O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

G‘. NASRITDINOV

IQTISODIY-MATEMATIK MODELLAR VA USULLAR

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan 5406200 – «statistika», 5340400 – «biznesni boshqarish» va 5340100 – «iqtisodiyot» mutaxassisliklari bo‘yicha tahsil oluvchi talabalar uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

O‘ZBEKISTON FAYLASUFLARI
MILLIY JAMIYATI NASHRIYOTI
TOSHKENT – 2011

UDK: 330.4.001.57(075)
BBK 65.23
N29

Nasriddinov, G‘.
Iqtisodiy-matematik modellar va usullar: darslik/ G‘. Nasritdinov; O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi. – T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2011. –320 b.

Mazkur darslik "Iqtisodiy-matematik modellar va usullar" kursi bo‘lib, 5406200 – statistika, 5340400 – biznesni boshqarish va 5340100 – iqtisodiyot mutaxassisliklari bo‘yicha amaliy o‘quv dasturi asosida yozilgan. Unda iqtisodiy jarayonlarning statik va dinamik modellari o‘rganilgan, ularni tekshirish uchun qator usullar keltirilgan. Shu usullar qatoridan yangi, ratsional usullar ham joy olgan. Darslikdan yosh o‘qituvchilar, magistrantlar hamda aspirantlar ham foydalanishlari mumkin.

UDK: 330.4.001.57(075)
BBK 65.23
N29

ISBN 978-9943-391-16-1

Taqrizchilar:
iqtisod fanlari doktori, professor Q.Safoyeva;
fizika-matematika fanlari doktori, professor Sh.Nazirov;
iqtisod fanlari doktori, professor F.Egamberdiyev.

ISBN 998-9943-391-16-1

SO‘ZBOSHI

Iqtisodiyot odamlarning mahsulotlarni ishlab chiqarish, taqsimlash-ayirboshlash va iste’mol qilish *usullari* bilan bog‘langan faoliyati doirasidan iborat. Iqtisodiyotga bunday ta’rifni Rossiya FAning akademigi V.L.Makarov bergan. Ta’rif mazmuniga ko‘ra iqtisodiyot – kishilarning faoliyati. Ammo faoliyat turli-tuman bo‘ladi. Bu yerda faoliyatning uch muhim qirrasi ustida gap boradi: mahsulotlarni ishlab chiqarish usullari, taqsimlash-ayirboshlash usullari, nihoyat, iste’mol qilish usullari. Shu uch turli faoliyatda yaratilgan (yaratiladigan) matematik modellarni o‘rganish usullari ko‘zda tutiladi.

Hozirgi zamonda xalq xo‘jaligining turli sohalarida uchraydigan iqtisodiy jarayonlarning modellari yaratilgan, ularni tadqiqot qilishning qator yangi usullari ham kashf qilingan. “Iqtisodiy-matematik modellar va usullar” kursi eng zamonaviy fan bo‘lib, mazmuni jihatidan uning aniq chegarasini bilib bo‘lmaydi. Uning hajmi va mazmuni Davlat standartidagi talablarga qarab aniqlanadi. Shunday ekan, mazkur kurs nimani o‘rganadi?

“Iqtisodiy-matematik modellar va usullar” fani iqtisodiy jarayonlarning matematik modellarini va ularni tadqiq qilish usullarini o‘rganadi.

Mazkur darslik muallifning ko‘p yillar davomida O‘zMU iqtisodiyot fakultetida matematik iqtisodiyotga oid fanlardan dars berish jarayonida to‘plagan tajribasi va olib borgan ilmiy-tadqiqot natijalarini o‘quv jarayoniga joriy etish oqibatida yaratilgan.

Darslik iqtisodiyot yo‘nalishida tahsil olayotgan barcha talabalarga mo‘ljallangan. Undan magistrantlar, aspirantlar va yosh o‘qituvchilar ham foydalanishlari mumkin.

Muallif darslik qo‘lyozmasiga oid qimmatli maslahatlari uchun iqtisod fanlari doktori, professor Q.Safoyevaga, fizika-matematika fanlari doktori, professor Sh.Nazirovga, iqtisod fanlari doktori, professor F.Egamberdiyevga, shuningdek, darslik yozish g‘oyasini qo‘llab-quvvatlagan va sidqidildan yordamlarini ayamagan iqtisod fanlari doktori, professor T.Sh. Shodiyevga, fizika-matematika fanlari doktori, professor M.To‘xtasinovga o‘z minnatdorchiligini bildiradi.

Muallif.

KIRISH

Hayotda turli mazmundagi muammolar tez-tez uchrab turadi. Shunda maqbul (optimal) qarorlar qabul qilishga to'g'ri keladi. Jumladan, iqtisodiyotda uchraydigan muammolarning ba'zilari geometrik usul bilan, ba'zilari algebrik usul bilan yechiladi. Ammo ba'zi masalalarni yechish uchun differensial va integral hisobdan foydalanmasa bo'lmaydi. Aytilgan muammolar ekstremal masalalarni yechishga keltiriladi. Bunday masalalarni yechish uchun matematikadan foydalanish qadimda — taxminan 25 asr avval boshlangan. Ko'p ekstremal masalalar geometrik usul bilan yechilgan. Geron, Shvars, Shteyner masalalari va boshqalar shular jumlasidandir. Ammo uzoq vaqt davomida ekstremal masalalarni yechishning umumiy usullari topilmadi. Shunga qaramasdan eramizning X asrlariga kelib Abu Rayhon Beruniy va uning shogirdlari o'z tadqiqotlarida kelajakda (XVI—XVII asrlarda) hosila tushunchasiga olib kelgan mulohazalardan foydalanishdi. Ma'lumki, XVI—XVII asrlarda differensial va integral hisob keng ko'lamda rivojlandi. Endi ekstremal masalalarni yechish uchun umumiy usullarni yaratishga imkoniyat tug'ildi va bunday usullar yaratildi ham. Har bir oila, korxona, mamlakat uchun iqtisodiyot muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli iqtisodiy jarayonlar chuqur o'rganilib, ularning matematik modellarini yaratish bo'yicha qator ilmiy tadqiqotlar olib bora boshlandi. Bu sohada katta ishlar qilindi. XX asrning birinchi yarmida L.V.Kantorovich (Rossiya) va Kupmanslar (AQSH) chiziqli dasturlash nomli matematikaning muhim bo'limini yaratishdi. Ular 1975-yilda "Tabiiy resurslardan optimal foydalanish" bo'yicha qator ilmiy ishlari uchun Nobel mukofotini olishdi.

Hozirgi vaqtda iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari ko'plab yaratilgan va ishlab chiqarishga joriy qilingan. Shu bilan birga modellarni tadqiqot qilishning qator usullari ham yaratilgan. Mazkur darslikning maqsadi "Iqtisodiy-matematik modellar va usullar" haqida zarur ma'lumotlarni bayon etishdan iborat. Bu sohada yaratilgan adabiyotlar ichida V.S.Nemchinovning "Экономико-математические методы и модели" (M.: Мысл, 1965), L.L.Terexovning "Экономико-математические методы" (M.: Статистика,1972) va S.A.Ashmanovning "Математические модели и методы в экономике" (M.: Из-во. МГУ, 1980) nomli kitoblarni alohida ko'rsatib o'tamiz. Oxirgi yillar davomida matematikada yangi yo'nalishlar paydo bo'ldi, ko'plab yangi-yangi iqtisodiy-matematik modellar, iqtisodiy jarayonlarni o'rganishning qator ratsional usullari yaratildi. Mazkur darslikda shu o'zgarishlarni e'tiborga olishga harakat qilindi.

Darslik 13 bobdan iborat. Birinchi va ikkinchi boblarda iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish, iqtisodiy modellar, matematik modellar haqida ma'lumotlar berilgan. Shu bilan birga sodda hollarda talab va taklif jarayonlari modellari ko'riladi. 3-bobda mikroiqtisodiyotga xos naflik funksiyasi va iste'molchining optimal tanlovi masalasi o'rganiladi. 4-bobda yana mikroiqtisodiyotga xos umumlashgan iste'mol funksiyasi va uning maksimumi haqida masala chuqur o'rgatiladi. 5-bob elastiklik tushunchasiga va uning iqtisodiy jarayonlarni o'rganishga tatbig'iga bag'ishlangan. 6-bob eng katta boblardan bo'lib, unda chiziqli dasturlashga oid ma'lumotlar bayon etilgan. Sodda hollarda kanonik va normal masalalarni elementar usul bilan yechish mumkinligi ko'rsatiladi. Dansigning simpleks-usuli to'liq keltiriladi. Boshlang'ich bazis rejani topish usullari bayon etiladi. Chiziqli dasturlashning qovushma masalalari, 3 ta tatbiqiy masala keltiriladi. 7-bob chiziqsiz dasturlash masalalariga bag'ishlangan. Chiziqsiz dasturlashning sodda masalalari geometrik dasturlash usullari yordamida yechilishi ko'rsatilgan. Shu bobda Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan birga ma'lum shartlar bajarilganda chiziqsiz dasturlash masalalarini ratsional-burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli bilan yechish mumkinligi bayon qilingan. Avvalgi boblardagi funksiyalarga silliqlik sharti qo'yilgan. 8-bob silliqmas masalalarga bag'ishlangan. Bunda berilgan nuqtada ma'lum yo'nalish bo'yicha olingan hosila tushunchasidan unumli foydalanilgan va qator iqtisodiy masalalar yechilgan. 9-bobda iqtisodiy jarayonlarning ekonometrik modellari bayon etilgan. Unda korrelyatsiya, regressiya va ularning modellari, juftlik chiziqli regressiya va uning tenglamasi keltiriladi. Juftlik chiziqli regressiya tenglamasini tanlash sifatini aniqlab beradigan Fisherning F– belgisi, tenglama parametrlarining ma'nodorligini tekshirish uchun Styudentning t– belgisi bayon etiladi va muayyan masalaga qo'llaniladi. 10-bob makroiqtisodiy jarayonlarning neoklassik ishlab chiqarish funksiyalariga bag'ishlangan. Bu ham eng katta boblardan bo'lib, unda qator muhim mavzular o'z aksini topgan. 11-bobda iqtisodiy dinamikaning turli matematik modellari ko'rilgan, unda jamg'arish normasi o'zgarmas bo'lgan hol qaraladi. 12-bobda ikki sektorli modellarning turli hollari o'rganilgan. Nihoyat, 13-bob iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normali modellariga va magistral teoremalarga bag'ishlangan.

Har bir bobga oid masalalar va nazorat savollari keltirilgan.

1-BOB. IQTISODIY JARAYONLARNI MODELLASHTIRISH

Matematik usullar va modellar zamonaviy iqtisodiy nazariyaning tabiiy, zaruriy elementlaridan iborat. Matematikadan foydalanish iqtisodiy o'zgaruvchilar va o'rganilayotgan obyektlar orasidagi muhim bog'lanishlarni tavsiflash imkoniyatini beradi. *Obyekt* deyilganda olib borilayotgan tadqiqot predmeti tushuniladi. Albatta, obyekt moddiy yoki xayoliy bo'lishi mumkin. Agar Oy o'rganilayotgan bo'lsa, u moddiy obyekt bo'ladi. Shuningdek, iqtisodiyotda maksimal daromad olish masalasi qo'yilgan bo'lsa, maksimal daromad xayoliy obyekt vazifasini bajaradi.

Matematika va statistika usullari obyekt haqida yangi ma'lumotlarni olishga imkon tug'diradi. Bu esa o'rganilayotgan obyektni yanada yaxshiroq tavsiflashga olib keladi.

1.1-§. Model, modellashtirish va uning bosqichlari

Fanning rivojlanishi, iqtisodiy o'sish, shu bilan birga, kiyimlarni bichish, detallarni yasash va boshqa jarayonlar ularning modellarini qurish va undan foydalanish bilan bog'langan. Hozirgacha olimlar model tushunchasi bo'yicha yagona fikrga kelishmagan. Biz mazkur kursda *model* deyilganda quyidagi fikrni tushunamiz:

Model – shunday moddiy yoki xayoliy (ideal) obyektdan iboratki, u (original) asl obyektni almashtiradi, uni o'rganish natijasida asl obyekt haqida bizni qiziqtirayotgan yangi ma'lumotlar olinadi.

Modelni qurish, uni o'rganish va tatbiq etish jarayoni *modellashtirish* deyiladi. Modellashtirish jarayoni uch elementni o'z ichiga oladi:

1. Tadqiqotchi – subyekt.
2. Tadqiqot obyekti.
3. Ko'rilgan model – tadqiqotchi va asl obyekt orasidagi munosabat.

Agar tadqiqotlar shunday modellar yordamida olib borilsaki, ularning asl obyekt bilan bog'lanishi moddiy xarakterga ega bo'lsa, modellashtirish *moddiy* deyiladi. *Ideal* modellashtirish moddiy modellashtirishdan keskin farq qiladi. U model bilan asl obyekt orasidagi ideal bog'lanishga asoslangan. Agar model faqat belgilar sistemasidan foydalanib tavsif etilgan bo'lsa, bunday modellashtirish *belgili* deyiladi. Belgili modellashtirishning eng muhim turi *matematik modellashtirishdir.* Unda modellar formulalar, munosabatlar, matematik belgilar bilan tavsiflanadi, ifodalarni almashtirish esa mantiqiy va matematik qoidalarga asoslangan bo'ladi.

Keyingi mulohazalarda iqtisodiyot (iqtisod), iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari tushunchalari tez-tez uchrab turadi. Shuning uchun Rossiya FA ning akademigi Valeriy Leonidovich Makarovning iqtisodga bergan aniq ta'rifini keltiramiz[1]):

Iqtisod (iqtisodiyot) kishilarning mahsulot ishlab chiqarish, taqsimlash-ayirboshlash va iste'mol qilish usullari bilan bog'langan faoliyati doirasidan iborat. Uning 4 ta elementi bor:

1. Kishilar.
2. Mahsulotlar (moddiy va nomoddiy-turli xizmatlar).
3. Kishilarning turli faoliyatlari.
4. Tashkiliy struktura.

Mazkur elementlarni alohida-alohida tushuntirib o'tirishning hojati yo'q. Ular shundoq ham ravshan. Iqtisod ta'rifiga ko'ra, iqtisod kishilarning faoliyatidan iborat. Kishilar bo'lmasa iqtisod ham yo'q. Ular turli faoliyati natijasida mahsulotlar ishlab chiqaradi. Bunda albatta tashkiliy struktura kerak. Kimdir rahbar, kimdir yordamchi, kimdir ishlab chiqaruvchi bo'lmog'i lozim va boshqalar.

1.2-§. Iqtisodiy modellar va ularni qurish

Matematik modellardan F.Kene ("Iqtisodiy jadval" 1758-y.), A.Smit (Makroiqtisodiyotning klassik modeli), D.Rikardo (Xalqaro savdo modeli) kabi olimlar foydalanishgan. XIX asrda bozor iqtisodiyotini modellashtirish sohasida qator olimlar (L.Valras, O.Kurno, V.Pareta va boshqalar) va ularning matematik maktabi katta hissa qo'shdilar. XX asrda modellashtirishning *matematik usullari* keng ko'lamda qo'llanila boshlandi (D.Xiks, R.Solou, V.Leontyev, P.Samuelson va b. Ular Nobel mukofotiga sazovor bo'lishgan). Rossiyada XX asr boshlarida R.K.Dmitriyev va Ye.Ye.Slutskiy, 1960–1980-yillarda V.S.Nemchinov, V.V.Novojilov, L.V.Kantorovich (u 1975-yilda AQSH olimi Kupmans bilan birga "Tabiiy resurslardan optimal foydalanish" mavzusiga oid ilmiy ishlari uchun Nobel mukofoti olgan) *matematik modellashtirish va iqtisodiy-matematik usullarni* rivojlantirish ishiga ulkan

[1] В.Л.Макаров. Модели согласования экономических интересов. Учебное пособие. Новосибирский ГУ. Новосибирск, 1981.

hissa qo'shdilar. Masalan, matematikadagi yangi, *chiziqli dasturlash* nomli yo'nalish shu L.V.Kantorovich nomi bilan bog'langan. Chiziqli dasturlashning kanonik va normal formadagi masalalari bor bo'lib, normal masala qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yordamida kanonik masalaga keltirilishi mumkin. Kanonik masalani yechishning ajoyib usuli AQSH olimi Dj.Dansig tomonidan tavsiya etilgan bo'lib, bu usul "simpleks-usul" deb ataladi. Hozir bu usulning turli masalalarni yechishga moslashgan har xil ko'rinishlari mavjud.

Iqtisodiy modellar – turli iqtisodiy jarayonlarning soddalashtirilgan tavsifidir. Masalan, firmalar modeli, iqtisodiy o'sish, bozor muvozanati modellari va boshqalar shular jumlasidandir. Modellashtirish jarayonida iqtisodchilar o'rganilayotgan obyektga tegishli *muhim* parametrlarni ajratib olishadi va ikkinchi darajali parametrlarni tashlab yuborishadi. Turli obyektlarda muhim va ikkinchi darajali parametrlar turlicha bo'lishi mumkin.

Iqtisodiy modellar quyidagicha quriladi:

1. Obyekt (predmet) haqidagi bor ma'lumotlar bayon etiladi va tadqiqot maqsadi aytiladi.

2. Strukturasiga (tuzilishiga) oid va o'zaro bog'langan elementlar ajratiladi, eng muhim sifatlarini tavsiflaydigan parametrlar (faktorlar) ham aniqlanadi.

3. Modelning elementlari orasidagi bog'lanish so'z bilan, sifat nuqtayi nazaridan tavsiflanadi.

4. Faktorlar (parametrlar) uchun simvolik belgilashlar kiritiladi, ular orasida bog'lanish taxminan (empirik) tavsiflanadi. Shundan keyingina *matematik model* bayon etiladi.

5. Hosil bo'lgan matematik modelni, ya'ni mos matematik masalani yechish uchun matematik yoki statistik usullar ishlatiladi va parametrlarning muayyan qiymatlarida hisob-kitob olib boriladi.

6. Keyin hisob-kitob natijalarini asl jarayonga tegishli ma'lumotlar bilan taqqoslanadi. Agar natija bizni qanoatlantirmasa, ya'ni qurilgan matematik model qanoatlanarli bo'lmasa, unda muhim va ikkinchi darajali faktorlarni qayta ko'rib chiqish, faktorlar orasidagi bog'lanishlarni chuqurroq o'rganib chiqish lozim bo'ladi.

Shu 6 qadam *modellashtirish* deb yuritiladi.

Misollar ko'raylik:

1-misol. Bir yildan keyin 12000 so'm olish uchun bankka yillik foiz stavkasi 20 ga teng bo'lganda qancha so'm qo'yish lozim?

Yechish. Dastlabki summani M_0, oxirgi summani M_1, stavka foizini R deb belgilaymiz. Unda $M_1 = M_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$ formula o'rinli. Bizning holda M_1=12000 so'm, R=20%. Shuning uchun $12000 = M_0(1+20/100)$ yoki M_0=10000 so'm.

Bu masalada $M_1 = M_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$ – matematik model.

2-misol. Zavodda o'rtacha mehnat unumdorligi 20% ga ortgan va yil oxirida 12000 birlik mahsulot ishlab chiqilgan. Yil boshida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi topilsin.

Yechish. Dastlabki mahsulot miqdori Q_0, oxirgisi Q_1 va o'sish foizi R bo'lsin. Unda ushbu $Q_1 = Q_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$ formula o'rinli. Bu masalaning matematik modelidan iborat. Ko'rilayotgan holda

$$Q_0 = \frac{Q_1}{1+\frac{R}{100}} = \frac{12000}{1+\frac{20}{100}} = 10000 \text{ birlik.}$$

1.3-§. Iqtisodiy obyektning matematik modeli va uning turlari

Iqtisodiy obyektning matematik modeli – shu obyektning tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy munosabatlar, grafiklar yordamida tavsiflanishidan iborat. Boshqacha aytganda, obyektning matematik modeli uning shu obyektni o'rganishni soddalashtirish maqsadida ko'rilgan *shartli aksidan* iborat. Albatta, qurilgan model obyekt haqida yangi ma'lumotlar berishi yoki mavjud holatda eng yaxshi yechimini aniqlashga yordami tegishi kerak.

Iqtisodiy modelning asosiy elementlari quyidagilar:

1) ishlab chiqarishda asbob-uskunalar, banklar, ishchi kuchi va xomashyo;

2) mahsulotlarning turli xillari ishlab chiqariladi, ular uchun ishlatiladigan resurslar (xomashyolar) xarajati narxi beriladi.

Masalan, agar $x_1, x_2, ..., x_n$ – ishlab chiqariladigan mahsulotlar hajmi,

$c_1, c_2, ..., c_n$ — ularning bir birligining narxi bo'lsa, masalani ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy narxini maksimum qilish kabi qo'yish mumkin:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max$$

Matematik modelda ishtirok etadigan o'zgaruvchilar 2 turli bo'ladi: *ekzogen* va *endogen* o'zgaruvchilar.

