) -2.

Показательные неравенства

1)(-∞;-3),(0;3);**2**)(-1;7);**3**)$\left(-\infty;\log_2(\sqrt{7}-1)\right]$;**4**)[0;1]; **5**) $\left(\log_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\log_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$; **6**) [0;16];

7) (1,5;∞); **8**) (-∞;-1), (5;∞); **9**) (1;∞); **10**) $\left(-\infty;\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$.

<u>Вариант 1.</u> **1**) (-4;5); **2**) (-2;1); **3**) (-∞; -3); (5; ∞); **4**) (1;2); **5)** (0;1).
<u>Вариант 2</u> **1**) (-∞;1), (5; ∞); **2**) [1; ∞); **3**) (-∞; 0,5); **4**) (6; ∞); **5**) [-1;0),(0; ∞).
<u>Вариант 3</u> **1**) x $\in\Re$; **2**) $\left(2\frac{1}{3};4{,}6\right)$; **3**)(- ∞; 1); **4**) [4,5; ∞); **5**) (-∞;0), (0;0,5).

<u>Вариант 4.</u> **1**) (-∞;3); **2**) (-∞;10]; **3**) (-∞;1); **4**) (-∞;-0,5]; **5**)$\left(-\infty;-\log_{2,5}2\right)$, $\left(\log_{2,5}2;\infty\right)$.

Логарифмические уравнения

1) 2;3; **2**) 2^{3^9} ; **3**) -1; **4**)-100; **5**)2; **6**)$\sqrt{2}$;4; **7)**3^6; 3^{14}; **8**) 9; **9**) 10;3; 1**0**) 10^{-5}; 10^3; **12**) $6;\frac{1}{6}$; **13**)

$\frac{1}{9}$;9; **14**) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; **15**) $\varnothing$.

<u>Вариант 1.</u>**1**)$2\pm\sqrt{3}$;**2**)$\varnothing$;**3**)37;**4**)0,1;100; **5**)100. <u>Вариант 2</u>. **1**) -5;1; **2**)1; **3**)$\varnothing$;**4)** 10^{-4}; 10^4;**5**)81.
<u>Вариант 3.</u> **1**)0;1,5;**2**)25;0,2;**3**)0**;** **4**)2; **5**)10.<u>Вариант</u> 4. **1**)-$\sqrt[4]{6}$; $\sqrt[4]{6}$; **2**)1000; 0,1; **3**) $0{,}5\sqrt{26}-4$; **4)** 1; **5**) 100.

Логарифмические неравенства

1) [-3;-3),(0;1]; **2**) [-3;2); (2;3]; **3**) (-3;-1); **4)(-**0,2;0,4); **5**)(-2;1); **6**) (-9;18); **7**) [$2^{0,25}$;2]; **8**) (--4;-3);(8; ∞); 9)($\sqrt{3}$;**9**), (0;1); **10)** (0,1;100); (10^3;10^5); **11**) (-∞;0], [$\log_6 5$;1); **12**) (2; ∞); **13**) (0;1); **14**)$\left(\frac{1}{\lg 3};\infty\right)$.

Вариант 1. **1)** (1,5;6); **2)** $\left[\sqrt[4]{0,5};16\right]$; **3)**(3;4,5); **4)** (1; ∞); **5)** $\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right]$, $\left[3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$; **6)** $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right]$, $\left[1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Вариант 2. **1)** (-40;10); **2)** $\left(\frac{1}{27};\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$;**3)**(1;4); **4)** (1; ∞); **5)(**0,5;1); **6)** $\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}\right]$ $\left[\frac{-3+3\sqrt{3}}{2};\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

Вариант 3. **1)** (-1;1), (3;5); **2)** (0;0,125],[16; ∞); **3)** (4;5],(95; ∞); **4)** (2; ∞); **5)** (3; ∞); **6)(**1,5;2).

Вариант 4. **1)** (1;2), (3;4); **2)**[$\sqrt[4]{2}$;2]; **3)** (1;2],[3;4); **4)**(1; ∞); **5)(**-0,5;2); **6)(**0,58; 7+ $4\sqrt{3}$].

Тригонометрические уравнения

1) ∅; **2)** ∅;3) $x \neq \frac{\pi k}{2}$; **4)** $arcctg1,5+\pi n, n \in Z$; **5)** $\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{12}-2}{5}\right)+2\pi n, n \in Z$;

6) $(-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)+\pi n, n \in Z$; **7)** 2π*k, k*∈Z, π+4πk, *k*∈Z; **8)** $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, k∈Z;

9) $\pm\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{50}}+2\pi k$, *k*∈Z, **10)** $arctg(-3)+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$,*k*∈Z;11) $arctg\frac{-3\pm\sqrt{69}}{3}+\pi k$,*k*∈Z,

12) $\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi m, \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n, n, \in Z, k \in Z$ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$,$(-1)^k \frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$ *k*∈Z;**13)** $\frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, *k*∈Z;