Ekzogen o'zgaruvchilar *modeldan tashqarida beriladi. Masalan, stanoklar soni* K, *ishchi kuchi* L, *xomashyo* R, *narxlar, xarajatlar va boshqalar misol bo'la oladi.*

Endogen o'zgaruvchilar *modelga oid hisob-kitoblar natijasida aniqlangan, ular avvaldan berilmaydi, yil oxirida aniq bo'ladigan yalpi milliy daromad; milliy daromadning kapital xarajat va iste'molga ajratiladigan optimal bo'laklari va boshqalar.*

Asosiy iqtisodiy-matematik modellar *quyidagilardan iborat:*

1. Makroiqtisodiy modellar.
2. Mikroiqtisodiy modellar.
3. Nazariy modellar.
4. Tatbiqiy modellar.
5. Optimallashtirish modellari.
6. Muvozanat modellari.
7. Statistik modellar.
8. Dinamik modellar.

Makroiqtisodiy modellar yiriklashtirilgan iqtisodiy ko'rsatkichlarni (YaMM, iste'mol, investitsiya, kapital xarajat, milliy daromad va boshqalar) va ular orasidagi bog'lanishni tavsiflaydi.

Mikroiqtisodiy modellar iqtisodiyotning tuzilishi va funksional tashkil etuvchilar orasidagi o'zaro munosabatlarni tavsiflaydi.

Nazariy modellar iqtisodiyotning umumiy va uning muhim elementlarining umumiy xossalarini bor ma'lumotlarni e'tiborga olgan holda o'rganadi.

Tatbiqiy modellar muayyan iqtisodiy obyektning parametrlarini baholash va amaliy qarorlar qabul qilish imkonini beradi. Bunday modellarga avvalo *ekonometrik modellar* misol bo'la oladi. Ekonometrik modellar iqtisodiy ko'rsatkichlarning son qiymatlariga tayanadi va bu ko'rsatkichlarning qanchalik ishonchliligini tekshiradi.

Optimallashtirish modellari kam xarajat qilib ma'lum hajmda mahsulot ishlab chiqarish, bor xomashyodan maksimal hajmda mahsulot ishlab chiqarish va h.k. uchun iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi optimal munosabatlarni topish bilan shug'ullanadi.

Muvozanat modellari bozor iqtisodiyotida alohida o'rin tutadi. Ular iqtisodiyotning shunday holatlarini tavsiflaydiki, iqtisodiyotni berilgan holatdan boshqa holatga o'tkazishga intiluvchi kuchlar yig'indisi nolga teng bo'ladi (Djon fon Neyman).

Qisqacha matematik ekonomika va ekonometrika haqida ma'lumot beramiz.

Matematik ekonomika – iqtisodiy nazariyaning iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari xossalari va yechimlarini tahlil (analiz) qiladigan bo'limidir. Matematik ekonomika modellari ichida uning ikkita yirik sinfini ajratishadi.

1. Iqtisodiy sistemalarda *muvozanat* modellari.
2. *Iqtisodiy o'sish* modellari.

Agar iqtisodiy ko'rsatkichlar vaqtga bog'liq bo'lsa, iqtisodiy dinamika modellariga ega bo'lamiz. Unda balanslangan o'sish traektoriyalarini topish va tahlil (analiz) qilish bilan shug'ullaniladi (fon Neyman, Solou, Shell, Geyl, Morishima va b.).

Ekonometrika – matematik statistika usullari yordamida iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi miqdoriy qonuniyatlar va munosabatlarni o'rganadi. Korreksion va regression analiz shu usullar asosida yotadi.

Hozirgi vaqtda rivojlangan va bozor iqtisodiyotiga o'tayotgan mamlakatlarda ekonometrik modellar va usullar iqtisodiyotda faqat yangi ma'lumotlar olish uchun emas, balki bashorat qilish, bank ishi, biznes va boshqalarda keng qo'llaniladigan qurol bo'lib xizmat qiladi.

Mazkur fan yuqorida aytib o'tilgan iqtisodiy-matematik usullar va modellarni to'liq qamrab olishi mumkin emas, albatta. Biz mazkur fan chegarasidagi muhim deb topilgan mavzularni bayon etamiz.

Avvalo talab va taklif jarayoni modelini ko'rib chiqamiz. Har bir holda chiziqli va chiziqsiz modellarni ko'rish mumkin. Ular yordamida bozor muvozanati, muvozanat narxi, egar nuqta tushunchalarini misollarda ko'rib chiqish mumkin.

2-BOB. TALAB VA TAKLIF JARAYONINING MATEMATIK MODELLARI

Avvalo biz talab va taklif tushunchalarini eslatib o'tamiz[1].

Talab (tovarlar va xizmatlarga talab) – to'lovga qobil ehtiyoj, bozorga chiqqan va kerakli miqdordagi pul bilan ta'minlangan ehtiyojni ifoda etadi. Talab ehtiyojdan kelib chiqadi, xaridorga ajratilgan pul shaklida ifoda etiladi. Narx bilan talab bevosita bog'langan. Tabiiyki, narx ortsa, talab kamayadi, aksincha, narx kamaysa, talab ortadi. Albatta, narx ortaversa ham minimal talab saqlanadi. Ammo narx kamaysa ham minimal narx mavjud bo'ladi va shu sababli talab istalgancha katta bo'lib keta olmaydi.

Taklif – ishlab chiqaruvchilar bozorda sotishga tayyorlangan (bozorga chiqargan), muayyan narxlarga ega tovarlar va xizmatlar miqdori. Tovar taklifi – bozorga chiqarilgan yoki keltirilishi mumkin bo'lgan jami tovarlar miqdori strukturasidir, taklif ishlab chiqarish miqyosi va uning tarkibiga bog'liq, lekin yaratilgan mahsulot miqdori unga teng emas. Ishlab chiqarilgan mahsulotning faqat bir qismi bozorga chiqariladi va u tovar deyiladi, uning qolgan qismi ishlab chiqaruvchining o'zida qoladi. Taklifning hajmi va tarkibi bor. Uning hajmi sotishga chiqarilgan tovarlar summasi bilan belgilanadi. Bu esa, o'z navbatida tovarlar miqdoriga va ularning narxiga bog'liq. Ravshanki, narx ortsa taklif hajmi ortadi; aksincha, narx kamaysa, taklif hajmi ham kamayadi. Taklif istalgancha ortib bora olmaydi, chunki ishlab chiqarish resurslari chegaralangan.

Talab va taklifning narxga bog'liqligini quyidagicha ifodalash mumkin: talab miqdori va narx teskari proporsional; taklif miqdori va narx to'g'ri proporsional.

2.1-§. Sodda hollarda talab modellarini qurish

Agar narx miqdorini x, talab miqdorini y deb belgilasak, talab va narx orasidagi bog'lanishni $y=f(x)$ deb belgilash mumkin. Bunda $f(x)$ differensiallanuvchi, shu bilan birga $x>0$ da kamayuvchi funksiya, ya'ni $f'(x)<0$, $\forall x>0$. Masalan, $y=kx+b$, $k<0$, $b\geq 0$ – chiziqli

[1] N. To'liyev, A. O'lmasov. Ishbilarmonlar lug'ati. – T.: Qomuslar bosh muharririyati, 1993

funksiya, $y=\frac{a}{x}$, $a>0$, $\forall x>0$ – chiziqsiz funksiyalar yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradi.

Agar kuzatuvlar natijasida narx va talab miqdorlari uchun ushbu ($x_1<x_2$, $y_1>y_2$; $x_1>0$, $x_2>0$, $y_1>0$, $y_2>0$)

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

jadval topilgan bo'lsa, narx va talab orasidagi munosabatni avval chiziqli, keyin chiziqsiz funksiya ko'rinishida qurish mumkin. So'ngra qaysi hol maqsadga muvofiq ekanini tekshirish kerak bo'ladi.

1°. $y=kx+b$ bo'lsin. Bunda k va b parametrlarni topish uchun (x_1,y_1) va (x_2,y_2) nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasini topish kifoya. To'g'ri chiziq shu nuqtalardan o'tishi shartidan foydalanish ham mumkin. Biz shu yo'lni tanlaylik. Unda k va b lar uchun quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} y_1=kx_1+b, \\ y_2=kx_2+b. \end{cases}$$

Bundan $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $b=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$ kelib chiqadi. Ravshanki, $k<0$, $b>0$. Shunday qilib,

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}. \tag{2.1}$$

Topilgan (2.1) funksiya berilgan jadvalga mos talab jarayonining chiziqli modelidan iborat.

Misol ko'raylik.

Faraz etaylik, jadval quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

x	10	15	20
y	25	18	? (11)

Talab funksiyasi $y=kx+b$ dagi k va b lar ushbu

$$\begin{cases} 25 = 10k + b, \\ 18 = 15k + b \end{cases}$$

sistemadan osongina topiladi: $k = -7/5,\ b = 39$. Shunday qilib, model $y = -\frac{7}{5}x + 39$ ko'rinishda yoziladi. Agar x=20 bo'lsa, talab miqdorini bashorat qilish mumkin: $y(20)$=11.

2⁰. Endi $y = \frac{a}{x} + b,\ a > 0,\ b > 0$ bo'lsin. Bu holda ham parametrlar ushbu

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

$x_1 < x_2,\ y_1 > y_2$

jadvalga ko'ra topiladi:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a}{x_1} + b, \\ y_2 = \dfrac{a}{x_2} + b. \end{cases}$$

Bundan sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$a = \frac{x_1 x_2 \cdot (y_2 - y_1)}{x_1 - x_2} > 0, \qquad b = \frac{y_1(x_1 - x_2)}{x_2(y_2 - y_1)} > 0.$$

Shunday qilib, berilgan jadvalga mos talab jarayonining chiziqsiz modeli quyidagicha yoziladi:

$$y = \frac{x_1 x_2 \cdot (y_2 - y_1)}{x \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{y_1(x_1 - x_2)}{x_2(y_2 - y_1)}. \tag{2.2}$$

Misol sifatida yana avvalgi jadvalni olaylik.

x	10	15	20
y	25	18	? (14,5)

Modelni $y = \frac{a}{x} + b$ chiziqsiz kamayuvchi funksiya ko'rinishida izlaymiz. Bunda a va b parametrlar uchun ushbu

$$\begin{cases} 25 = \dfrac{a}{10} + b, \\ 18 = \dfrac{a}{15} + b. \end{cases}$$

sistemaga egamiz. Undan sodda hisoblashlar yordamida topamiz: a=210, b=4. Shunday qilib, jadvalga mos talab jarayonining chiziqsiz modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = \frac{210}{x} + 4.$$

Agar x =20 bo'lsa, y (20)=14,5 bo'ladi.

Endi talab funksiyasi uchun qurilgan chiziqli va chiziqsiz hollarni taqqoslaylik.Chiziqli holda narx 15 dan 20 ga ko'tarilsa, talab 18 dan 11 ga, ya'ni 7 birlikka kamayadi. Chiziqsiz holda esa, narx 15 dan 20 ga ko'tarilsa, talab 18 dan 14,5 ga, ya'ni, 3,5 birlikka kamayadi. Aslida talab biror egri chiziq bo'yicha kamayadi. Yuqoridagi natijalardan kelib chiqadiki, chiziqsiz hol asl jarayonni aks ettiradi.

2.2-§.Sodda hollarda taklif modellarini qurish

Avvalgidek x – yana narxni, y esa taklifni anglatsin. Unda narx bilan taklif miqdori orasidagi munosabat y=f(x) ko'rinishda yoziladi, bunda $f'(x)$>0, $\forall x > 0$, ya'ni mos model o'suvchi, grafigi I chorakda joylashgan funksiya yordamida tavsiflanadi. Ushbu $y = kx + b$, k>0 chiziqli, $y = a \cdot \sqrt{x} + b$, a>0 – chiziqsiz funksiyalar taklif jarayoni modellarini ifodalaydi.

Sodda holda kuzatuvlar natijasida quyidagi statistik ma'lumotlar olindi deylik:

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	?

$x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$

1. Avval chiziqli taklif jarayonining modelini ko'ramiz.

Modelni $y = kx + b$, k>0 ko'rinishda yozamiz. Unda k va b parametrlar ushbu

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b, \\ y_2 = kx_2 + b. \end{cases}$$

sistemadan topiladi. 2.1.-§dagi (2.1)ga ko'ra chiziqli taklif jarayonining modeli xuddi (2.1) kabi yoziladi, ammo bu holda $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$ bo'ladi, b esa musbat bo'lishi ham, manfiy bo'lishi ham mumkin.

Misol ko'ramiz. Faraz qilaylik, statistik ma'lumotlar jadvali quyidagicha bo'lsin:

x	4	9	16
y	20	40	? (68)

Chiziqli hol uchun $y = kx + b$ funksiya parametrlari ushbu

$$\begin{cases} 20 = 4k + b, \\ 40 = 9k + b \end{cases}$$

sistemadan topiladi: k =4, b =4. Shunday qilib, chiziqli taklif funksiyasi $y = 4x + 4$ ko'rinishga ega. Bundan x =16 da y(16)=68 kelib chiqadi.

2. Endi chiziqsiz taklif jarayonining modelini quramiz.

Modelni $y = a\sqrt{x} + b,\ a > 0$ ko'rinishda yozamiz. Unda a va b parametrlar quyidagi sistemadan topiladi:

$$\begin{cases} y_1 = a\sqrt{x_1} + b, \\ y_2 = a\sqrt{x_2} + b. \end{cases}$$

Sodda hisoblashlar yordamida a va b lar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} > 0, \qquad b = \frac{\sqrt{x_2} \cdot y_1 - \sqrt{x_1} \cdot y_2}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}$$

Shunday qilib, chiziqsiz taklif jarayoni modeli ushbu funksiya bilan tavsiflanadi:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x_2} \cdot y_1 - \sqrt{x_1} \cdot y_2}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}. \qquad (2.3)$$

Endi misol ko'raylik. Jadval avvalgidek bo'lsin:

x	4	9	16
y	20	40	? (60)

Chiziqsiz $y = a\sqrt{x} + b$ funksiya uchun a va b larni ushbu

$$\begin{cases} 20 = 2a + b, \\ 40 = 3a + b \end{cases}$$

sistemadan osongina topiladi: a =20, b =−20. Shunday qilib, chiziqsiz taklif modeli $y = 20\sqrt{x} - 20$ ko'rinishga ega. Bundan $y(16)=60$ kelib chiqadi.

Endi taklif funksiyasi uchun qurilgan chiziqli va chiziqsiz hollardagi natijalarni taqqoslaylik.Chiziqli holda narx 9 dan 16 birlikka ortsa, taklif miqdori 40 dan 68 ga, ya'ni 28 birlikka ortar ekan.Chiziqsiz holda esa, narx 9 dan 16 ga ortganda taklif miqdori 40 dan 60 ga, ya'ni 20 birlikka ortishi ma'lum bo'ldi. Ko'rinadiki, bozorga chiqariladigan tovarlar hajmi chiziqsiz holda 8 birlik kam. Agar chiziqli model bilan ish ko'rilsa, bozorga ortiqcha tovarlar chiqarilgan bo'ladi. Demak, bozordagi asl holatni chiziqsiz talab, chiziqsiz taklif funksiyalar tavsiflaydi.

Qayd qilib o'tamizki, chiziqsiz talab va taklif funksiyalarini boshqacha ko'rinishda ham izlash mumkin edi. Jumladan, chiziqsiz taklif funksiyasini $y = a\ln x + b, \ \ x > 1$ ko'rinishda olaylik. Unda a va b parametrlar quyidagi sistemadan topiladi.

$$\begin{cases} 20 = a \cdot \ln 4 + b, \\ 40 = a \cdot \ln 9 + b. \end{cases}$$

Bundan $20 = a(\ln 9 - \ln 4)$ yoki $20 = a \cdot 0{,}8$, a=25;

$b = 20 - 25 \cdot 1{,}386$=−14,65. Shunday qilib, ko'rilayotgan holda chiziqsiz taklif funksiyasi $y = 25\ln x - 14{,}65$ ko'rinishga ega. Endi $y(16)$ni hisoblaymiz:

$y(16) = 25 \cdot \ln 16 - 14{,}65 = 100 \cdot \ln 2 - 14{,}65 = 100 \cdot 0{,}693 - 14{,}65 =$

$= 69{,}3 - 15{,}65 = 54{,}65$. Demak, $y(16)$=54,65.

Yuqoridagi misollarda chiziqli holda, $y(16)$=68, chiziqsiz $y = 20\sqrt{x} - 20$ holda $y(16)$=60 natijalarga ega edik. Taklif uchun logarifmik holni olganda $y(16)$=54,65 kelib chiqdi. Bu natijalardan ko'rinadiki, barcha hollarda narx bilan talab yoki narx bilan taklif orasidagi munosabat empirik (taqribiy) ko'rinishga ega.

2.3-§. Bozor muvozanati va muvozanat narxi

1. Mazkur mavzuni bayon etishdan avval bozor, bozor muvozanati, narx, muvozanat narxi va boshqa tushunchalarni keltiramiz[1].

Tovar – bozorda oldi-sotdi orqali ayirboshlanadigan mehnat mahsuli. Tovar shunday mahsulotki, u o'zini ishlab chiqaruvchilarning emas, balki boshqalarning talab-ehtiyojini qondirish uchun yaratiladi. Shu sababli u ayirboshlanadi.

Tovar qiymati – tovar ishlab chiqaruvchilarning tovarda gavdalangan va unda moddiylashgan ijtimoiy-zaruriy mehnati miqdoridan iborat.

Narx – tovar qiymatining pul shakli. Bozor iqtisodiyotida ikki xil narx amal qiladi: 1) erkin bozor narxlari; 2) davlat boshqarib turadigan narxlar. Ammo birinchi turdagi narxlar asosiy bo'ladi. Ikkinchi turdagi narxlar o'z navbatida ikkiga bo'linadi: a) davlat belgilagan qat'iy narxlar; b) davlat yuqori chegarasini belgilagan va undan oshib ketmaydigan narxlar – limit narxlari.

Bozor – sotuvchi bilan xaridor o'rtasida tovarni pulga ayirboshlash munosabati. Tovarlar bilan oldi-sotdi munosabatlari tovar ishlab chiqarish, tovar ayirboshlash va pul muomalasi qonunlariga binoan amalga oshiriladi.

Bozor muvozanati – bozordagi talab va takliflarning miqdor va tarkibiy jihatidan bir-biriga muvofiq kelishi.

Muvozanat narxi – bozor muvozanati sharoitida talab va taklifga tegishli narxlarning ustma-ust tushishi.

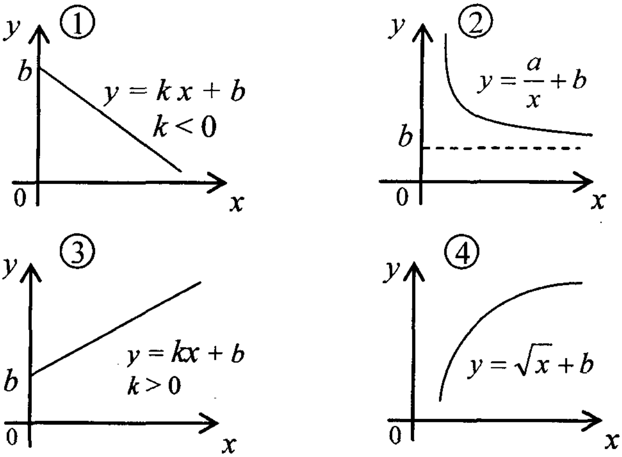
Biz yuqorida ayrim iqtisodiy tushunchalarni keltirdik.

2. Endi bozor muvozanati va muvozanat narxini hisob-kitob qilish

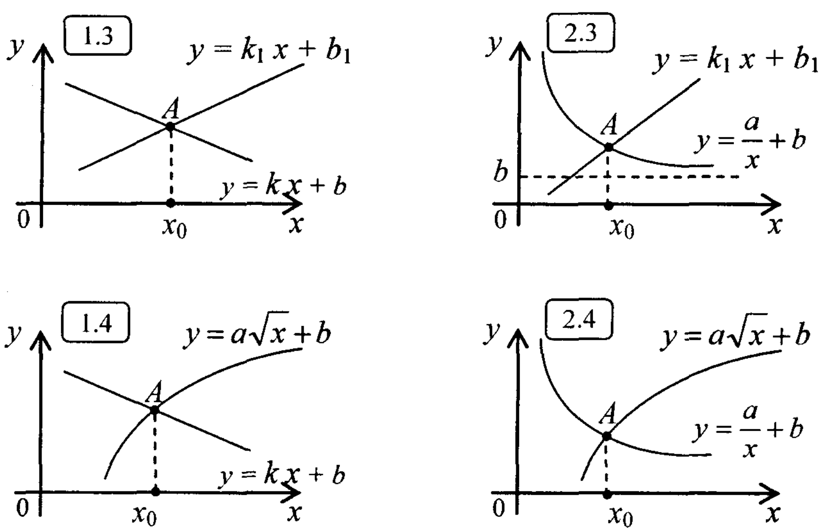
---

[1] N.To'xliyev, A.O'lmasov. Ishbilarmonlar lug'ati. Toshkent Qomuslar bosh muharririyati, 1993.

uchun 2.2-§ da ko‘rilgan chiziqli va chiziqsiz talab funksiyalari, chiziqli va chiziqsiz taklif funksiyalari grafiklarini chizamiz:



Bozor muvozanati nuqtasini, muvozanat narxini topish uchun 1)-3), 1)-4) va 2)-3), 2)-4) hollarni birgalikda ko‘rish lozim. Bu hollarga mos chizmalarni keltiramiz.



Yuqoridagi chizmalarda $A(x_0,y_0)$ – bozor muvozanati nutqasi (egar nuqtasi), x_0 muvozanat narxi deyiladi. Har bir holda $x_0$ni topish uchun talab chizig'i va taklif chizig'i tenglamalari sistemasini yechish kerak bo'ladi.

Misollar ko'ramiz.

1-misol. Avval talab funksiyasini quramiz. Statistik ma'lumotlar quyidagicha bo'lsin.

x	4	9
y	30	20

a) $y = kx + b$ bo'lsa, a va b lar

$$\begin{cases} 30 = 4a + b, \\ 20 = 9a + b \end{cases}$$

sistemadan topiladi: $k = -2$; $b = 38$. Demak,

$$y = -2x + 38. \tag{2.4}$$

b) $y = \dfrac{a_1}{x} + b_1$ bo'lsa, a_1 va b_1 lar ushbu

$$\begin{cases} 30 = \dfrac{a_1}{4} + b_1, \\ 20 = \dfrac{a_1}{9} + b_1 \end{cases}$$

sistemadan topiladi: $a_1=72$ va $b_1=12$. Demak,

$$y = \frac{72}{x} + 12. \tag{2.5}$$

2-misol. Endi taklif funksiyasini quramiz.
Jadval quyidagicha bo'lsin.

x	4	9
y	15	30

a) $y = kx + b$. Sodda hisoblashlar yordamida $k=3$; $b=3$ ni topamiz. Demak,

$$y = 3x + 3. \tag{2.6}$$

b) $y = a\sqrt{x} + b$. Parametrlar quyidagi sistemadan topiladi:

$$\begin{cases} 15 = 2a + b, \\ 30 = 3a + b \end{cases}$$

Bundan $a = 15$ va $b = -15$. Demak,

$$y = 15 \cdot \sqrt{x} - 15. \tag{2.7}$$

3-misol.. a) (1)-(3) sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} y = -2x + 38, \\ y = 3x + 3. \end{cases}$$

Ravshanki, x_0=7 va y_0=24. Shunday qilib, ko'rilayotgan holda muvozanat narxi 7 birlikdan, bozor muvozanati (egar) nuqtasi $A(7,24)$ dan iborat.

b) (2)-(3) ni olaylik:

$$\begin{cases} y = \dfrac{72}{x} + 12, \\ y = 3x + 3. \end{cases}$$

Buni $3x + 3 = 72/x + 12$ yoki $x^2 - 3x - 24 = 0$ ko'rinishda yozamiz. Kvadrat tenglama $x_0 \approx 6{,}6$ yechimga ega. Shu sababli $y_0 = 22{,}8$ bo'ladi. Demak, muvozanat narxi $x_0 \approx 6{,}6$ dan iborat, bozor muvozanati nuqtasi esa $A(6{,}6;22{,}8)$ bo'ladi.

d) Endi (1)-(4)ni ko'ramiz.

$$\begin{cases} y = -2x + 38, \\ y = 15 \cdot \sqrt{x} - 15. \end{cases}$$

Bu sistema $2x + 15\sqrt{x} - 53 = 0$ tenglamaga keladi. $\sqrt{x} = z$ desak, $2x + 15\sqrt{x} - 53 = 0$ ga nisbatan kvadrat tenglamani hosil qilamiz. U $z_0 \approx 2{,}6$ yechimga ega. Bundan $x_0 \approx 6{,}76$ kelib chiqadi. Demak, $x_0 \approx 6{,}76$, $A(6{,}76;24{,}48)$.

e) Nihoyat, (2)-(4) holni olaylik.

$$\begin{cases} y = \dfrac{72}{x} + 12, \\ y = 15 \cdot \sqrt{x} - 15. \end{cases}$$

Bu sistema ushbu $x \cdot 15\sqrt{x} - 9x - 12 = 0$ ko'rinishga keladi. Agar $\sqrt{x} = z$ desak, uni $5 \cdot z^3 - 9 \cdot z^2 - 12 = 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu kubik tenglamani taqribiy usul bilan yechamiz. Avval $f(z) = 5 \cdot z^3 - 9 \cdot z - 12$ deb belgilaymiz. Keyin quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$f(0) = -12, \quad f(1) \cdot = -16; \ f(2) = -8; \ f(3) = -42 > 0.$

Demak, ildiz z_0 uchun $2 < z_0 < 3$ intervalga ega bo'lamiz. Yana hisoblashni davom ettiramiz: $f(5/2) = 11{,}87 > 0$. Demak, $2 < z_0 < 2{,}5$ So'ngra, $f(2{,}25) = -0{,}54$. Demak, $2{,}25 < z_0 < 2{,}5$. Shu sababli, z_0 uchun taxminan 2,3ni olish mumkin. Endi $x_0 = z_0^2 = 2{,}3^2 = 5{,}29$ ni topamiz, y_0 esa, y_0=15·2,3−15=19,5.

Shunday qilib, $x_0 = 5{,}29$, $y_0 = 19{,}5$.

Yuqoridagi mulohazalar nuqtalar 2 ta bo'lgan holda olib borildi. Nuqtalar soni 3 ta va undan ko'p bo'lsa, talab va taklif funksiyalari qanday ko'riladi? – degan savol tug'iladi.

Ravshanki, 3 ta nuqtadan parabola o'tkazish mumkin. Agar $y = ax^2 + bx + c$ bo'lsa, $y_i = ax_i^2 + bx_i + c_i$, $i = 1,2,3$ sistemadan a,b,clarni topib olamiz. Nuqtalar soni ortgan sari koeffitsientlarni – parametrlarni topish ishi qiyinlashib boradi. Bu ham yetmagandek x ning navbatdagi qiymatida $f(x_{n+1})$ ni hisoblashga to'g'ri keladi. Agar nuqtalar soni n ta bo'lsa, talab yoki taklif funksiyasi $(n-1)$ – tartibli ko'phad bo'ladi. $f(x_{n+1})$ ni hisoblash uchun $x_{n+1}^{n-1}, x_{n+1}^{n-2}, \ldots, x_{n+1}^2$ qiymatlarni hisoblash kerak bo'ladi. Bunday holda bashorat qilish masalasiga qanday yondashish kerakligi 8-bobda bayon etilgan.

2-bobga oid masalalar

1. Quyidagi statistik ma'lumotlar bo'yicha talab jarayonining chiziqli va chiziqsiz modellari qurilsin hamda narxning berilgan qiymatida bashorat qilinsin. Natijalarni taqqoslang.

1.

x	4	9	16
y	45	30	?

2.

x	4	9	16
y	44	29	?

3.

x	4	9	16
y	46	31	?

4.

x	4	9	16
y	47	32	?

5.

x	4	9	16
y	48	33	?

6.

x	4	9	16
y	36	21	?

7.

x	4	9	16
y	34	19	?

8.

x	4	9	16
y	35	20	?

9.

x	4	9	16
y	33	18	?

10.

x	4	9	16
y	32	17	?

2. Quyidagi statistik ma'lumotlar bo'yicha taklif jarayonining chiziqli va chiziqsiz modellari qurilsin hamda narxning berilgan qiymatida bashorat qilinsin. Natijalarni taqqoslang.

1.

x	4	9	16
y	20	40	?

2.

x	4	9	16
y	19	39	?

3.

x	4	9	16
y	18	38	?

4.

x	4	9	16
y	17	37	?

5.

x	4	9	16
y	16	36	?

6.

x	4	9	16
y	10	30	?

7.

x	4	9	16
y	9	29	?

8.

x	4	9	16
y	8	28	?

9.

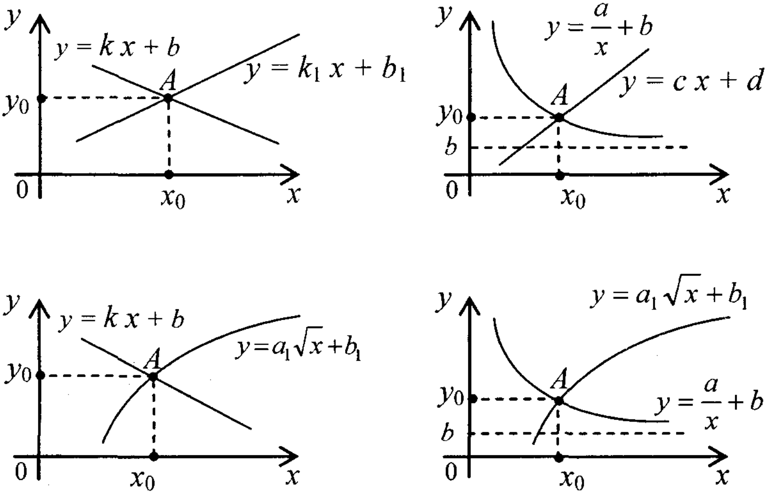
x	4	9	16
y	21	36	?

10.

x	4	9	16
y	20	35	?

3. 1- va 2-bo'limlarda qurilgan chiziqli, chiziqsiz talab va chiziqli, chiziqsiz taklif funksiyalaridan foydalanib, quyidagi 4 ta holda muvozanat narxi va bozor muvozanati (egar) nuqtasi topilsin.

$A(x_0, y_0)$ nuqta egar nuqta, x_0 – muvozanat narxi.



2-bobga oid nazorat savollari

1. Tovar, tovar qiymati, narx tushunchalari ta'rifini aytib bering.

2. Bozor, bozor muvozanati, muvozanat narxi tushunchalarining ta'rifini keltiring.

3. Talab, taklif ta'riflarini so'zlang.

4. Chiziqli talab, chiziqli taklif funksiyalari qanday quriladi?

5. Chiziqsiz talab, chiziqsiz taklif funksiyalari qanday quriladi?

6. Muvozanat narxi va bozor muvozanati nuqtasi qanday topiladi?

7. Chiziqli va chiziqsiz talab hamda taklif funksiyalariga misol keltiring.

3-BOB. NAFLIK FUNKSIYASI VA ISTE'MOLCHI TANLOVI MODELI

Mazkur bobda mikroiqtisodiyotga oid ba'zi tushunchalar va masalalar bayon etiladi. Masalan, iste'mol va iste'molchi tushunchalari mikroiqtisodiyotga oid.

Iste'mol deyilganda iste'mol buyumlari tushuniladi. Yashash joylari, oziq-ovqatlar, kiyim-kechak, gilam, avtomobil va h.k. iste'mol buyumlariga kiradi. Turli tovarlardan va xizmatlardan foydalanish ham iste'molga kiradi. *Iste'molchi* esa iste'mol buyumlaridan foydalanadigan ayrim shaxs yoki ijtimoiy shaxs, oila, firma va boshqalardan iborat. Iste'molchi uchun bozorga borib zarur tovarlarni kerakli miqdorda xarid qilish, tovarlarni tanlashda did-farosat bilan ish yuritishi muhim ahamiyat kasb etadi. Bunda iste'molchi o'zi uchun eng qulay bo'lgan, eng foydali bo'lgan qaror qabul qilishi lozim. Maqsadga erishish uchun iste'molchi *naflik* funksiyasi deb ataluvchi funksiyani qurishi va uning maksimumini topishi kerak bo'ladi. Agar iste'molchi ma'lum vaqt oralig'ida sarf-xarajat qilishi lozim bo'lsa, u oraliqni chekli sondagi bo'laklarga bo'ladi. Har bir bo'lak uchun naflik funksiyasini quradi. So'ngra ulardan *umumlashgan naflik* funksiyasini hosil qiladi. Naflik yoki umumlashgan naflik funksiyasining maksimumini topish masalasi iste'molchi tanlovi modeli deb ataladi.

Mazkur bobda iste'molchi tanlovi modeli budjet chegarasi chiziqli va chiziqsiz bo'lgan hollarda o'rganiladi. Bunda chiqarish usuli, burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli va boshqa usullar bayon etiladi hamda masalalar yechishga tatbiq etiladi.

3.1-§. Iste'molchi tanlovi, naflik funksiyasi va uning xossalari

Aytaylik, iste'molchi oddiy shaxs bo'lib, uning budjeti M so'm bo'lsin. U bozorga borib o'z budjetidan biror qismini (I ni) xarajat qilmoqchi. Iste'molchi bozorda n turli tovarlarni ehtiyojiga yarasha, did-farosat bilan xarid qilishni rejalashtirgan. Agar birinchi tur tovar bir birligining narxi p_1 so'm, ikkinchisiniki p_2 so'm, va h.k. n-siniki p_n so'm bo'lsa, shu bilan birga xarid qilinadigan tovarlar hajmi mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bo'lsa, unda iste'molchi hammasi bo'lib $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ so'm xarajat qiladi. Shu xarajat miqdori xarid uchun ajratilgan I so'mdan ortiq bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \leq I \tag{3.1}$$

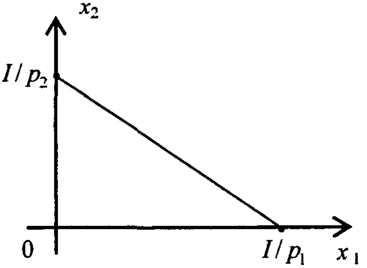
tengsizlik bajarilishi lozim. Shu (3.1) tengsizlikda doim tenglikka erishish mumkin. Uning uchun biror tovardan biroz ortiqroq xarid qilish kifoya. Demak, doim ushbu

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = I \tag{3.2}$$

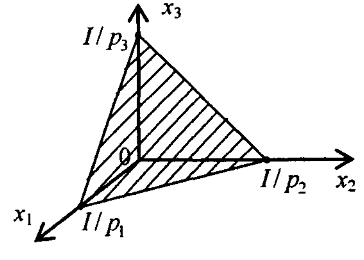
tenglik o'rinli bo'lishini ta'minlash mumkin. (3.2) tenglik n o'lchovli fazoda tekislikni anglatadi. Uning kesmalar bo'yicha tenglamasini yozish mumkin:

$$\frac{x_1}{I/p_1} + \frac{x_2}{I/p_2} + \ldots + \frac{x_n}{I/p_n} = 1, \tag{3.3}$$

bunda $I/p_1, I/p_2, \ldots I/p_n$ sonlar tekislikning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari uzunligini anglatadi. Agar n=2 bo'lsa, $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ tenglikka egamiz. U to'g'ri chiziqdan iborat. Ravshanki, iqtisodiy ma'nosiga ko'ra $I/p_1 > 0$, $I/p_2 > 0$ (3.1-chizma). Yuqorida keltirilgan (3.1) tengsizlikni ***chiziqli budjet chegarasi*** deyiladi. n=3 bo'lganda ham (3.3) tekislikni chizish mumkin (3.2-chizma).



3.1-chizma



3.2-chizma

Bozorda xarid qilinadigan tovarlar uchun $p_1, p_2, \ldots, p_n$ lar berilgan va o'zgarmas deylik. Xarid qilinadigan tovarlar miqdorlaridan tuzilgan sonlar majmuasi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *iste'molchi tanlovi* deyiladi. Uni *iste'molchi rejasi* deb ham atashadi. Endi iste'molchi tanlovi modelini ko'raylik. Soddalik uchun n=2 bo'lgan holni ko'ramiz. Unda iste'molchi tanlovi (rejasi) (x_1,x_2) juftlikdan iborat bo'ladi. Gap iste'molchini qanday tanlov qanoatlantiradi, ya'ni iste'molchi o'z rejasini qanday tuzishi kerak? – degan savol haqida boradi. Agar (a_1,b_1) tanlov (a_2,b_2) tanlovga nisbatan ma'qulroq bo'lsa, $(a_1,b_1)\succ(a_2,b_2)$ kabi yozish qabul qilingan. Albatta, $p_1x_1+p_2x_2=I$ tenglikni qanoatlantiradigan tanlovlar cheksiz ko'p. Ular ichidan "eng ma'qulini" tanlab olish kerak. Bu masalani hal qilish uchun *naflik funksiyasi* degan tushuncha kiritamiz va uni $u(x_1,x_2)$ deb belgilaymiz. Agar $(a_1,b_1)\succ(a_2,b_2)$ bo'lsa, $u(a_1,b_1)>u(a_2,b_2)$ tengsizlik o'rinli deb qaraladi. Bu aslida naflik funksiyasiga qo'yilgan birinchi talab (shart). Qolaversa, $u(x_1,x_2)$ funksiya yana quyidagi xossalarga ega bo'lsin, deylik. Iqtisodiy ma'nosiga ko'ra $u(x_1,x_2)$ funksiya R^2_+ da (ya'ni tekislikdagi koordinata sistemasining birinchi choragida) aniqlangan. Shu bilan birga quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\left.\begin{array}{l}
1^0.\quad \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}>0,\quad \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}>0,\ \forall(x_1,x\ )\in\mathrm{R}^2_+\\[2ex]
2^0.\quad \dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}<0,\quad \dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}<0,\quad \dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\geq 0\\
\qquad\qquad\text{(limit foydalilikning kamayish qonuni)}
\end{array}\right\}\quad (*)$$

3^0. Agar birinchi mahsulot miqdori orsa, ikkinchi mahsulotning limit foydaliligi ortadi. U defitsit mahsulotga aylanadi. Bu shart doim bajarilavermaydi, ammo u *befarqlik chizig'*ining qavariqligini ta'minlaydi.

Endi *befarqlik chizig'i* nima degan savolga javob beramiz.

Agar naflik funksiyasining qiymati x_1 va $x_2$lar o'zgarishi bilan o'zgarmay qolaversa, unda $u(x_1,x_2)=C$, $C=const>0$ deb yozish mumkin. Shu munosabat grafiklari I chorakda joylashgan bir parametrli *silliq chiziqlar* (1^0 va 2^0larga qarang) oilasini tavsiflaydi va *befarqlik chiziqlari* deb ataladi. Bu chiziqlar 1^0 va 2^0 shartlar bajarilganda muhim xossalarga ega bo'ladi.

1-xossa. Befarqlik chizig'i bo'ylab $x_2=x_2(x_1)$ funksiya monoton kamayadi, ya'ni $\dfrac{dx_2}{dx_1}<0$ tengsizlik bajariladi.

Isbot. Avvalo $u(x_1,x_2) = C$ tenglama 1^0 shartga ko'ra x_2 ga nisbatan o'zaro bir qiymatli yechiladi, ya'ni $x_2=x_2(x_1)$. Endi befarqlik chizig'i tenglamasining har ikki tomonini differensialaymiz:

$$\frac{\partial u}{dx_1}dx_1 + \frac{\partial u}{dx_2}dx_2 = 0.$$

Bundan

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_1}. \qquad (3.4)$$

1^0 shartga ko'ra $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$ bo'lgani uchun $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$ tengsizlik kelib chiqadi.

Aytib o'taylik, (3.4) tenglama befarqlik chiziqlarining *differensial tenglamasidan* iborat. Agar $u(x_1,x_2)$ funksiya ma'lum bo'lsa, uni integrallash mumkin.

2-xossa. Befarqlik chiziqlari qavariq, ya'ni $\frac{d^2x_2}{d\,x_1^2} > 0$ tengsizlik o'rinli.

Isbot. (3.4) dan foydalanib, $u\ (x_1,x_2(x_1))$ ekanini e'tiborga olib, $\frac{d^2x_2}{d\,x_1^2}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{d^2x_2}{d\,x_1^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}\cdot\left[\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right].$$

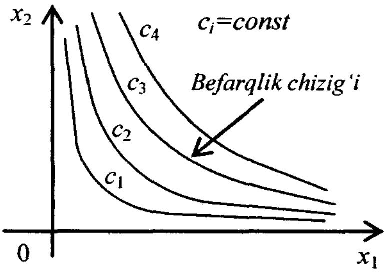
Ma'lumki, agar $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ aralash hosilalar mavjud bo'lsa, ular o'zaro teng va 2^0 shartga ko'ra nomanfiy bo'ladi. Shuning uchun

1^0 va 2^0 shartlarga ko'ra yuqoridagi ifodada kvadrat qavs ichidagi funksiya manfiy. Bundan $\frac{d^2 x_2}{d x_1^2} > 0$ ekani kelib chiqadi. 2-*xossa isbot etildi.*

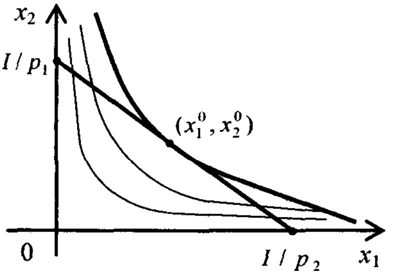
Shunday qilib, befarqlik chiziqlari bo'ylab

$$\frac{dx_2}{dx_1} < 0, \quad \frac{d^2 x_2}{d x_1^2} > 0$$

tengsizliklar o'rinli, ya'ni $x_2 = x_2(x_1)$ funksiya kamayuvchi va qavariq (3.3-chizma).



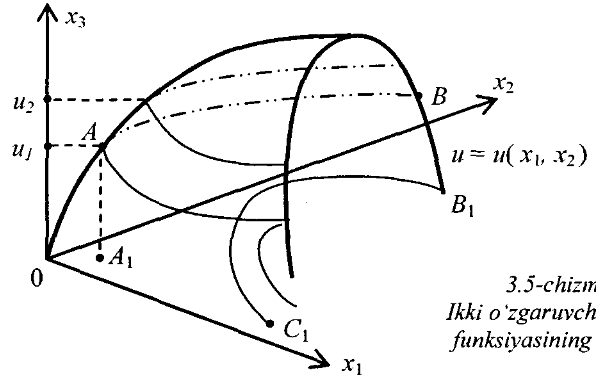
3.3-chizma



3.4-chizma

Agar $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ularga mos befarqlik chiziqlarini $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ deb belgilaymiz. Har bir B_{i+1} chiziqning grafigi B_i chiziqning grafigidan yuqoriroq joylashgan bo'ladi. Agar befarqlik chizig'ining biridan ikkinchisiga shimoliy-sharq yo'nalishi bo'yicha o'ta boshlasak, naflik funksiyasining qiymati ortib boradi. Agar budjet chegarasi chegaralanmagan bo'lsa, bu qiymat istalgancha kattalashib boradi. Ammo, ravshanki, har bir shaxs (yoki ijtimoiy shaxs) uchun budjet chegarasi chegaralangan bo'ladi va $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$ tenglik o'rinli bo'lishi lozim. Demak, naflik funksiyasi qiymatining ortib borishi budjet chegarasiga bog'liq. Bu masala iste'molchining optimal tanlovi (iste'molchining bozordagi ratsional harakati) haqidagi masalani yechishdan iborat.