Вариант 1 **1)** $(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k$ **,** *k*∈Z,**; 2)** $\frac{\pi k}{4}$;$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, *k*∈Z; **3)** ∅; **4)** $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi k}{5}$, *k*∈Z**; 5)**

$arcctg2+\pi n, n \in Z$**,** $arcctg0,5+\pi n, n \in Z$ **; 6)** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+k)$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$; *k*∈Z; *n*∈Z;

Вариант 2 **1)** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$**,** *k*∈Z,**; 2)** $\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k$**,** *k*∈Z**; 3)** ∅; **4)** $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi k}{9}$, *k*∈Z; **5)** $\frac{\pi}{6}+\pi k$**,** $\frac{\pi}{12}+\pi k$**,** *k*∈Z; **6)** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+k)$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$; *k*∈Z; *n*∈Z;

Вариант 3 **1)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$**,** *k*∈Z,**;2)** $\frac{2\pi k}{3}$;$2\pi k-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, *k*∈Z;**3)** ∅;**4)** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$;

$arcctg\frac{15}{7}+\pi n, n \in Z$**;**

5) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ *k*∈Z; **6)** $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k+2p)$**,** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k-2p)$**,** *k*∈Z;*p*∈Z

Вариант 4 **1)** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$ **,** *k*∈Z;**2)** $\frac{\pi}{12}(2k+1)$**,** $\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$**,** *k*∈Z;**3)** $\frac{\pi}{5}(2k+1)$**,** $\frac{\pi}{7}(2k+1)$**,** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$**,** *k*∈Z;**4)** $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $arcctg(-3)+\pi n, n \in Z$ **5)** ∅; **6)** $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k+2p)$**,** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k-2p)$**,** *k*∈Z;*p*∈Z

Тригонометрические неравенства

1) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$**,** *k*∈Z;**2)** $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$**,** *k*∈Z; **3)** $\left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$**,** *k*∈Z; **4)** $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$**,** *k*∈Z;**; 5)** $\left[-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right]$**,** *k*∈Z;**; 6)** (-4π+6πk; 6πk), *k*∈Z; **7)** $(-0,5\arccos 0,2+\pi k;0,5\arccos 0,2+\pi k)$, *k*∈Z;; **8)** [6πk;5π+6πk], *k*∈Z; **9)** (π+3πk;2π+3πk), *k*∈Z; **10)** (-π+2πk; $\frac{\pi}{2}$ 2πk], *k*∈Z; **11)** (π+3πk;3π+3πk) *k*∈Z; **12)** $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$ *k*∈Z;**13)** $\left(3\pi+3\pi k;\frac{15\pi}{4}+3\pi k\right)$ *k*∈Z;**14)** $\left(\pi k-\frac{\pi}{2};-arctg\frac{3}{4}+\pi k\right)$,

$\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ $k\in Z$; **15)** $[-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k]$ $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\arccos\frac{1}{3}+2\pi k\right]$; $k\in Z$; **16)** $\left(2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$ $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$ $k\in Z$;; 4)

<u>Вариант 1</u> **1)** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; **2)** $(0{,}5\arccos\frac{1}{3}+\pi k;\pi-0{,}5\arccos\frac{1}{3}+\pi k)$, $k\in Z$; **3)** $\left[\pi k;\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$; **4)** $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$;**.**

<u>Вариант 2</u> **1)** $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$;**2)** $[0{,}5\arccos 0{,}25+\pi k;\pi-0{,}5\arccos 0{,}25+\pi k]$, $k\in Z$; 3) $\left[\frac{\pi k}{3}+\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)$, $k\in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;

<u>Вариант 3</u> **1)** $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in Z$; **2)** $(-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k;\arcsin\frac{1}{3}+\pi(2k+1))$, $k\in Z$; **3)** $\left(-\frac{5\pi}{6}+\pi k;\pi k\right]$, $k\in Z$; **4)** $\left[2\pi k-\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2};\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

<u>Вариант 4</u> **1)**$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; **2)** $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi k;-\frac{\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$; **3)** $\left[\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$; **4)** $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

Список литературы:

1. Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся/ФИПИ.- М.,2009.
2. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней/ Интернет–ресурс: http://alexlarin.net/ege/2011/C3-2011.pdf
3. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры.
4. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач: Алгебра. Тригонометрия. Учебное пособие для студентов пед.ин-тов по матем.спец. – М.,1984.
5. Родионов Е.М., Филимонов Л.А. Уравнения, неравенства. Параметры. Тригонометрия. Логарифмы. –М.,2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Елена Валентиновна **Баранова**

Светлана Викторовна **Менькова**

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Арзамасский филиал
607220, Арзамас, ул. К.Маркса,36.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,6 п.л.. Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано участок оперативной печати Арзамасского филиала ННГУ

Арзамасский филиал ННГУ
607220 г. Арзамас Нижегородской области, ул. К. Маркса, 36