Quyida naflik funksiyasining xossalaridan foydalanib, ikki o'zgaruvchili naflik funksiyasi grafigini keltiramiz (3.5-chizma).



3.5-chizma.
Ikki o'zgaruvchili naflik funksiyasining grafigi.

3.2-§. Chiziqli budjet chegarali optimal tanlov modeli

Chiziqli budjet chegarali optimal tanlov modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I. \end{cases} \tag{3.5}$$

3.1-ta'rif. *Agar* $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ *nuqta uchun* $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ *sonli tenglik o'rinli bo'lib,* $u(x_1^0, x_2^0) = \max\limits_{(x_1, x_2) \in R_+^2} u(x_1, x_2)$ *munosabat bajarilsa,* $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ *tanlov (reja) iste'molchi uchun* *<u>optimal</u>* *deyiladi yoki* $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ *tanlov bozorning* *<u>mahalliy muvozanati</u>* *deyiladi.*

Mazkur (3.5) masala chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasidan ([2;3]) iborat. Uni sodda hollarda chiqarish usuli bilan, umumiy holda Lagranjning ko'paytuvchilari usuli bilan yechiladi. Bu usullar analitik usullardir. Albatta, (3.5) masalani yechishning sonli (taqribiy) usullari ham mavjud.

(3.5)masalani $u(x_1, x_2) = a_0 x_2^{\alpha} x_1^{1-\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ bo'lgan holda chiqarish usuli bilan yechishni ko'rsatamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = a_0 x_2^{\alpha} x_1^{1-\alpha} \to \max, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I \end{cases}$$

masalaga egamiz. Undan $x_2 = 1/p_2 \cdot (I - p_1 x_1)$ ni topib, $u(x_1, x_2)$ ifodasiga qo'yamiz: $u_*(x_1) = a_0 \frac{1}{p_2^\alpha}(I - p_1 x_1)^\alpha \cdot x_1^{1-\alpha}$.

Ravshanki, $x_2>0$. Shuning uchun $0 < x_1 < I/p_1$. Masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$u_*(x_1) = \frac{a_0}{p_2^\alpha} \cdot (I - p_1 x_1)^\alpha \cdot x_1^{1-\alpha} \to \max, \quad 0 < x_1 < \frac{I}{p_1}. \qquad (3.6)$$

Biz intervalda aniqlangan funksiyaning eng katta qiymatini topish masalasini hosil qildik. $u_*(x_1)$ funksiya intervalda aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz differensiallanuvchi. (3.6) masalaning yechimi mavjud, chunki

$$\lim_{x_1 \to +0} u_*(x_1) = \lim_{x_1 \to I/p_1 - 0} u_*(x_1) = 0, \quad u_*(x_1) > 0, \quad \forall x_1 \in (0;\ I/p_1).$$

Endi $u_*(x_1)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini $u'_*(x_1) = 0$ tenglamadan topamiz. Avval $u'_*(x_1)$ ni hisoblaymiz:

$$u'_*(x_1) = \frac{a_0}{p_2^\alpha} \cdot \left[\alpha(I - p_1 x_1)^{\alpha-1} \cdot (-p_1) x_1^{1-\alpha} + (I - p_1 x_1)^\alpha (1-\alpha) x_1^{-\alpha}\right] =$$

$$= \frac{a_0}{p_2^\alpha} \cdot (I - p_1 x_1)^{\alpha-1} \cdot x_1^{-\alpha} \cdot \left[-\alpha \cdot p_1 x_1 + (1-\alpha)(I - p_1 x_1)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{p_2^\alpha} \cdot (I - p_1 x_1)^{\alpha-1} \cdot x_1^{-\alpha} \cdot \left[(1-\alpha) \cdot I - p_1 x_1\right].$$

Hosila nolga teng bo'lishi uchun $(1-\alpha) \cdot I - p_1 x_1 = 0$ tenglik bajarilishi yetarli. Bundan $x_1 = (1-\alpha) \cdot I/p_1$ kelib chiqadi. Statsionar nuqta $u_*(x_1)$ funksiya uchun yagona ekan. Yechim mavjudligi ma'lum bo'lgani uchun shu yagona statsionar nuqta (3.6) masalaning yechimi bo'ladi. $x_2^0 = \alpha \cdot I/p_1$ bo'lgani uchun $\left(\frac{(1-\alpha) \cdot I}{p_1};\ \frac{\alpha \cdot I}{p_1}\right)$ dastlabki masala yechimidir.

Quyida (3.5) masalani yechishning *burchak koeffitsientlarni tenglashtirish* usulini bayon etamiz. Bu usulni G'.Nasritdinov $n=2$ bo'lgan hol uchun tavsiya etgan[1]. Uning $n=3$ bo'lganda ham umumlashma mavjud.

Burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usulining $n=2$ da mohiyatini qisqacha bayon etamiz. Koordinata sistemasining birinchi choragida $u(x_1,x_2)=C$ befarqlik chiziqlarini chizamiz. Ularning qavariqligi ma'lum. So'ngra $p_1x_1+p_2x_2=I$ – chiziqli budjet chizig'ining birinchi chorakdagi bo'lagini (kesmasini) chizamiz. Uning uchlari $(I/p_1;\ 0)$, $(0;\ I/p_2)$ nuqtalarda joylashgan. Befarqlik chiziqlari ba'zi $c_1,c_2,c_3,\ldots$ lar uchun budjet chizig'ini kesib o'tadi. Ammo bitta befarqlik chizig'i budjet chizig'iga urinadi. Shu urinish nuqtasi koordinatalari (3.5) masalaning yechimi bo'ladi. Urinish nuqtasida budjet chizig'i burchak koeffitsienti k_2 tegishli befarqlik chizig'iga o'tkazilgan urinma burchak koeffitsienti $k_1$ga teng. Shunday qilib, (3.5) masalaning yechimini topish uchun

$$\begin{cases} k_1=k_2, \\ p_1x_1+p_2x_2=I \end{cases} \quad \text{yoki} \quad -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}=-\frac{p_1}{p_2}, \qquad p_1x_1+p_2x_2=I$$

tenglamalar sistemasini yechish kifoya.

Misol sifatida avval ko'rilgan masalani olamiz:

$$\begin{cases} u(x_1,x_2)=a_0x_2^{\alpha}x_1^{1-\alpha}\to\max, \quad a_0>0,\ 0<\alpha<1, \\ p_1x_1+p_2x_2=I. \end{cases}$$

Bundan ko'rinadiki, $k_1=-p_1/p_2$; $k_2$ni topish uchun $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ va $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ hosilalarni hisoblaymiz:

---

[1] Г.Насритдинов. Метод приравнивания угловых коэффициентов для решения оптимизационных задач. Вестник Тамбовского университета. Том 12, вып.4, 2007. г.Тамбов.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_0(1-\alpha)\cdot x_1^{-\alpha}\cdot x_2^{\alpha}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_0\cdot\alpha\cdot x_1^{1-\alpha}\cdot x_2^{\alpha-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{a_0(1-\alpha)\cdot x_1^{-\alpha}\cdot x_2^{\alpha}}{a_0\cdot\alpha\cdot x_1^{1-\alpha}\cdot x_2^{\alpha-1}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1}.$$

Shunday qilib, masalani yechish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechish kerak:

$$\begin{cases} -\dfrac{p_1}{p_2} = -\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{x_2}{x_1}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I. \end{cases}$$

Bundan $p_1x_1 = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\cdot p_2x_2$, $\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\cdot p_2x_2 + p_2x_2 = I$, $x_2^0 = \dfrac{\alpha\cdot I}{p_2}$

$$x_1^0 = \frac{1}{p_1}(I - p_2x_2) = \frac{1}{p_1}(I - p_2\frac{\alpha\cdot I}{p_2}) = \frac{(1-\alpha)\cdot I}{p_1}, \quad x_1^0 = \frac{(1-\alpha)\cdot I}{p_1}.$$

Shunday qilib, $x^0 = (x_1^0; x_2^0) = \left(\dfrac{(1-\alpha)I}{p_1}; \dfrac{\alpha I}{p_1}\right)$ masalaning yechimidir.

3.3-§. Chiziqsiz budjet chegarali optimal tanlov modeli

Endi chiziqsiz budjet chegarali optimal tanlov masalasini ko'ramiz. Bu quyidagicha tavsiflanadi:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max, \\ v(x_1, x_2) = I. \end{cases} \tag{3.7}$$

Bunda $u(x_1, x_2)$ — naflik funksiyasi avval keltirilgan (1-§) 1^0 va 2^0 shartlarni qanoatlantiradi. $v(x_1, x_2)$ — chiziqsiz funksiya uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} > 0,\ \frac{\partial v}{\partial x_2} > 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \geq 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \geq 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \leq 0 \tag{3.8$_1$}$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 \neq 0 . \qquad (3.8_2)$$

Ravshanki, (3.7) masala ham chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasi, uni ham sodda hollarda chiqarish usuli bilan yechish mumkin.

Misol ko'ramiz.

$$u(x_1,x_2)=x_1^{1-\alpha}\cdot x_2^{\alpha}\to \max\,,\ \ p_1x_1+p_2x_2^2=I\,,\quad 0<\alpha<1\ .$$

Bunda $u(x_1,x_2)$ funksiya uchun 1^0 va 2^0 shartlar bajariladi. Haqiqatan,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=(1-\alpha)\cdot x_1^{-\alpha}\cdot x_2^{\alpha}>0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\alpha\cdot x_1^{1-\alpha}\cdot x_2^{\alpha-1}>0,\quad \forall x_1,x_2>0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=-\alpha(1-\alpha)\cdot x_1^{-\alpha-1}x_2^{\alpha}<0\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2}=\alpha(\alpha-1)\cdot x_1^{1-\alpha}x_2^{\alpha-2}<0,\quad \forall x_1,x_2>0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot x_1^{-\alpha}x_2^{\alpha-1}>0\,,\quad \forall x_1>0,\ \forall x_2>0.$$

Endi $v(x_1,v_2)=p_1x_1+p_2x_2^2$ funksiyani olamiz. U uchun (3.8_1) (3.8_2) shartlar bajariladi. Haqiqatan,

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=p_1>0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_2}=2p_2x_2>0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}=2p_2>0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}=0\,,\quad \forall x_1>0\,,\ \forall x_2>0\,.$$

Hisob-kitoblarni $\alpha=1/2$, $u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}$ uchun olib boramiz. Chiziqsiz budjet tenglamasidan $x_1=(I-p_2x_2^2)/p_1$ va

$$u_*(x_2)=\frac{1}{\sqrt{p_1}}\sqrt{x_2(I-p_2x_2^2)}\to \max,\quad 0<x<\sqrt{I/p_2}\ .$$

Bu masala yechimga ega, chunki

$$\lim_{x_2\to+0} u_*(x_2) = \lim_{x_2\to\sqrt{I/p_2}-0} u_*(x_2) = 0 \quad \text{va} \quad u_*(x_2) > 0, \quad \forall x_2 \in \left(0; \sqrt{I/p_2}\right).$$

Endi $u_*'(x_2)$ ni hisoblaymiz.

$$u_*'(x_2) = \frac{(I - p_2x_2^2) + x_2(-2p_2x_2)}{2\sqrt{p_1}\cdot\sqrt{x_2(I - p_2x_2^2)}} = \frac{I - 3p_2x_2^2}{2\sqrt{p_1}\cdot\sqrt{x_2(I - p_2x_2^2)}}$$

Ravshanki, $u_*'(x_2)=0$ tenglama $I - 3p_2x_2^2=0$ tenglamaga ekvivalent. Shu sababli $x_2^0 = \pm\sqrt{I/(3p_2)}$ kelib chiqadi. Ammo iqtisodiy ma'nosi bo'yicha $x_2 > 0$. Demak, $x_2^0 = \sqrt{I/(3p_2)} \in \left(0; \sqrt{I/p_2}\right)$,

$x_2^0 = \frac{1}{p_1}\left(I - p_2\frac{I}{3p_2}\right) = \frac{2I}{3p_1}$. Shunday qilib, masalaning yechimi

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{2I}{3p_1};\ \sqrt{\frac{I}{3p_2}}\right).$$

Shu yechimni burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli bilan ham topish mumkin:

$$k_1 = -\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}\bigg/\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = -\frac{x_2}{x_1}; \qquad k_2 = -\frac{p_1}{2p_2x_2}.$$

Yechim ushbu $-\frac{x_2}{x_1} = -\frac{p_1}{2p_2x_2}$, $p_1x_1 + 2p_2x_2^2 = I$ sistemadan topiladi. Undan $2p_2x_2^2 = p_1x_1$, $p_1x_1 + 2p_2x_2^2 = I$ ga ko'ra $2p_2x_2^2 + p_2x_2^2 = I$ va $3p_2x_2^2 = I$. Yechim uzil-kesil

$$x_1^0 = \frac{2I}{3p_1}, \quad x_2^0 = \sqrt{\frac{I}{3p_2}}$$

ko'rinishda yoziladi. Tavsiya etilgan usul ratsional ekani ravshan.

Endi (3.7) masalani umumiy ko'rinishda tekshiramiz. Undagi

$v(x_1, x_2) = I$ chiziqning grafigi koordinata tekisligining birinchi choragida joylashgan, botiq. Bu (3.8) shartlardan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, avvalo tenglama (3.8)ga ko'ra $x_2$ga nisbatan bir qiymatli yechiladi. Ravshanki,

$$\frac{\partial v}{dx_1}dx_1 + \frac{\partial v}{dx_2}dx_2 = 0. \quad \text{Bundan} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial v}{dx_1}\Big/\frac{\partial v}{dx_2}.$$

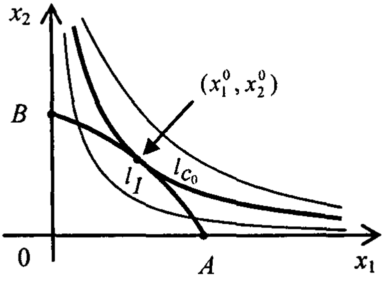
Bu chiziqsiz budjet chizig'ining $(x_1, x\ ) \in R_+^2$ nuqtadagi urinmasi burchak koeffitsientidan iborat. Uni k_2 deb belgilaymiz, $k_1$ni esa bilamiz. (3.8) munosabatlarga ko'ra $l_I = \{(x_1, x_2):\ v(x_1, x_2) = I\}$ chiziq botiq. Haqiqatan,

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\Big/\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2}\left[\frac{d}{d\,x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\frac{d}{d\,x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right] < 0.$$

Shunday qilib, l_I chiziq botiq, $u(x_1, x_2) = C$ befarqlik chiziqlari l_C qavariq. Ravshanki, befarqlik chiziqlaridan bittasi l_I chiziqqa urinadi (3.6-chizma). Har ikki l_I va l_C chiziqlar



3.6-chizma

umumiy urinmaga ega. Shu sababli masalaning yechimi ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial v}{\partial x_2}, \qquad v(x_1, x_2)=I \tag{3.9}$$

tenglamalar sistemasining yechimidan iborat.

3.6-chizmada A va B nuqtalarning koordinatalari aniq hisoblanishi mumkin. A nuqta uchun $x_2=0$ va $v(x_1, 0)=I$ tenglamadan x_1^* topiladi, ya'ni $A(x_1^*\ 0)$. Shunga o'xshash B nuqtaning koordinatlari ham topiladi: $B(0, x_2^*)$ bunda x_2^* son $v(0, x_2)=I$ tenglamaning yechimi.

Misol sifatida ushbu

$$u(x_1, x_2)=x_1^{1-\alpha}\cdot x_2^{\alpha}\to \max, \ p_1x_1+p_2x_2^2=I.$$

masalani ko'ramiz. Yuqorida shu masalani biz $\alpha=1/2$ bo'lganda ham chiqarish, ham burchak koeffitsienlarini tenglashtirish usuli bilan yechgan edik. Endi ixtiyoriy α, $0<\alpha<1$ uchun masalani yechamiz. Sodda hisob-kitoblarni bajaramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=(1-\alpha)\cdot x_1^{-\alpha}\cdot x_2^{\alpha}>0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\alpha\cdot x_1^{1-\alpha}\cdot x_2^{\alpha-1}>0,$$

$$k_1=-\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x_1^{-\alpha}x_2^{\alpha}}{x_1^{1-\alpha}x_2^{\alpha-1}}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1}.$$

Demak, $k_1=-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{x_2}{x_1}$.

Ravshanki, ko'rilayotgan holda $v(x_1, x_2)=p_1x_1+p_2x_2^2$. Shuning uchun

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=p_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}=p_2x_2, \quad k_2=-\frac{p_1}{2p_2x_2}.$$

Masalaning yechimi quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1}=-\frac{p_1}{2p_2x_2}, \qquad p_1x_1+p_2x_2^2=I.$$

Bundan $p_1x_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} + 2p_2x_2^2$ va $\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2p_2x_2^2 + p_2x_2^2 = I$,

$$p_2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}2+1\right)x_2^2 = I, \qquad \frac{2-\alpha}{\alpha}p_2x_2^2 = I, \qquad x_2^0 = \sqrt{\frac{\alpha \cdot I}{(2-\alpha)\cdot p_2}}.$$

Endi $x_1$ni ham topish mumkin:

$$x_1^0 = \frac{1}{p_1}I - p_2\frac{\alpha \cdot I}{(2-\alpha)\cdot p_2} = \frac{2(1-\alpha)\cdot I}{p_1\cdot(2-\alpha)}$$

Shunday qilib, masalaning yechimi uzil-kesil ushbu

$$x^0 = \left(\frac{2(1-\alpha)\cdot I}{p_1\cdot(2-\alpha)},\ \sqrt{\frac{\alpha \cdot I}{(2-\alpha)\cdot p_2}}\right)$$

ko'rinishda yoziladi.

Yuqoridagi misollardan burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usulining qulayligi ko'rinib turibdi. Ammo bu usulni ixtiyoriy masala uchun qo'llanib bo'lmaydi. Mazkur masalada ishtirok etayotgan funksiyalar ma'lum differensial xossalarga ($u(x_1, x_2)$ va $v(x_1, x_2)$ funksiyalardan talab etilayotgan shartlarga e'tibor qiling) ega bo'lishi lozim.

3.4-§. Uch o'zgaruvchili naflik funksiyasi uchun chiziqli budjet chegarali optimal tanlov modeli

Iste'molchi 3 turli tovar xarid qilmoqchi deylik. U o'z budjeti M dan I birlikni xarid uchun ajratgan bo'lsin. Agar xarid qilinadigan tovarlar hajmi mos ravishda x_1, x_2, x_3 bo'lib, ularning bir birligi narxlari mos ravishda p_1, p_2, p_3 bo'lsa, iste'molchining hamma xarajatlari $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$ so'm bo'ladi. Ammo bu xaridga ajratilgan I birlikdan (so'mdan) ortiq bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \le I \tag{3.10}$$

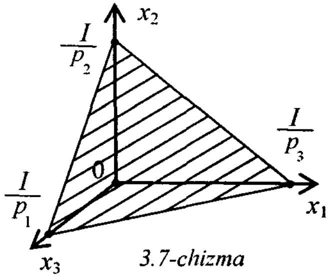
tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Shu (3.10) tengsizlikda doim biror tovarni ortiqroq xarid qilish hisobiga tenglikka erishish mumkin. Demak, ushbu

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \qquad (3.11)$$

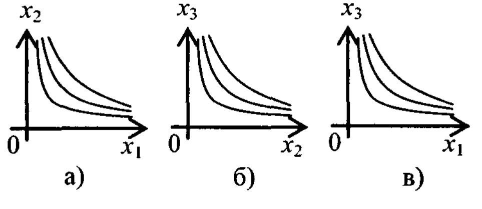
tenglikning bajarilishini ta'minlash mumkin. Ushbu (3.11) tenglik uch o'lchovli fazoda tekislikni anglatadi. Uning kesmalar bo'yicha tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x_1}{I/p_1} + \frac{x_2}{I/p_2} + \frac{x_3}{I/p_3} = 1, \qquad (3.12)$$

bunda miqdorlar tekislikning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari uzunligini anglatadi (3.7-chizma).



3.7-chizma



3.8-chizma

Ko'rilayotgan holda naflik funksiyasi uch argumentli bo'ladi: $u = u(x_1, x_2, x_3)$. Bu funksiya ham ikki argumentli naflik funksiyasiga o'xshash xossalarga ega bo'lsin, deylik. U uch o'lchovli fazo R^3 ning musbat ortantida (ya'ni R_+^3)da aniqlangan va quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0, \ i = 1,2,3; \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in R_+^3, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} \geq 0, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \geq 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}\right)^2 \neq 0. \end{array}\right\} \qquad (3.13)$$

Ko'rinadiki, $u = u(x_1, x_2, x_3)$ funksiya har bir argumenti bo'yicha o'suvchi va qavariq.

Chiziqli budjet chegarali optimal tanlov masalasi (modeli) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, x_3) \to \max, \\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I. \end{cases} \tag{3.14}$$

Umumiy holda (3.14) masala shartlari tengliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasidan iborat. Uni yechish uchun Lagranj ko'paytiruvchilari usulidan yoki biror taqribiy yechish usullaridan foydalanish kerak. Ammo naflik funksiyasining (3.13) munosabatlar yordamida yozilgan xossalari (3.14) masalani nisbatan osonroq usul bilan yechish imkoniyatini beradi. Quyida qo'llaniladigan usul avval bayon etilgan burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usulining umumlashtirilishidan iborat.

Naflik funksiyasining sath sirtlari ushbu

$$u(x_1, x_2, x_3) = C, \quad C > 0, \tag{3.15}$$

tenglama bilan beriladi. Bu sirtlar R_+^3 – musbat ortantda joylashgan shunday sirtlardan iboratki, u "parabolik antenna"ga o'xshaydi. O'qi koordinata boshidan chiqadi. Har bir koordinata tekisligiga proeksiyasi ikki argumentlik naflik funksiyasi uchun befarqlik chiziqlaridan iborat. Bu tasdiq (3.13) shartlardan kelib chiqadi. Ravshanki, (3.8-chizmaga qarang),

$x_1 0 x_2$ tekislikda $x_3 = 0$ va $u(x_1, x_2, 0) = C$;

$x_2 0 x_3$ tekislikda $x_1 = 0$ va $u(0, x_2, x_3) = C$;

$x_3 0 x_1$ tekislikda $x_2 = 0$ va $u(x_1, 0, x_3) = C$.

Shu bilan birga quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u}{dx_1} \bigg/ \frac{\partial u}{dx_2} < 0,$$

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} > 0, \quad \frac{dx_3}{dx_1} < 0, \quad \frac{d^2 x_3}{dx_1^2} > 0, \quad \frac{dx_3}{dx_2} < 0, \quad \frac{d^2 x_3}{dx_2^2} > 0. \tag{3.16}$$

Endi (3.15) sath sirtida biror $A(x_1,x_2,x_3)$ nuqtani olamiz, ya'ni $A(x_1,x_2,x_3)\in\{x:u(x)=C\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$. Bu nuqta musbat ortantda joylashgan, hech qaysi koordinata tekisligida joylashmagan. Shu nuqtada sath sirtiga o'tkazilgan normal

$$\text{grad u}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}.$$

Faraz etaylik, $A(x_1,x_2,x_3)$ nuqtada (3.11) tekislik sath sirtiga urinsin (biror $C=C_0$ uchun). U holda shu tekislik normali grad$\varphi=\{p_1,p_2,p_3\}$ urinish nuqtasida sirt normaliga *kollinear* bo'ladi. Shuning uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=p_1t,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=p_2t,\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=p_3t.$$

Bundan $\dfrac{1}{p_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{1}{p_2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=\dfrac{1}{p_3}\dfrac{\partial u}{\partial x_3}$ tengliklar kelib chiqadi.

Urinish nuqtasining koordinatlari quyidagi 3ta tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{p_2}\frac{\partial u}{\partial x_2},\quad \frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{p_3}\frac{\partial u}{\partial x_3},\quad \frac{1}{p_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{1}{p_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}. \tag{3.17}$$

Urinish nuqtasi A koordinatlari $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=I$ tenglamani qanoatlantiradi. (3.17) sistemadan topiladigan yagona nuqta (R_+^3 da yotadigan) naflik funksiyasiga maksimal qiymat beradi. Haqiqatan, $C>C_0$ bo'lsa, tekislik sath sirtini kesib o'tmaydi. Agar $C<C_0$ bo'lsa, tekislik sirtni yopiq chiziq bo'ylab kesadi va naflik funksiyasining qiymati C_0 ga mos qiymatdan kichik bo'ladi.

Misol ko'ramiz. *Ushbu*

$$\begin{cases} u=5\cdot x_1^{1/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{2/5}\to\max,\\ \varphi=2x_1+3x_2+4x_3=24\end{cases}$$

masalani ko'raylik.

Kerakli hosilalarni hisoblab chiqamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=x_1^{-4/5}x_2^{3/5}x_3^{2/5},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=3x_1^{1/5}x_2^{-2/5}x_3^{2/5},\ \frac{\partial u}{\partial x_3}=2x_1^{1/5}x_2^{3/5}x_3^{-3/5}.$$

Endi tenglamalar sistemasini tuzamiz ($p_1=2;\ p_2=3;\ p_3=4$):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1^{-4/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{2/5}=x_1^{1/5}\cdot x_2^{-2/5}\cdot x_3^{2/5}, \\ \frac{1}{2}x_1^{-4/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{2/5}=\frac{1}{2}x_1^{1/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{-3/5}, \\ x_1^{1/5}\cdot x_2^{-2/5}\cdot x_3^{2/5}=\frac{1}{2}x_1^{1/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{-3/5}, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=24. \end{cases}$$

Birinchi 3 ta tenglamadan $x_2=2x_1,\ x_3=x_1,\ x_2=2x_3$ ekani kelib chiqadi. Oxirgi tenglamadan $x_1^0=2,\ x_2^0=4,\ x_3^0=2$ ni topamiz.

Ko'rilayotgan misolda berilgan naflik funksiyasi (3.13) shartlarni qanoatlantiradi. Haqiqatan, yuqoridagi hisoblashlarga ko'ra $\frac{\partial u}{\partial x_1}>0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}>0,\ \frac{\partial u}{\partial x_3}>0$. Endi ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=-\frac{4}{5}x_1^{-9/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{2/5}<0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-\frac{2}{5}x_1^{1/5}\cdot x_2^{-7/5}\cdot x_3^{2/5}<0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=-\frac{3}{5}x_1^{1/5}\cdot x_2^{3/5}\cdot x_3^{-8/5}<0.$$

Aralash hosilalar musbat ekanligi bevosita hisoblashlardan kelib chiqadi.

3-bobga oid masalalar

I. Quyidagi funksiyalar uchun (*) shartlarning (28-betga qarang) bajarilishi tekshirilsin:

1. $u(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1^{1/4} \cdot x_2^{3/4}$; 4. $u(x_1, x_2) = \dfrac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$;

2. $u(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1^{2/5} \cdot x_2^{3/5}$; 5. $u(x_1, x_2) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2$;

3. $u(x_1, x_2) = 6 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$; 6. $u(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

II. Quyidagi chiziqli budjet chegarali optimal tanlov masalasi chiqarish usuli bilan yechilsin ($u = u(x_1, x_2)$):

1. $\begin{cases} u = 4 \cdot x_1^{1/4} \cdot x_2^{3/4} \to \max, \\ 2x_1 + 5x_2 = 30. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} u = \dfrac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} \to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u = 5x_1^{2/5} \cdot x_2^{3/5} \to \max, \\ 8x_1 + 3x_2 = 42. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} u = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 \to \max, \\ x_1 + 3x_2 = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u = 6x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} \to \max, \\ 5x_1 + 6x_2 = 60. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \to \max, \\ 2x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

III. Quyidagi chiziqsiz budjet chegarali optimal tanlov masalasi chiqarish usuli bilan yechilsin ($u = u(x_1, x_2)$):

1. $\begin{cases} u = 4x_1^{1/4} \cdot x_2^{3/4} \to \max, \\ 2x_1^2 + x_2 = 3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} u = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 \to \max, \\ x_1^2 + x_2 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u = 5x_1^{2/5} \cdot x_2^{3/5} \to \max, \\ x_1 + 3x_2^2 = 4. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} u = 3x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \to \max, \\ 3x_1 + 4x_2^2 = 7. \end{cases}$

IV. I va II bo'limdagi masalalar burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli bilan yechilsin.

V. Quyidagi 3 argumentli naflik funksiyasi uchun chiziqli budjet chegarali tanlov masalasi yechilsin.

1. $\begin{cases} u(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \cdot x_3^{1/3} \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \cdot x_3^{1/3} \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \cdot x_3^{1/3} \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \cdot x_3^{1/3} \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

3-bobga oid nazorat savollari

1. Iste'mol, iste'molchi deyilganda nima tushuniladi?
2. Naflik funksiyasi nima?
3. Iste'molchi tanlovi nima?
4. Budjet chegarasi nima?
5. Chiziqli budjet chegarali optimal tanlov modeli nima?
6. Chiziqsiz budjet chegarali optimal tanlov modeli nima?
7. Burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usulining g'oyasini so'zlab bering.
8. Uch argumentli naflik funksiyasi uchun chiziqli budjet chegarali optimal tanlov masalasi qanday yechiladi?

4-BOB. UMUMLASHGAN ISTE'MOL FUNKSIYASI

Mazkur bobda mikroiqtisodiyotga oid yana bitta muhim modelni ko'rib chiqamiz. U iste'mol va umumlashgan iste'mol funksiyalari bilan bog'langan. Avvalgi bobda shaxs, oila yoki ijtimoiy shaxsning naflik funksiyasi hamda iste'molchining berilgan budjet chegarali optimal tanlov modeli to'liq o'rganildi. Bunda xaridga ajratilgan pul bir marta bozorga borganda sarf qilinadi. Agar ma'lum vaqt oralig'ida, masalan, $[0,T]$ oraliqda (deylik bir oy davomida) yashashga ajratilgan pulni ma'lum ma'noda "optimal" xarajat qilish kerak bo'lsa, $[0,T]$ davrni bo'laklarga bo'lib, har bir bo'lakda va umuman, butun $[0,T]$ davrda iste'molchi qanday ish tutishini aniqlash lozim. Aytilgan jarayonning modelini quramiz.

4.1-§. Ba'zi belgilashlar va tushunchalar

Iste'molchining faoliyatini Tta davrda o'rganmoqchimiz, deylik. Har bir davrda u ma'lum hajmda iste'mol qilishi kerak. Shu munosabat bilan ushbu belgilashlarni kiritamiz:

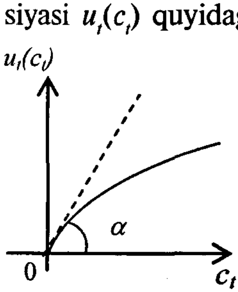
c_t – t davrdagi iste'mol hajmi, $t = 1, 2, \ldots T$;

$\sum_{t=1}^{T} c_t = c_1 + c_2 + \ldots + c_T$ – barcha davrlardagi iste'mol hajmlari yig'indisi;

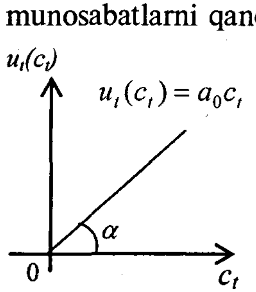
$u_t(c_t)$ – t – davrdagi iste'mol funksiyasi;

$$U(c_1, c_2, \ldots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t) \text{ – umumlashgan iste'mol funksiyasi.}$$

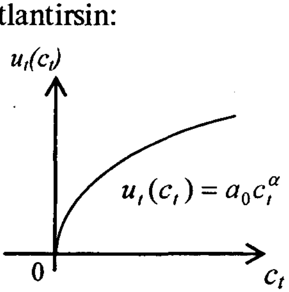
Iste'molchi har bir davrda ma'lum iste'mol funksiyasi bo'yicha faoliyat ko'rsatadi (ya'ni, iste'mol qiladi). Faraz etaylik, iste'mol funksiyasi $u_t(c_t)$ quyidagi munosabatlarni qanoatlantirsin:



4.1-chizma



4.2- chizma



4.3- chizma

$$u_t(0)=0,\ u_t(c_t)>0,\ u_t'(c_t)>0,\ u_t''(c_t)\le 0 \quad \forall c_t>0. \quad (4.1)$$

Shu (4.1) munosabatlardan ko'rinadiki, $u_t(c_t)$ funksiya o'suvchi, botiq va grafigi koordinata boshidan chiqadi (4.1-chizma).

Bunda $tg\alpha = u'_t(+0)$. Agar $u'_t(+0)=+\infty$ bo'lsa, $\alpha=90^0$ va grafik koordinata boshidan ordinata o'qiga urinib chiqadi. Agar $u_t(c_t)=a_0c_t^{\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$ bo'lsa, $u_t(0)=0$, $u_t(c_t)>0$, $u'_t(c_t)=a_0\alpha\, c_t^{\alpha-1}>0$, $u''_t(c_t)=a_0\alpha(\alpha-1)\,c_t^{\alpha-2}<0$ munosabatlar kelib chiqadi. Undan $u'_t(+0)=+\infty$ tenglik o'rinli. Bu holda $\alpha=90^0$ va grafik koordinata boshidan ordinata o'qiga urinib chiqadi (4.3-chizma). Agar $u_t(c_t)=a_0c_t$, $a_0>0$ bo'lsa, $u'_t(c_t)=a_0>0$ va $tg\alpha=a_0$, $\alpha=arctg\, a_0$ bo'ladi (4.2-chizma).

Belgilashlarni davom ettiramiz.

$Y_t = const > 0$ – t – davrdagi daromad miqdori.

$\sum_{t=1}^{T} Y_t$ – barcha davrlardagi daromadlar yig'indisi.

A_0 – meros qilib qoldirilgan yoki shaxsning o'zi to'plagan boylik miqdori.

Qisqalik uchun shaxs budjetini quyidagicha belgilaymiz:

$A = A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t$ – budjet chegarasi, $A>0$.

Iste'mollar hajmi $\sum_{t=1}^{T} c_t$ bilan budjet chegarasi orasida ikki xil munosabat bo'lishi mumkin:

$1^0.\ A=\sum_{t=1}^{T} c_t;$ $\qquad 2^0.\ \sum_{t=1}^{T} c_t < A.$

Keyingi mulohazalarimiz $c_1, c_2, \ldots, c_T$ miqdorlar (o'zgaruvchilar) 1^0 yoki 2^0 munosabatlarni qanoatlantirganda umumlashgan iste'mol funksiyasini maksimum qilishga bag'ishlanadi.

Qo'yiladigan masalalarni yechishda, umumiy holda, Lagranj ko'paytuvchilari usulidan foydalaniladi. Shu sababli unga qisqacha to'xtalamiz.

4.2-§. Lagranj ko'paytuvchilari usuli haqida

Chiziqsiz dasturlashning shartlari tenglamalar bilan berilgan shartli maksimum masalasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_3) = f(x) \to max, \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_3) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_3) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_3) = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

yoki

$$f(x) \to max, \quad g(x) = 0, \quad \text{unda} \quad k < n.$$

Lagranjning normal funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f(x) + \lambda' g(x), \ \lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k). \quad (4.3)$$

Bunda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ lar Langranj ko'paytuvchilari deyiladi. (4.2) masalada ishtirok etgan $f(x)$, $g(x)$ funksiyalar $P_k = \{x: g(x) = 0\}$ to'plamda aniqlangan, uzluksiz va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz etiladi. (4.3) funksiyaning statsionar nuqtalari $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ va $g(x)=0$ tenglamalar sistemasidan topiladi. Aytaylik, (x^0, λ^0) vektorlar juftligi yechim bo'lsin. Unda x^0 nuqta *shartli-statsionar* deyiladi. Endi

$\frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n; \quad \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}, \ i \neq j$ hosilalarni hisoblab, ushbu

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_1^{\ 2}} & \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsani tuzamiz. Agar $y' = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^n$ bo'lsa, ushbu $Q(y) = y'Ay$ kvadratik formani tuzamiz. Bunda shtrix (′) transponirlashni anglatadi. Endi quyidagi

$$\Gamma = \left\{ y : \left(\frac{\partial g(x^0)}{\partial x} \right)' y = 0 \right\}$$

to'plamni tuzamiz. Nihoyat $Q(y)|_\Gamma$ ning ishorasini tekshiramiz. Agar $y \neq 0$ bo'lganda $Q(y)|_\Gamma < 0$ bo'lsa, x_0 nuqta (4.2) masalaning yechimi bo'ladi va berilgan funksiya x_0 da mahalliy maksimumga erishadi. Agar $f(x)$ funksiya qavariq bo'lsa, $Q(y)|_\Gamma < 0$ shartning bajarilishi funksiya x_0 da global maksimumga erishishini anglatadi.

Misol ko'raylik.

$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \to m\grave{a}x$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - p = 0$ masala standart masalalardan bo'lib, u uchastka haqidagi 2 ta masaladan biridir. Uni yechish uchun Lagranjning normal funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - p)$$

Xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + \lambda.$$

Endi ushbu $\quad x_2+\lambda=0, \quad x_1+\lambda=0, \quad x_1+x_2-p=0$
tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$x_2=x_2=-\lambda, \quad -\lambda-\lambda-p=0, \quad \lambda_0=-p/2.$$

Shunga ko'ra

$$\left(x_1^0, x_2^0\right)=\left(\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right); \quad \lambda_0=-\frac{p}{2}.$$

Shartli-statsionar nuqta topildi. Endi A matritsani tuzishga kirishamiz. Uning uchun $F(x_1,x_2,\lambda)$ ning ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_1{}^2}=0, \quad \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_2{}^2}=0, \quad \frac{\partial^2 F(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}=1, \quad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Kvadratik forma tuzamiz:

$$Q(y_1,y_2)=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=2y_1y_2.$$

Endi Γ ni topamiz:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}=1; \quad \Gamma: \ (1,1)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=0, \quad y_1+y_2=0.$$

Bundan $y_2=-y_1$ kelib chiqadi. Nihoyat, $Q(y_1,y_2)=2y_1y_2$ ni Γ da hisoblaymiz: $Q|_\Gamma=2y_1(-y_1)=-2y_1^2<0$.

Ko'rinadiki, Γ da kvadratik forma manfiy ishora saqlaydi. Demak, berilgan funksiya $x^0=\left(\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right)$ nuqtada maksimumga erishadi, u global maksimum.

4.3-§. Umumlashgan iste'mol funksiyasining maksimumi

I. Endi 4.1-§ dagi belgilashlardan foydalanib, umumlashgan iste'mol funksiyasi maksimumiga oid modelni o'rganamiz. U quyidagi masala bilan tavsiflanadi:

$$\begin{cases} U(c_1, c_2, ..., c_T) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t) \to max, \\ G(c_1, c_2, ..., c_T) = A - \sum_{t=1}^{T} c_t = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

(4.4) ni *chiziqli budjet chegarali optimal taqsimot masalasi* deb yuritamiz.

Shu (4.4) masala uchun Lagranjning normal funksiyasini tuzamiz:

$$F(c_1, c_2, ..., c_T, \lambda) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t) + \lambda \left(A - \sum_{t=1}^{T} c_t \right). \tag{4.5}$$

Xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = u_1'(c_1) - \lambda; \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = u_2'(c_2) - \lambda; \quad ...; \quad \frac{\partial F}{\partial c_T} = u_T'(c_T) - \lambda.$$

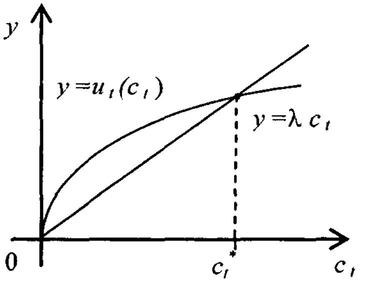
Endi quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} u_t'(c_t) = \lambda, \quad t = 1,2,..., T, \\ A - \sum_{t=1}^{T} c_t = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

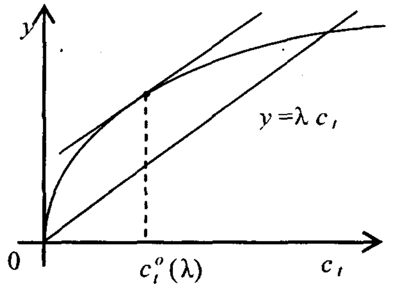
(4.6) sistemada noma'lumlar $(T+1)$ta: $c_1, c_2, ..., c_T$ va λ. Tenglamalar soni ham $(T+1)$ta. Shu sistemaning yechimlari bormi? Javob: ye*chim bor va yagona.* Haqiqatan ham (4.6) sistemaning birinchi tenglamasidan $u_t(c_t) = \lambda c_t + k_t$ kelib chiqadi, unda $k_t = const$. $u_t(0) = 0$ ga ko'ra ((4.1)ga qarang) $k_t = 0$ bo'ladi. Shuning uchun $u_t(c_t) = \lambda c_t$ ga egamiz. Ikkita funksiyani ko'ramiz: $u_t(c_t)$ va λc_t. Ularning grafiklari koordinata boshidan chiqadi (4.4-chizma).

$u_t'(c_t) = \lambda$ ga ko'ra $u_t(c_t)$ funksiyaning botiqligidan biror $c_t^0(\lambda) < c_t^*$ da $y = u_t(c_t)$ chiziqqa o'tkazilgan urinma λc_t ga parallel bo'ladi (4.5-chizma). Ravshanki,

$$\lim_{\lambda \to +0} c_t^0(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} c_t^0(\lambda) = 0 \tag{4.7}$$



4.4-chizma



4.5-chizma

tengliklar o'rinli. Shuning uchun biror $\lambda = \lambda_0$ da $u_t'(c_t(\lambda_0)) = \lambda_0$ bo'ladi. Demak, $u_t'(\lambda) = \lambda$ tenglama yagona yechimga ega. Shu λ_0 son $A - \sum_{t=1}^{T} c_t(\lambda) = 0$ tenglamani ham qanoatlantiradi. Bu (4.7) tengliklardan kelib chiqadi. Shunday qilib (4.6) sistemaning yechimi yagona va $\lambda = \lambda_0 > 0$, $c_t(\lambda_0)$, $t = 1, 2, \ldots, T$ kabi yoziladi.

Endi ikkinchi tartibli hosilalarni shu λ_0, $c_t(\lambda_0)$, $t = 1, 2, \ldots, T$ lar uchun hisoblab, mos matritsa tuzamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c_1^{\,2}} = u_1''(c_1), \ \ldots, \ \frac{\partial^2 F}{\partial c_T^{\,2}} = u_T''(c_T), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial c_i \partial c_j} = 0, \quad i \neq j;$$

$$A = \begin{pmatrix} u_1''(c_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2''(c_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_T''(c_T) \end{pmatrix}.$$

Oxirida $Q(y_1, y_2, \ldots, y_T)$ kvadratik formani tuzamiz:

$$Q(y_1, y_2, ..., y_T) = (y_1, y_2, ..., y_T)\cdot\begin{pmatrix} u_1''(c_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2''(c_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_T''(c_T) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_T \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1 u_1''(c_1),\ y_2 u_2''(c_2),\ \dots,\ y_T u_T''(c_T))\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_T \end{pmatrix} =$$

$$= u_1''(c_1)y_1^2 + u_2''(c_2)y_2^2 + \ \dots + u_T''(c_T)y_T^2 .$$

Enda Γ to‘plamni topamiz. $\frac{\partial G}{\partial c_1} = \frac{\partial G}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial G}{\partial c_T} = -1$ bo‘lgani uchun $(-1)y_1 + (-1)y_2 + \dots + (-1)y_T = 0$ yoki $y_1 + y_2 + \dots + y_T = 0$ bo‘ladi. Ammo $u_t''(c_t) \le 0,\ t = 1, 2, \dots, T$ $[u_1''(c_1)]^2 + \ \dots + [\,u_T''(c_T)]^2 \ne 0$ munosabatlarga ko‘ra $Q(y_1, y_2, ..., y_T) < 0$ tengsizlik o‘rinli ekani kelib chiqadi. Demak, topilgan $c_1(\lambda_0), c_2(\lambda_0), \dots, c_T(\lambda_0)$ nuqtada umumlashgan iste’mol funksiyasi maksimumga erishadi. Shunday qilib, (4.4) masala to‘liq yechildi.

Eslatma (4.4) masalani, umuman aytganda, burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli bilan ham yechsa bo‘ladi. Unda $A - \sum_{t=1}^{T} c_t(\lambda) = 0$ tenglama koordinata o‘qlaridan $1/A>0$ uzunlikdagi kesmalarni kesuvchi tekislikni anglatadi. $\sum_{t=1}^{T} u_t(c_t) = const$ munosabat birinchi oktantda joylashgan sath qavariq sirtlarni anglatadi. Shu sirtlardan faqat bittasi $A - \sum_{t=1}^{T} c_t = 0$ tekislikka urinadi. Urinish nuqtasi yechimni beradi. Hisob-kitoblarni o‘quvchiga qoldiramiz.

Misollar ko‘ramiz.
1-misol.

$$\begin{cases} u_t(c_t) = a_0 c_t^{\alpha}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \\ A - \sum_{t=1}^{T} c_t = 0. \end{cases}$$

Yechish:

$u_t'(c_t) = \lambda$; $a_0 \alpha\, c_t^{\alpha - 1} = \lambda$. Bundan

$$c_t(\lambda) = \left(\frac{a_0 \alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (a_0\, \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\, \lambda^{-\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Endi $c_t(\lambda)$ ni $A - \sum_{t=1}^{T} c_t = 0$ ga qo‘yamiz:

$$A - \sum_{t=1}^{T} (a_0\, \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\, \lambda^{-\frac{1}{1-\alpha}} = 0.$$

yoki $\quad A - (a_0\, \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\, \lambda^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, T = 0 \cdot$

Bundan λ ni topamiz:

$$A - (a_0\, \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\; T\; \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}} = 0,$$

$$\lambda^{1-\alpha} = \frac{(a_0\, \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} T}{A} \quad \text{yoki} \quad \lambda_0 = \frac{a_0\, \alpha\, T^{\frac{1}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Shuning uchun

$$c_t(\lambda_0)=(a_0\ \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{a_0\ \alpha\, T^{\frac{1}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{A}{T}.$$

Shunday qilib, $c_t(\lambda_0)=\frac{A}{T}$.

2-misol. $u_1(c_1)=2c_1^{1/3};\quad u_2(c_2)=3c_2^{1/3};\quad A-c_1-c_2=0$.

Yechish: $u_1'(c_1)=\frac{2}{3}c_1^{-2/3};\quad u_2'(c_2)=c_2^{-2/3}$.

Endi $\frac{2}{3}c_1^{-2/3}=\lambda$, $c_2^{-2/3}=\lambda$ tenglamalarni yechamiz.

$c_1^{2/3}=\frac{2}{3\lambda}$, $c_2^{2/3}=\frac{1}{\lambda}$. Shu formulalarni $A-c_1-c_2=0$ ga qo'yib,

λ ni topamiz: $c_1(\lambda)=\left(\frac{2}{3\,\lambda}\right)^{3/2}$, $c_2(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/2}$;

Bundan λ uchun $\lambda_0=\left(\frac{(2/3)^{3/2}+1}{A}\right)^{3/2}$ formula kelib chiqadi. Endi

$c_1(\lambda)$ va $c_2(\lambda)$ larni topamiz:

$$c_1(\lambda_0)=\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(\frac{A}{(2/3)^{3/2}+1}\right),\quad c_2(\lambda_0)=\frac{A}{(2/3)^{3/2}+1}.$$

Tekshirish.

$c_1(\lambda_0)=c_2(\lambda_0)=A$ tenglik bajariladi. Haqiqatan,

$$c_1(\lambda_0)+c_2(\lambda_0)=\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\frac{A}{(2/3)^{3/2}+1}+\frac{A}{(2/3)^{3/2}+1}=$$

$$=\frac{A}{[(2/3)^{3/2}+1]}\left[(2/3)^{3/2}+1\right]=A.$$

II. Endi 2^0-holni ko‘raylik. Masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} U(c_1, c_2, ..., c_T) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t) \to m\grave{a}x, \\ G(c_1, c_2, ..., c_T) = A - \sum_{t=1}^{T} c_t < 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Bu (4.8) masala chiziqsiz dasturlashning shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasi. Uni yordamchi o‘zgaruvchilar kiritib, shartlari tengliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasiga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} U(c_1, c_2, ..., c_T, c_{T+1}) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t) + 0 \cdot c_{T+1} \to m\grave{a}x, \\ G(c_1, c_2, ..., c_T, c_{T+1}) = \sum_{t=1}^{T} c_t + c_{T+1} - A = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Bu masalani ham Lagranj ko‘paytuvchilari usuli bilan yechish mumkin. Ammo bu masalani yo‘nalish bo‘yicha hosila yordamida yechish qulayroq. Aniqrog‘i, (4.8) masalani yechishga yo‘nalish bo‘yicha hosila olish yordamida yondashamiz.

Ma’lumki, 1^0 holni tekshirganimizda yagona statsionar nuqta $G = \sum_{t=1}^{T} c_t - A = 0$ shart uchun chiqarilgan va u $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_T^0)$ deb belgilangan edi. Endi shu nuqtada *joiz* yo‘nalishlarni topamiz. Joiz yo‘nalishlar $\frac{\partial G(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_T^0)}{\partial l} < 0$, $\| l \| = 1$ tengsizlik yordamida aniqlanadi. Shu hosilani hisoblashda differensiallanuvchi funksiyalarning berilgan nuqtada ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha hosilasini hisoblash formulasidan foydalanamiz (bunda $c^0 = (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_T^0)'$) :

$$\frac{\partial G(c^0)}{\partial l} = \frac{\partial G(c^0)}{\partial c_1} \cdot l_1 + \frac{\partial G(c^0)}{\partial c_2} \cdot l_2 + \ldots + \frac{\partial G(c^0)}{\partial c_T} \cdot l_T =$$
$$= 1 \cdot l_1 + 1 \cdot l_2 + \ldots + 1 \cdot l_T = l_1 + l_2 + \ldots + l_T .$$

Demak, joiz yo'nalishlar $l_1 + l_2 + \ldots + l_T < 0$ tengsizlik bilan aniqlanadi. Ularni $\widetilde{l}$ deb belgilaymiz. Endi shu joiz yo'nalishlar bo'yicha c^0 nuqtada $U(c_1, c_2, \ldots, c_T)$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial U(c^0)}{\partial \widetilde{l}} = u_1'(c_1^0) \cdot \widetilde{l}_1 + u_2'(c_2^0) \cdot \widetilde{l}_2 + \ldots + u_T'(c_T^0) \cdot \widetilde{l}_T \ .$$

Eslatib o'tamizki, $u_t(c_t)$ funksiyalar ((4.1)ga qarang) o'suvchi, (ya'ni $u_t'(c_t) > 0$) va botiq (ya'ni $u_t''(c_t) \le 0$). Koordinata boshida $u_t(0) = 0$ va $u_t'(+0)$ – chekli yoki $+\infty$. Ammo $c_t > 0$ lar uchun $u_t'(c_t)$ funksiya kamayuvchi. Demak, $u_t'(c_t)$ chegaralangan. Shu sababli, $max\left\{ u_1'(c_1^0), u_2'(c_2^0), \ldots, u_T'(c_T^0) \right\} = M > 0$ deb belgilasak,

$$\frac{\partial U(c^0)}{\partial \widetilde{l}} < M\left(\widetilde{l}_1 + \widetilde{l}_2 + \ldots + \widetilde{l}_T\right) < 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu berilgan funksiya $U(l_1, l_2, \ldots, l_T)$ c^0 nuqtada maksimumga erishishini ko'rsatadi. Shunday qilib, (4.8) masala to'liq hal bo'ldi.

4-bobga oid masalalar

I. Barcha davrlarda iste'mol funksiyasi bir xil bo'lgan hollar uchun (4.1) masala yechilsin (quyida $u_t(c_t)$ funksiyalar berilgan) :

1. $u_t(c_t) = a_0 c_t^{\alpha}, a_0 > 0, \ 0 < \alpha < 1$;
2. $u_t(c_t) = 3\sqrt[3]{c_t^2}$;
3. $u_t(c_t) = \dfrac{2c_t}{1 + c_t}$;
4. $u_t(c_t) = \dfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{c_t}\ \right)^2$;
5. $u_t(c_t) = 5 + 2\sqrt{c_t}$;
6. $u_t(c_t) = \dfrac{4c_t}{7 + 3c_t}$.

II. Har bir davrda alohida-alohida iste'mol funksiyasi berilgan holda (4.1) masala yechilsin:

1. $u_1(c_1)=c_1^{1/3}$; $u_2(c_2)=3c_2^{1/3}$.

2. $u_1(c_1)=4c_1^{1/4}$; $u_2(c_2)=2c_2^{1/2}$.

3. $u_1(c_1)=3c_1^{2/3}$; $u_2(c_2)=3c_2^{1/3}$.

4. $u_1(c_1)=\sqrt{c_1+1}$; $u_2(c_2)=\sqrt{c_2+3}$.

5. $u_1(c_1)=\dfrac{4c_1}{5+6c_1}$; $u_2(c_2)=\dfrac{c_2}{5+6c_2}$.

6. $u_1(c_1)=2\sqrt{c_1}$; $u_2(c_2)=2\sqrt{c_2}$.

4-bobga oid nazorat savollari

1. Biror t davrdagi iste'mol funksiyasi qanday belgilanadi?
2. Iste'mol xarajatlari yig'indisi qanday yoziladi?
3. Umumlashgan iste'mol funksiyasini yozib bering.
4. Har bir davrdagi iste'mol funksiyasi xossalarini keltiring.
5. Budjet chegarasi nima?
6. Chiziqli budjet chegarasi qanday yoziladi?
7. Iste'mol funksiyasiga misollar keltiring.
8. Lagranj ko'paytuvchilari usulining mohiyatini so'zlab bering.
9. Shartli-statsionar nuqta nimani anglatadi?
10. Chiziqli budjet chegarali optimal taqsimot masalasi qanday tavsiflanadi?
11. Shu masalani yechishga yo'nalish bo'yicha hosilaning tatbig'i qanday amalga oshiriladi?

5-BOB. ELASTIKLIK TUSHUNCHASI VA UNING IQTISODIY JARAYONLAR MODELLARINI O'RGANISHDAGI AHAMIYATI

Elastiklik tushunchasi u yoki bu jarayonning kechishi bizning maqsadga muvofiq yoki muvofiq emasligini anglatadigan muhim ko'rsatkich. Bu tushuncha differensial hisobning asosiy tatbiqlaridan biridir.

5.1-§. Funksiya elastikligi va uning geometrik ma'nosi

1. Iqtisodiyotda elastiklik tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Talab va taklifning narx hamda aholi daromadiga qarab o'zgarishi (qanday darajada o'zgarishi) elastiklik tushunchasiga bog'liq. Bu tushuncha hosila yordamida kiritiladi. U biror ishlab chiqarish faktoriga qarab iqtisodiy ko'rsatkichning o'zgarish darajasini anglatadi. Elastiklik miqdori elastiklik koeffitsienti bilan aniqlanadi. Elastiklik koeffitsienti tekshirilayotgan iqtisodiy ko'rsatkichning unga ta'sir etuvchi iqtisodiy faktorlardan birining qolganlari o'zgarmas bo'lganda birlik nisbiy o'zgarishi ta'siridagi o'zgarishni ko'rsatadi.

Biror X sohada aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz differensiallanuvchi funksiya berilgan bo'lsin. Odatda argumentning o'zgarishiga qarab funksiyaning o'zgarib borishini uning hosilasi yordamida aniqlanadi. Bu sof matematik yondashish. Ammo bu usul iqtisodiyotda o'zini oqlamaydi. Sababi quyidagicha. Masalan, agar shakarning narxi P bo'lsa, unga bo'lgan talab funksiyasini ko'raylik Q, $Q=Q(P)$, $Q'_P = \lim\limits_{\Delta P \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta P}$. Hosila miqdori narx P o'zgarmas (so'mlarda) bo'lganda shakarga talabning kilogrammlarda o'lchanishiga yoki sentnerlarda o'lchanishiga qarab turlicha bo'ladi. Masalan, shakarning 1 kg 400 so'm deylik. Oilaga 50kg= 0,5 s shakar olinmoqchi. Talabning o'zgarishi $\dfrac{kg}{so'm}$ yoki $\dfrac{s}{so'm}$ larda o'lchanadi. Tegishli sonlar turlicha bo'ladi. Agar talab funksiyasi $Q=-2P+1$ bo'lsa, $Q'(P)=-2\ \dfrac{kg}{so'm} = -\dfrac{1}{50}\ \dfrac{s}{so'm}$.

Shuning uchun funksiyaning argument o'zgarishiga qarab hosila yordamida o'zgarishini tekshirish maqsadga muvofiq emas. Agar funksiyaning o'zgarishi miqdorlarning *nisbiy* o'zgarishi yordamida tekshirilsa, natija o'lchov birliklariga bog'liq bo'lmaydi.

Funksiyaning nisbiy o'zgarishi $\frac{\Delta y}{y}$, argumentning nisbiy o'zgarishi esa $\frac{\Delta x}{x}$ miqdorlar bilan hisoblanadi. Ular o'lchov birliklariga bog'liq emas.

Elastiklik ta'rifi. *Berilgan differensiallanuvchi funksiya elastikligi deb, ushbu*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right)$$

limitga aytiladi.

Ravshanki, $E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \frac{x}{y} = y' \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$.

Shunday qilib,

$$E_x(y) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}.$$

Bu formulani yana boshqacha ham yozish mumkin:

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{\frac{1}{y} \cdot y' \cdot dx}{\frac{1}{x} \cdot dx} = \frac{x \cdot y'}{y}.$$

Shunday qilib,

$$E_x(y) = \frac{x \cdot y'}{y} = \frac{d\ln y}{d\ln x} \quad (5.1)$$

Agar talab funksiyasi $Q = -2P + 1$ ko'rinishda bo'lsa, ta'rif bo'yicha

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{[-2(P + \Delta P) + 1] - (2P + 1)}{-2P + 1} = -\frac{-2\Delta P}{-2P + 1} = \frac{2\Delta P}{1 - 2P}.$$

$$\frac{\Delta Q}{Q}:\frac{\Delta P}{P}=\frac{-2\Delta P}{2P-1}:\frac{\Delta P}{P}=-\frac{-2P\Delta P}{(2P-1)\Delta P}=\frac{2P}{2P-1}<0,\quad P<\frac{1}{2}.$$

Boshqacha aytganda $E_P(Q)=\dfrac{2P}{2P-1}$. Bu natija (5.1) formuladan tezgina kelib chiqadi: $E_P(Q)=\dfrac{P\cdot Q'_P}{Q}=\dfrac{P\cdot 2}{2P-1}$ Bu Q miqdor sentnerlarda berilganda bo'lsa, $Q=-200P+100$ (kg) natija bir xil bo'ladi.

Elastiklik talab funksiyasi uchun manfiy, taklif funksiyasi uchun esa musbat bo'ladi.

Elastiklikning absolut qiymati *elastiklik koeffitsienti* deyiladi. Agar biror iqtisodiy ko'rsatkichning elastiklik koeffitsienti 1 dan katta bo'lsa, shu ko'rsatkichning o'zgarishi *elastik* deyiladi. Ushbu $|E_x(y)|>1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlar (x ning qiymatlari) *elastiklik intervalini* tashkil etadi.

Elastiklik intervalini topishga avval ko'rilgan misolni olaylik: $Q=-2P+1,\quad 0<P<1/2$. Sodda hisoblashlar olib boramiz:

$$Q'=-2;\quad E_P(Q)=\frac{P\cdot(-2)}{-2P+1}=\frac{2P}{2P-1}.$$

$$|E_P(Q)|=\left|\frac{2P}{2P-1}\right|>1,\quad \frac{2P}{2P-1}>1,\quad 4P>1,\quad P>\frac{1}{4}$$

Bundan ko'rinadiki, elastiklik intervali $1/4<P<1/2$ intervaldan iborat.

Chiziqsiz talab funksiyasi uchun ham misol ko'raylik.

1-misol. $y=-x^2+1$; Bundan $0<x<1,\quad y'=-2x$.

$$E_x(y)=\frac{x\cdot(-2x)}{-x^2+2}=\frac{2x^2}{1-x^2},\qquad \left|\frac{2x^2}{1-x^2}\right|>1,\quad 3x^2>1,\quad x>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Elastiklik intervali $1/\sqrt{3}<x<1$ bo'ladi.

2-misol. $y=-2\sqrt{x}+3$; $0<x<\dfrac{9}{4}$, $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

$$E_x(y)=\frac{x\cdot\left(-1/\sqrt{x}\right)}{-2\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}}{-3+2\sqrt{x}}, \qquad |E_x(y)|>1\cdot\left|\frac{-\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}\right|>1,$$

$$\left|\frac{-\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}\right|>1, \quad \sqrt{x}>3-2\sqrt{x}, \quad 3\sqrt{x}>3, \quad x>1.$$

Elastiklik intervali $1<x<9/4$ bo'ladi.

Endi taklifga oid misollar ko'raylik.

1-misol. $y=\sqrt{x-1}$; $x>1$; $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

$$E_x(y)=\frac{x}{2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{x}{2(x-1)}; \quad \frac{x}{2(x-1)}>1; \quad x<2.$$

Elastiklik intervali $1<x<2$.

2-misol. $y=x^2+1$; $x>0$; $y'=2x$.

$$E_x(y)=\frac{x\cdot 2x}{x^2+1}; \quad \frac{2x^2}{x^2+1}>1; \quad x^2>1; \quad x>1.$$

Shu $x>1$ tengsizlik elastiklik intervali bo'ladi.

Alohida ta'kidlab o'tamizki, elastiklik intervali, jumladan, sotiladigan tovarlarning bozorlarga qanday hajmini yuborish kerakligini aniqlashda yordam beradi.

Faraz etaylik, n ta bozorda u yoki bu tovar turi sotiladi. Bozorlarda narxlar mos ravishda (bir-birligi) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bo'lsin. Umumiy tovarlar hajmi P bo'lsin. Unda $P=x_1+x_2+\ldots+x_n$ desak, x_1 hajmda 1-bozorga, x_2 hajmda 2-bozorga, va h.k. n-bozorga x_n hajmda tovarlarni yuborish kerak bo'ladi. Bunda $p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n\to\max$ masalani yechish lozim bo'ladi. Ammo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hajmlarda ishlab chiqarish uchun xomashyolar sarf bo'ladi va bu holat ushbu

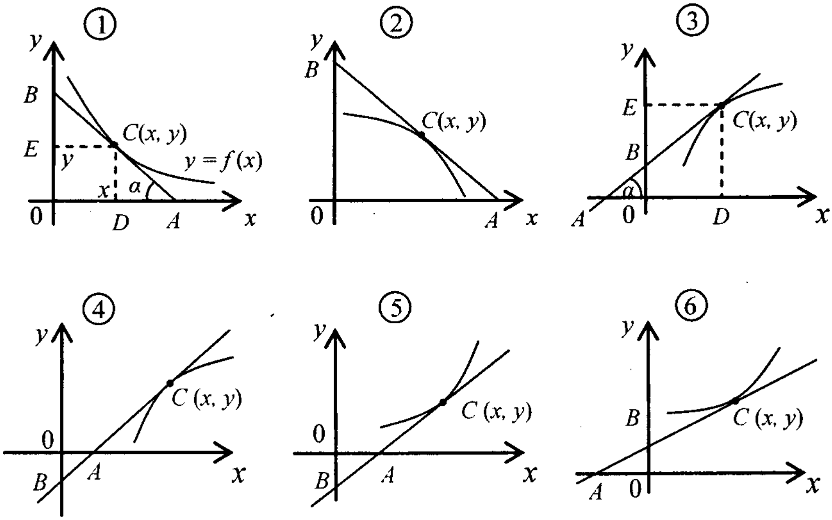
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \end{cases}$$

sistema bilan tavsiflanadi. Demak, elastiklik intervali yordamida bozorlarga chiqariladigan hajm aniqlanadi, uning uchun vektor-matritsali ko'rinishda yozilgan

$$p'\,x \to \max, \qquad Ax = b$$

masalani yechish kerak bo'ladi. Bu kanonik formadagi chiziqli dasturlash masalasi. Bunday masala 6-bobda o'rganiladi.

2. Endi elastiklikning *geometrik ma'nosiga* to'xtalamiz. Iqtisodiy ma'nosi bo'yicha $y=f(x)$ funksiyada x va y lar iqtisodiy ko'rsatkichlar miqdorini anglatadi va ular musbat miqdorlardir. Shuning uchun $y=f(x)$ funksiyaning grafigi birinchi koordinata burchagida joylashgan bo'ladi. Shu funksiya differensiallanuvchi deb faraz etiladi va uning ixtiyoriy nuqtasida grafigiga urinma o'tkazish mumkin bo'ladi. Urinmalarning joylanishiga qarab turli hollarni ko'raylik:



Shu 6 holning har biri uchun elastiklikning geometrik ma'nosini anglatuvchi formulalarni yozamiz:

1) $E_x(y) = -\dfrac{CB}{CA} < 0$. 2) $E_x(y) = -\dfrac{CB}{CA} < 0$. 3) $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} < 1$.

4) $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} > 1$. 5) $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} > 1$. 6) $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} < 1$.

1) hol uchun $E_x(y)=-\dfrac{CB}{CA}$ formulani isbotlaymiz. $\Delta\, ADC$ dan $f'(x)=tg(180^0-\alpha)=-tg\,\alpha$. Ikkinchi tomondan, $tg\,\alpha=\dfrac{CD}{CA}$ Demak, $-f'(x)=\dfrac{f(x)}{AD}$ yoki $AD=-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Ushbu $\Delta\, CBE$ va $\Delta\, ACD$ uchburchaklar o'xshash. Shuning uchun $\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{CE}{AD}$ yoki $\dfrac{CB}{CA}=x\Big/\left(-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\dfrac{x\cdot f'(x)}{f(x)}=-E_x(y)$. Bundan $E_x(y)=-\dfrac{CB}{CA}$ kelib chiqadi.

Endi 3) hol uchun $\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{x\cdot f'(x)}{f(x)}$ formulani isbot etamiz.

Ravshanki, $tg\,\alpha=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{y}{AD}$. Bundan $AD=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. $\Delta\, ACD$ va $\Delta\, BCE$ uchburchaklarning o'xshashligidan $\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{CE}{AD}$ kelib chiqadi. Ammo $CE=OD=x$ bo'lgani uchun

$$\frac{CB}{CA}=\frac{x}{AD}=\frac{x\cdot f'(x)}{f(x)}=E_x(y)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, formula isbot etildi.

Faraz etaylik, $y=f(x)$ grafigi I chorakda joylashgan, qavariq yoki botiq funksiya bo'lsin. (x_0, y_0) esa shu funksiyaning elastiklik intervaliga mos nuqta bo'lsin, bunda $y_0=f(x_0)$ bo'ladi. Berilgan funksiya grafigiga $C\,(x_0, y_0)$ nuqtada urinma o'tkazamiz. Agar A urinmaning abssissa o'qi bilan, B esa – ordinata o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'lsa, ushbu

$$\frac{CB}{CA}=\frac{x_0\cdot|f'(x_0)|}{y_0} \tag{5.2}$$

formula o'rinli bo'ladi. Haqiqatan, $C(x_0, y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ yoki $y=y_0-$ $-x_0\cdot f'(x_0)+x\cdot f'(x_0)$ kabi yoziladi. Bundan A va B nuqtalar koordinatalarini topib olamiz:

$$A\left(\frac{x_0\cdot f'(x_0)-y_0}{f'(x_0)};0\right);\quad B\left(0;\ y_0-x_0f'(x_0)\right).$$

Endi CB va CA kesmalar uzunligini topish qiyin emas.

$$CB=x_0\sqrt{1+f'^2(x_0)};\quad CA=\frac{y_0\sqrt{1+f'^2(x_0)}}{|f'(x_0)|}.$$

Bundan $\frac{CB}{CA}$ uchun (5.2) formula kelib chiqadi.

(5.2) formuladan ko'rinadiki, agar $y=f(x)$ – taklif funksiyasini anglatsa, $\frac{x_0\cdot f'(x_0)}{f(x_0)}=\frac{CB}{CA}$ bo'ladi; agar $y=f(x)$ – talab funksiyasini anglatsa, $\frac{x_0\cdot f'(x_0)}{f(x_0)}=-\frac{CB}{CA}$ formulaga ega bo'lamiz.

Endi misollar ko'raylik.

1-misol. Ushbu chiziqsiz talab funksiyasini ko'raylik:

$$y=-x^2+1.$$

Ravshanki, $y=-x^2+1>0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $-1<x<1$. Ammo $x>0$ bo'lgani uchun $0<x<1$ tengsizlikka egamiz. Avval elastiklik intervalini topamiz. Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki, $y'=-2x$, $\left|\frac{x\cdot(-2x)}{-x^2+1}\right|>1$. Oxirgi tengsizlikni $2x^2>-x^2+1$ yoki $3x^2>1$

ko'rinishda yozish mumkin. Undan $x > 1/\sqrt{3}$ kelib chiqadi. Shunday qilib, berilgan talab funksiyasi uchun elastiklik intervali $1/\sqrt{3} < x < 1$ kabi yoziladi. Shu intervaldan $x_0 = 1/\sqrt{2}$ nuqtani olamiz. Unda $y_0 = 1/2$ bo'ladi. Demak, $C\,(1/\sqrt{2};\ 1/2)$. Shu nuqtada elastiklik $E_{x_0}(y) = \dfrac{-2x_0^2}{-x_0^2+1} = -2$. Urinma tenglamasi: $y - \dfrac{1}{2} = -\sqrt{2}\cdot\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ yoki $y = -\sqrt{2}\cdot x + \dfrac{2}{3}$. Bundan A va B nuqtalarni topib olamiz: $A\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}};0\right)$, $B\left(0;\ \dfrac{3}{2}\right)$. Shuning uchun $CB = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $CA = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Demak, $E_{x_0}(y) = -\dfrac{CB}{CA} = -2$, bu formula bo'yicha hisoblangan elastiklikka teng.

2-misol. Ushbu $y = \sqrt{x-2}$ chiziqsiz taklif funksiyasini olaylik. Bunda $x > 2$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$, $\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} > 1$. Shu tengsizlikni yechamiz: $\left|\dfrac{x}{2\,(x-2)}\right| > 1$, $x > 2\cdot(x-2)$ yoki $4 > x$. Shunday qilib, berilgan taklif funksiyasi uchun elastiklik intervali $2 < x < 4$ bo'ladi. Undan $x_0 = 3$ ni olsak, $y_0 = 1$ bo'ladi. Demak, $C\,(3;1)$, $y'(3) = \dfrac{1}{2}$.

Urinma tenglamasi: $y - 1 = \dfrac{1}{2}\cdot(x-3)$; Elastiklik $E_3(y) = 3/2$. Bundan $A\,(1;\ 0)$, $B\,(0;-1/2)$, $CB = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, $CA = \sqrt{5}$. Demak, $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{3}{2}$.

5.2-§. Elastiklik xossalari va elementar funksiyalarning elastikligi

Endi *elastiklik* xossalariga to‘xtalamiz.

1^0. Elastiklik o‘lchovsiz miqdor, uning qiymati va miqdorlarning o‘lchov birliklariga bog‘liq emas, ya’ni

$$E_{ax}(b\cdot y)=E_x(y), \quad a>0, \quad b>0.$$

Isbot.

$$E_{ax}(by)=\frac{d\ln by}{d\ln ax}=\frac{(1/(by))\cdot b\,dy}{(1/(ax))\cdot a\,dx}=\frac{x\,dy}{y\,dx}=E_x(y).$$

2^0. O‘zaro teskari funksiyalarning elastikligi ham o‘zaro teskari bo‘ladi, ya’ni $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$.

Isbot. $E_x(y)=\dfrac{x\cdot y'}{y}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}=\dfrac{1}{E_y(x)}$

3^0. Ikki funksiya ko‘paytmasining elastikligi ko‘paytuvchilar elastikliklari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)$$

Isbot.

$$E_x(y)=\frac{x\cdot(u\cdot v)'}{u\cdot v}=\frac{x(u'v+uv')}{u\cdot v}=\frac{x\cdot u'}{u}+\frac{x\cdot v'}{v}=E_x(u)+E_x(v).$$

4^0. Ikki funksiya nisbatining elastikligi surati elastikligidan maxraji elastikligining ayirmasiga teng:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v), \quad v\neq 0.$$

Isbot.

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{x\cdot(u/v)'}{u/v}=\frac{u}{v}x\frac{x(u'v-uv')}{v^2}=x\frac{u'}{u}-x\frac{v'}{v}=E_x(u)-E_x(v).$$

5^0. Yig‘indining elastikligi uchun ushbu formula o‘rinli:

$$E_x(u+v)=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

6^0. Ayirmaning elastikligi:

$$E_x(u-v)=\frac{uE_x(u)-vE_x(v)}{u-v}.$$

Endi elementar funksiyalarning elastikligini hisoblaymiz:

1. $y=C=const\neq 0$; . $E_x(y)=\frac{c'\cdot x}{c}=0$. $\boxed{E_x(0)=0}$

2. $y=x$; $E_x(y)=\frac{1\cdot x}{x}=1$. $\boxed{E_x(x)=1\ .}$

3. $y=x^{\alpha}$; $E_x(y)=x$. $\boxed{E_x(x^{\alpha})=\alpha\ .}$

4. $y=a^x$; $E_x(y)=x\ln a$. $\boxed{E_x(e^x)=x\ .}$

5. $y=\sin x$; $E_x(\sin x)=x\cdot\operatorname{ctg} x$.

6. $y=\cos x$; $E_x(\cos x)=-x\cdot\operatorname{tg} x$.

7. $y=2x^3e^x$; $E_x(y)=2\cdot\left(E_x(x^3)+E_x(e^x)\right)=2\cdot(3+x)=6+2x$.

8. $y=\frac{3^x}{x^2}$; $E_x(y)=E_x(3^x)-E_x(x^2)=x\ln 3-2$.

9. $y=\frac{\sin x}{\cos x}=E_x(\sin x)-E_x(\cos x)=x\operatorname{ctg} x+x\operatorname{tg} x=$

$$=x\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=x\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{2x}{\sin 2x}.$$

Chiziqli funksiya uchun elastiklikni alohida o‘rganamiz.

Ravshanki, $E_x(ax+b)=\frac{x\cdot a}{a\,x+b}=\frac{a\,x}{a\,x+b}$. Talab funksiyasi uchun $a<0$, taklif funksiyasi uchun esa $a>0$ bo‘ladi.

Uch hol bo‘lishi mumkin ($a<0$ bo‘lganda):

1. $b\neq 0$; $x=0$. $E_x(y)=E_x\left(\frac{a\cdot 0}{a\,x+b}\right)=0$.

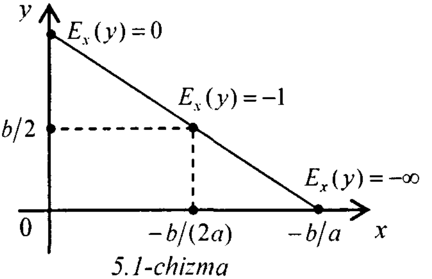
2. $b \neq 0;\quad x = -\dfrac{b}{2a}.\quad E_x(y) = \dfrac{a\cdot\left(-\dfrac{b}{2a}\right)}{a\cdot\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+b} = \dfrac{-\dfrac{b}{2}}{-\dfrac{b}{2}+b} = -1.$

3. $b \neq 0;\quad x = -\dfrac{b}{a}.\quad E_x(y) = \dfrac{a\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)}{a\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)+b} = -\infty.$

Shunday qilib, ko'rilgan hollarni birlashtirsak, quyidagi formulalarga kelamiz ($a<0$) (5.1-chizma):

$$E_x(y) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -1 < E_x(y) < 1, & 0 < x < -\dfrac{b}{2a} \quad (a<0), \\ -\infty < E_x(y) < -1, & -\dfrac{b}{2a} < x < -\dfrac{b}{a} \quad (a<0), \\ E_x(y) = -1, & x = -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, $a<0$ bo'lganda elastiklik chiziqli funksiya grafigining burchak koeffitsientigagina bog'liq bo'lmasdan, uning qiymati qaysi nuqtada hisoblanayotganiga ham bog'liq bo'ladi.



5.1-chizma

5.3-§. Ko'p argumentli funksiyalarning elastikligi va jarayonlarning elastik bo'lish sharti

Ishlab chiqarilgan (ishlab chiqariladigan) mahsulot miqdori n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ faktorlarga bog'liq bo'lsin. Masalan, qishloq xo'jaligida yetishtiriladigan mahsulot miqdori ob-havoga, sug'oriladigan suv miqdoriga, ekinning urug'i sifatiga va boshqalarga bog'liq. Mahsulot miqdori bilan faktorlar orasidagi bog'lanishni $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ deb belgilaymiz. Bunda $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya har bir argumenti bo'yicha $R_+^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0,\dots,x_n\geq 0\}$ sohada differensiallanuvchi deb qaraladi.

Endi elastiklik ta'rifini har bir argument bo'yicha alohida-alohida kiritish mumkin. Biror x_i argument bo'yicha elastiklik quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$E_{x_i}(y)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{f(x)}, \qquad i=\overline{1,n},$$

bunda $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Har bir x_i uchun $\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{f(x)}\right|>1$ bo'lsa, o'sha argument bo'yicha jarayon *elastik* deyiladi.

Agar $\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{f(x)}\right)\right|>1$ bo'lsa, jarayon elastik deyiladi.

Misollar ko'raylik.

1-misol. $y=a_0x_1^{\alpha}\cdot x_2^{1-\alpha}, \quad a_0>0, \quad 0<\alpha<1, \quad x=(x_1,x_2)\in R_+^2$.

Har bir argument bo'yicha elastiklikni hisoblaymiz:

$$E_{x_1}(y)=\frac{x_1\cdot a_0\alpha\, x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{1-\alpha}}{a_0\, x_1^{\alpha}\cdot x_2^{1-\alpha}}=\alpha,$$

$$E_{x_2}(y)=\frac{x_2\cdot a_0(1\text{-}\alpha)\, x_1^{\alpha}\cdot x_2^{-\alpha}}{a_0\, x_1^{\alpha}\cdot x_2^{1-\alpha}}=1-\alpha.$$

Ammo $E_{(x_1,x_2)}(y)=\alpha+1-\alpha=1$, shuning uchun tegishli jarayon elastik emas.

2-misol. $y=a_0x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\delta-\alpha}, \quad a_0>0, \quad 0<\alpha<1,$

$0<\delta-\alpha<1, \quad x=(x_1,x_2)\in R_+^2$.

Yana elastikliklarni hisoblaymiz:

$$E_{x_1}(y)=\frac{x_1\cdot a_0\alpha\, x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\delta-\alpha}}{a_0\, x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\delta-\alpha}}=\alpha\,,$$

$$E_{x_2}(y)=\frac{x_2\cdot a_0(1-\alpha)\, x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\delta-\alpha-1}}{a_0\, x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\delta-\alpha}}=\delta-\alpha\,. \quad E_{(x_1,x_2)}(y)=\alpha+\delta-\alpha=\delta\,.$$

Ko'rinadiki, $\delta>1$ bo'lganda ($1<\delta<1+\alpha$) jarayon elastik bo'lar ekan. Qayd qilib o'tamizki 1-misoldagi funksiya Kobb-Duglas funksiyasi, 2-misoldagi funksiya esa umumlashgan Kobb-Duglas funksiyasi deb ataladi. Ular ikki faktorli iqtisodiy jarayon uchun ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini anglatadi. Kobb-Duglas funksiyasi 1928-yilda matematik Kobb va iqtisodchi Duglas tomonidan kashf qilingan.

3-misol. Yana bitta muhim funksiyani olaylik:

$$y=a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},\quad a_0>0,$$

$$0<a<1,\quad \rho>-1,\quad x_1>0, x_2>0\cdot$$

Bu funksiya 1961-yilda E.Errou, X.Cheneri, B.Minal va R.Solou tomonidan kashf qilingan. Qisqacha uni Solou funksiyasi deb yuritishadi, u ajoyib xossalarga ega. Xozir biz x_1 va x_2 lar bo'yicha elastiklikni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=a_0(-1/\rho)\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot a\cdot(-\rho)\cdot x_1^{-\rho-1}=$$

$$=a_0 a\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot x_1^{-\rho-1};$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=a_0(-1/\rho)\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot(1-a)(-\rho)\cdot x_2^{-\rho-1}=$$

$$=a_0(1-a)\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot x_2^{-\rho-1};$$

$$E_{x_1}(y)=\frac{x_1a_0a\cdot\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot x_1^{-\rho-1}}{a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}=\frac{a\cdot x_1^{-\rho}}{ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}};$$

$$E_{x_2}(y)=\frac{x_2a_0(1-a)\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot x_1^{-\rho-1}}{a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}=\frac{(1-a)\cdot x_2^{-\rho}}{ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}}.$$

Shu formulalardan $E_{x_1}(y)+E_{x_2}(y)=1$ kelib chiqadi.

4-misol. Endi umumlashgan Solou funksiyasini olamiz:

$$y=a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}},\quad a_0>0,\quad 0<a<1,\quad \rho>-1,\quad \delta>0\cdot$$

Shu funksiya elastikligini hisoblash uchun $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ larni topamiz:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=a_0\left(-\frac{\delta}{\rho}\right)\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot a(-\rho)\cdot x_1^{-\rho-1}=$$

$$=a_0a\cdot\delta\cdot\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot x_1^{-\rho-1};$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=a_0\left(-\frac{\delta}{\rho}\right)\cdot\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot(1-a)(-\rho)\cdot x_2^{-\rho-1}=$$

$$=a_0(1-a)\cdot\delta\cdot\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot x_2^{-\rho-1};$$

Endi x_1 va x_2 lar bo'yicha elastiklikni hisoblaymiz:

$$E_{x_1}(y)=\frac{x_1a_0a\delta\cdot\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot x_1^{-\rho-1}}{a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}}}=\frac{a\cdot\delta\cdot x_1^{-\rho}}{ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}};$$

$$E_{x_2}(y)=\frac{x_2a_0(1-a)\cdot\delta\cdot\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot x_1^{-\rho-1}}{a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}}}=$$

$$=\frac{(1-)a\cdot\delta\cdot x_2^{-\rho}}{ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}};$$

Endi $E_{x_1,x_2}(y)$ ni hisoblaymiz:

$$E_{x_1,x_2}(y)=\frac{a\cdot\delta\cdot x_1^{-\rho-1}}{ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}}+\frac{(1-a)\cdot\delta\cdot x_2^{-\rho-1}}{ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}}=\delta\,.$$

Shunday qilib, umumlashgan Solou funksiyasi uchun $E_{x_1,x_2}(y)=\delta$ bo'ladi. Undan $1<\delta<\alpha+1$, $0<\alpha<1$ga ko'ra $1<\delta<1+\alpha$ tengsizlik bajarilganda jarayon elastik bo'lishi kelib chiqadi.

5-bobga oid masalalar

I. Quyidagi talab va taklif funksiyalarining elastikligi, elastiklik koeffitsienti va elastiklik intervali topilsin.

1. $y=-N\cdot x+5$.
2. $y=-\frac{1}{3}\cdot x+N$.
3. $y=-(N+1)\cdot x+N$.
4. $y=-N\cdot x^2+N+1$.
5. $y=-\sqrt{2x}+N$.
6. $y=\sqrt{2x-N}$.
7. $y=N\cdot x^2+4$.
8. $y=2\sqrt{x-N}$.
9. $y=\sqrt{2x-N}$.
10. $y=\frac{N\cdot x-2}{x+N}$.

Bunda $N=1,2,3,\ldots$.

II. Quyidagi talab va taklif funksiyalarining berilgan nuqtadagi elastikligi formula bo'yicha va geometrik usul bilan hisoblansin.

1. $y=-N\cdot x+5$, $C\left(\frac{15}{4N};\frac{5}{4}\right)$.
2. $y=-N\cdot x^2+1$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2N}};\ \frac{1}{2}\right)$.

3. $y=-N\cdot\sqrt{x}+2$, $C\left(\frac{2{,}25}{N^2};\ \frac{1}{2}\right)$.

4. $y=\sqrt{N\cdot x-2}$, $C\left(3/N;\ 1\right)$.

5. $y=N\cdot x^2+4$, $C\left(\frac{3}{\sqrt{N}};\ 13\right)$.

6. $y=N\cdot\sqrt{2x-N}$, $C\left(\frac{3N}{4};\ \sqrt{\frac{N}{2}}\cdot N\right)$.

III. Elastiklikning geometrik ma'nosiga oid 2), 4), 5), 6) hollar isbotlansin.

IV. Quyidagi ikki faktorli (argumentli) funksiyalarning xar bir argumenti bo'yicha elastikligi hisoblansin. Tegishli jarayon $x=(x_1,x_2)$ bo'yicha elastikmi yoki elastik emasmi?

1. $y=3\cdot x_1^{1/3}\cdot x_2^{2/3}$.

2. $y=4\cdot x_1^{1/4}\cdot x_2^{3/4}$.

3. $y=5\cdot x_1^{4/5}\cdot x_2^{1/5}$.

4. $y=2\left[\frac{1}{3}\cdot x_1^{-2}+\frac{2}{3}x_2^{-2}\right]^{-1/2}$.

5. $y=3\cdot x_1^{1/3}\cdot x_2^{\delta-1/3}$.

6. $y=4\cdot x_1^{1/4}\cdot x_2^{\delta-1/4}$.

7. $y=5\cdot x_1^{4/5}\cdot x_2^{\delta-1/5}$.

8. $y=2\left[\frac{1}{3}\cdot x_1^{-2}+\frac{2}{3}x_2^{-2}\right]^{-\delta/2}$.

5-bobga oid nazorat savollari

1. Elastiklik ta'rifini keltiring.

2. Nima uchun elastiklik ta'rifini $f'(x)>0$ *yoki* $f'(x)<0$ *tengsizliklar yordamida berib bo'lmaydi?*

3. Elastiklik intervali qanday topiladi?

4. Elastiklik intervali iqtisodiyotda nima uchun kerak?

5. Chiziqli va chiziqsiz talab funksiyalariga misol keltiring va elastikligini hisoblang.

6. Chiziqli va chiziqsiz taklif funksiyalariga misol keltiring va elastikligini hisoblang.

7. Berilgan nuqtada elastiklik qiymatini geometrik usul bilan hisoblang.

6-BOB. CHIZIQLI DASTURLASH – CHIZIQLI MODELLARNI O‘RGANISHDA MUHIM MATEMATIK USUL

6.1-§. Chiziqli dasturlash (ChD). Asosiy masalalar va tushunchalar

Chiziqli dasturlash matematikada XX asrning birinchi yarmida kashf etilgan muhim yangi yo‘nalish bo‘lib, u iqtisodiy masalalarni yechishga matematik usullarning jiddiy qo‘llanilishi natijasidir. ChD yordamida nostandart masalalarga olib keladigan iqtisodiy masalalar muvaffaqiyat bilan yechiladi.

Chiziqli dasturlash matematik dasturlashning qismidan iborat. Matematik dasturlash chiziqli va chiziqsiz tengliklar hamda tengsizliklar bilan berilgan to‘plamlarda aniqlangan funksiyalarning ekstremumlarini (mahalliy minimum va mahalliy maksimumlarini), ekstremal qiymatlarini (eng kichik va eng katta qiymatlarini) topish nazariyasi va usullarini o‘rganadi.

Matematik dasturlashning asosiy bo‘limlari quyidagilardan iborat:

1. Chiziqli dasturlash (ChD).
2. Chiziqsiz dasturlash (ChZD).
3. Qavariq dasturlash (QD).
4. Sonli usullar (masalalarni yechishning taqribiy usullari).

Ko‘pgina iqtisodiy masalalar chiziqli dasturlash masalalarini yechishga olib keladi. Biz ChD masalalari bilan qisqacha tanishamiz. Shu bilan birga Dansig tomonidan tavsiya etilgan simpleks-usul va ba’zi boshqa usullar bilan shug‘ullanamiz.

Chiziqli dasturlash *chiziqli munosabatlar (chiziqli tenglik va chiziqli tengsizliklar) bilan berilgan to‘plamda aniqlangan chiziqli funksiyaning (maqsad funksiyasining) ekstremal (eng kichik va eng katta) qiymatlarini topish nazariyasi va usullarini o‘rganadi, bunda erkli o‘zgaruvchilar faqat nomanfiy qiymatlar qabul qiladi.*

XX asrning 30-yillaridayoq rus matematigi L.V.Kantorovich tabiiy resurslardan optimal foydalanish kabi iqtisodiy masala bilan jiddiy shug‘ullana boshladi va ChD masalalarining qo‘llanishini aniqladi. 1975-yilda unga va AQSH olimi Kupmansga “Tabiiy resurslardan optimal foydalanish”ga oid qator ilmiy ishlari uchun xalqaro Nobel mukofoti berilgan. XX asrning 40-yillarida AQSH olimi Dj.Dansig ChDning kanonik masalasi deb yuritiladigan masalasini yechishning ajoyib usuli

— *simpleks-usulini* yaratdi. Shu usul va uning turli masalalarni yechishga moslashtirilgan ko'rinishlari butun dunyoga keng tarqaldi.

ChDning ikki masalasi bor.

1. ChDning kanonik ko'rinishdagi masalasi (kanonik masala).
2. ChDning normal ko'rinishdagi masalasi (normal masala).

Kanonik masala quyidagicha qo'yiladi:

$$\left.\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max(\min), \\ & a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{k1}x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n = b_k, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,\ k < n. \end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

Shu masala vektor-matritsali ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} & c'x \to \max(\min), \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

Normal masalani ham vektor-matritsali ko'rinishda yozamiz:

$$\left.\begin{aligned} & c'x \to \max(\min), \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (N)$$

Yuqorida quyidagi belgilashlardan foydalanildi:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \ldots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}^T$$

Har bir (K) va (N) masala $k<n$ bo'lgandagina ma'noga ega.

6.1-*ta'rif*. *Agar (K) masalada x^0 vektor $Ax^0 = b$, $x^0 \geq 0$ munosabatlarni qanoatlantirsa, x^0 vektor joiz reja deyiladi.*

6.2-*ta'rif*. *Ushbu* $P_k = \{ x : Ax = b, x \ge 0 \}$ *to'plam* <u>*joiz rejalar to'plami*</u> *deyiladi.*

6.3-*ta'rif*. *Agar biror* $x^0 \in P_k$ *reja uchun* $c'x^0 \ge c'x$, $\forall x \in P_k$ (max) *yoki* $c'x^0 \le c'x$, $\forall x \in P_k$ (min) *tengsizliklar o'rinli bo'lsa,* x^0 <u>*optimal reja*</u> *deyiladi.*

Aytib o'tamizki, har bir normal masala yordamchi o'zgaruvchilar kiritish yordamida kanonik masalaga keltirilishi mumkin. Bunda faqat o'lchamlar ortadi xolos. Masalan, ushbu

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max\,(\min),\\
&2x_1 + 3x_2 \le 12,\\
&x_1 + x_2 \le 2,\\
&x_1 - x_2 \le 2,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{N})$$

ko'rinishda normal masala (*N*) berilgan bo'lsin. Unda *n*=2, *k*=3. Uni (*K*) masalaga keltirish uchun birinchi tengsizlikning chap tomoniga nomanfiy $x_3 \ge 0$ ni, ikkinchisining chap tomoniga nomanfiy $x_4 \ge 0$ va nihoyat, uchinchisining chap tomoniga nomanfiy $x_5 \ge 0$ ni qo'shish lozim. Natijada quyidagi (*K*) masala hosil bo'ladi ($f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$):

$$\left.\begin{aligned}
f = 2x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 &\to \max\,(\min),\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 &= 12,\\
x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 + 0\cdot x_5 &= 2,\\
x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + x_5 &= 2,\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 &\ge 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

Sodda hollarda, jumladan, normal masalada *n*=2 bo'lganda (ba'zida *n*=3 bo'lganda ham) uni geometrik usul bilan ham yechish mumkin. Kanonik masalada ishlab chiqaruvchilar va iste'mol qiluvchilar soni uncha katta bo'lmaganda (masalan, ular ikkitadan iborat bo'lganda) elementar usullar qo'llanilishi mumkin.

Eslatib o'tamizki, kanonik masalalarning qo'yilishi transport masalalarini yechish mobaynida kelib chiqqan.

Shunga o'xshash normal masala (N) uchun ham joiz reja to'plami P_N tushunchalarini kiritamiz.

6.4-*ta'rif*. *Agar (K) masalada x^0 vektor $Ax^0 \le b$, $x^0 \ge 0$ tengsizlikni qanoatlantirsa, x^0 vektor (K) uchun joiz reja deyiladi.*

6.5-*ta'rif*. *Ushbu $P_N = \{ x : Ax \le b, x \ge 0 \}$ to'plam (N) uchun joiz rejalar to'plami deyiladi.*

6.6-*ta'rif*. *Agar biror $x^0 \in P_N$ reja uchun $c'x^0 \ge c'x$, $\forall x \in P_N$ yoki $c'x^0 \le c'x$, $\forall x \in P_N$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, x^0 — optimal reja deyiladi.*

6.1-teorema. *P_K va P_N to'plamlar qavariq.*

Isbot. Faraz etaylik $x^1 \in P_K$, $x^2 \in P_K$. Agar $0 \le \lambda \le 1$ bo'lsa, $x(\lambda) = \lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2$ nuqtalar x^1 x^2 kesmada joylashgan bo'ladi. Shu $x(\lambda)$ uchun $A \cdot x(\lambda) = b$ vektor-matritsali tenglik o'rinli bo'lsa, bundan P_K to'plamning qavariqligi chiqadi. Haqiqatan, sodda hisoblashlar olib boramiz:

$$A \cdot x(\lambda) = A \cdot (\lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2) = A \cdot (\lambda \cdot x^1) + A \cdot ((1-\lambda) \cdot x^2) =$$
$$= \lambda \cdot A \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot A \cdot x^2 = \lambda \cdot b + (1-\lambda) \cdot b = b.$$

Demak, P_K to'plam qavariq. P_N to'plamning qavariqligi ham xuddi shunday isbotlanadi.

Xulosa. P_K va P_N to'plamlar uchun quyidagicha uch hol yuz berishi mumkin:

1. $P_K = \varnothing$, $P_N = \varnothing$.
2. P_K va P_N to'plamlar faqat bitta elementdan tashkil topgan bo'lishi mumkin.
3. P_K va P_N to'plamlar cheksiz ko'p elementlardan tashkil topgan bo'lishi mumkin.

Iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda qo'llaniladigan masalalar faqat uchinchi holda ma'noga ega bo'ladi.

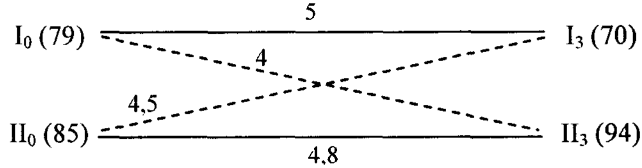
6.2-§. Sodda hollarda ChD masalalarini elementar usullar yordamida yechish

1. Codda holda kanonik masalani yechish

Kanonik masalalar asosan transport masalalarini ifodalaydi. Ularda yo yo'l xarajatlarini eng kam qilish, yo foydani eng ko'p qilish masalasi ko'riladi. Bir nechta iqtisodiy masala ko'ramiz.

1-masala. I_0 va II_0 omborlardan mos ravishda 79 va 85 tonna un I_3 va II_3 non zavodlariga tashilishi kerak. I_0 dan I_3 ga 1 tonna unni tashish 5 so'm, I_0 dan II_3 ga 4 so'm, II_0 dan I_3 ga – 4,5 so'm, II_0dan II_3 ga – 4,8 so'm xarajatni talab etadi. Agar I_3 zavod 70 tonna, II_3 zavod 94 tonna undan mahsulotlar ishlab chiqarsa, I_3 zavod I_0 va II_0 omborlaridan qanchadan, II_3 zavod ham I_0 va II_0 omborlardan qanchadan un tashib olganda yo'l xarajatlari eng kam bo'ladi?

Yechish. Masalaning qo'yilishi shartlari sxematik ko'rinishda quyidagicha yozilishi mumkin:



Qayd qilib o'tamizki, 1-masala turidagi barcha masalalar bir hil usul bilan yechiladi. Endi yuqorida keltirilgan masalani yechamiz.

Uning uchun belgilashlar kiritamiz:

x_1 – I_0 dan I_3 tashilgan un miqdori,
x_2 – I_0 dan II_3 tashilgan un miqdori,
x_3 – II_0 dan I_3 tashilgan un miqdori,
x_4 – II_0 dan II_3 tashilgan un miqdori.

Belgilashlarga ko'ra quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x_1 + x_2 = 79, \quad x_3 + x_4 = 85, \quad x_1 + x_3 = 70, \quad x_2 + x_4 = 94,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Sarf-xarajatlar quyidagicha ifodalanadi:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 4x_2 + 4{,}5x_3 + 4{,}8x_4.$$

Shunday qilib, biz kanonik masalani hosil qildik:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 4x_2 + 4{,}5x_3 + 4{,}8x_4 \to \min, \\ x_1 + x_2 = 79, \ x_3 + x_4 = 85, \ x_1 + x_3 = 70, \ x_2 + x_4 = 94, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Bunda 4 ta noma'lum va 4 ta tenglama ishtirok etayapti. Ammo tenglamalardan ixtiyoriy bittasi qolgan uchtasi natijasidan iborat.

Shuning uchun, masalan, oxirgi $x_2 + x_4 = 94$ tenglamani o'chirib yuboramiz. Qolgan uchta tenglamada 4 ta noma'lum. Ulardan ixtiyoriy 3 tasini qolgan to'rtinchisi orqali ifodalab, maqsad funksiyasi ifodasiga qo'yamiz. Aniqrog'i x_2, x_3, x_4 larni x_1 orqali ifodalaylik:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le x_2 = 79 - x_1, & 0 \le x_1 \le 79, \\ x_3 = 70 - x_1 \ge 0, & 0 \le x_1 \le 70 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le x_1 \le 70.$$

$$x_4 = 85 - x_3 = 85 - (70 - x_1) = 15 + x_1 > 0.$$

$$f_*(x_1) = 5x_1 + 4(79 - x_1) + 4{,}5(70 - x_1) + 4{,}8(15 + x_1) = 1{,}3x_1 + 703.$$

Shunday qilib soddagina

$$f_*(x_1) = 1{,}3x_1 + 703 \to \min, \quad 0 \le x_1 \le 70.$$

ko'rinishdagi masalaga keldik. Ravshanki,

$$\min f_*(x_1) = f_*(0) = 703, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 79, \quad x_3 = 70, \quad x_4 = 15.$$

2. Sodda holda normal masalani yechish

Bu masalani ham elementar usul bilan yechish mumkin. Bunda osongina yechiladigan masalani *ikki o'zgaruvchili* (*N*) masala deyiladi. Uni yechish usulini geometrik usul deb aytiladi. Uning mohiyati quyidagidan iborat: maqsad funksiyasiga mos sath to'g'ri chizig'ini (ya'ni $c' \cdot x = d$, $d = const$) shu to'g'ri chiziq normali yo'nalishi bo'yicha parallel siljitib boriladi. Natijada bu to'g'ri chiziqlar tengsizliklar bilan berilgan sohani (qavariq ko'pburchakni) kesib boraveradilar. Sath to'g'ri chizig'i bilan sohaning oxirgi umumiy nuqtasida (yoki qavariq ko'pburchak tomonida) maqsad funksiyasi o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Soha bilan birinchi umumiy nuqtada (yoki ko'pburchak tomonida) maqsad funksiyasi o'zining eng kichik qiymatiga erishadi.

Misollar ko'ramiz.

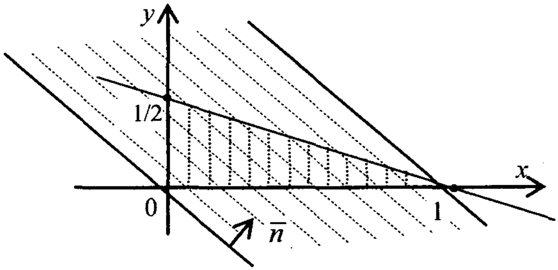
1-misol. $f(x, y) = x + y \to \max, \quad x + 2y \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

Yechish: 1) Avval sohani chizib olamiz. 2) Sath to'g'ri chiziqlari $x+y=d$ ichidan $d=0$ da $x+y=0$ chiziqni yasaymiz. 3)Shu to'g'ri chiziq normali $\bar{n} = (1, 1)$ ekanini e'tiborga olib, uni chizamiz. Bizga uning yo'nalishi muhim. 4) Endi $x+y=0$ ga parallel sath to'g'ri chiziqlarini

$\bar{n}$ normal yo'nalishi bo'yicha yasayveramiz, ya'ni $x+y=0$ ni $\bar{n}$ yo'nalishi bo'yicha parallel siljitamiz. Ravshanki, oxirgi umumiy nuqta (1;0) dan iborat.

Demak, $\max f(x,y) = \max(x+y) = 1+0 = 1$,

$\min f(x,y) = \min(x+y) = 0+0 = 0$.



2-misol. $-x+y \to \max$, $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Yechish: 1) sohani chizamiz;

2) $-x+y=0$ sath to'g'ri chizig'ini chizamiz;

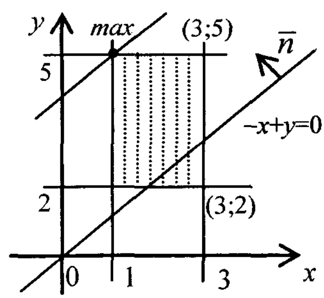
3) uning normali $\bar{n} = (-1,\ 1)$; 4) $-x+y=0$ ni $\bar{n} = (-1,1)$ bo'yicha parallel siljitamiz.

Oxirgi umumiy nuqta (1;5). Demak,

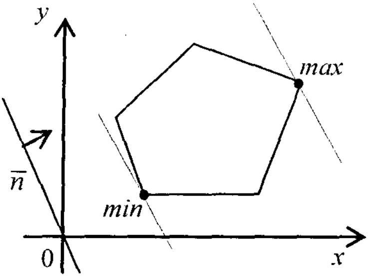
$\max f(x,y) = \max(-x+y) = -1+5 = 4$,

$\min f(x,y) = \min(-x+y) = -3+2 = -1$

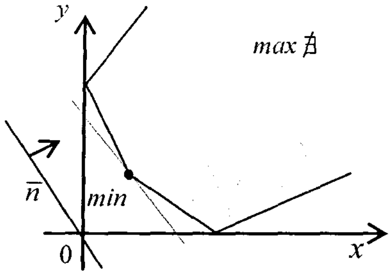
bo'ladi.



Yuqorida yechib berilgan ikki o'zgaruvchili normal masala 4 bosqichda yechilgan. Sohani chizib olish ular ichida eng muhimi. Har bir chiziqli tengsizlik tekislikda yarim tekislikni anglatadi. Chiziqli tengsizliklar sistemasi esa o'sha yarim tekisliklarning kesishmasini (umumiy qismini) ifodalaydi. Natijada albatta qavariq ko'pburchak hosil bo'ladi. U chegaralanmagan bo'lishi ham mumkin (6.1-, 6.2-chizmalar).



6.1-chizma



6.2-chizma

3-misol. Endi ikki o‘zgaruvchili normal masalaga olib keladigan iqtisodiy masala ko‘ramiz.

A va *B* temir yo‘l stansiyalaridan I, II va III omborlarga yuk tashish lozim. *A* stansiyada barcha yukni 80 ta mashinaga, B stansiyada esa — 100 ta mashinaga ortish mumkin. I ombor 50 ta, II ombor 70 ta, III ombor 60 ta mashinani qabul qila oladi. Bitta mashina stansiyadan omborgacha masofani bosib o‘tishi uchun sarf etadigan benzin miqdori (litrlarda) quyidagi jadvalda berilgan:

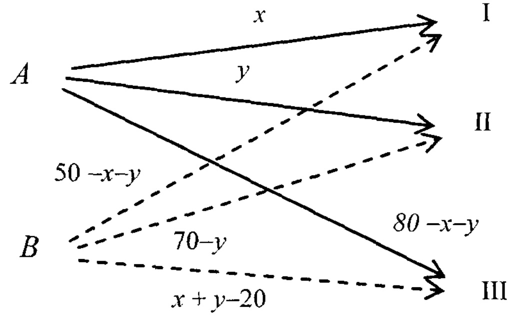
Stansiyalar	Omborlar		
	I	II	III
A	2	4	5
B	4	5	3

Yuk tashishni shunday rejalashtirish kerakki, umumiy sarf etilgan benzin miqdori eng kam bo‘lsin.

Yechish. A stansiyadan I omborga x ta mashina, II omborga esa y ta mashina yuborilgan bo‘lsin. Unda yuk tashish rejasi quyidagicha bo‘ladi: B dan I ga $(50-x)$ ta, A dan III ga $(80-x-y)$ ta, B dan IIga (70−y) ta, B dan III ga $(x+u-20)$ ta mashina yuborilgan. Bu ma’lumotlarni ham jadvalga joylashtiramiz:

Stansiyalar	Omborlar		
	I	II	III
A	x	y	$80-x-y$
B	$50-x$	$70-y$	$x+y-20$

Bu jadvalni sxematik ko'rinishda yozish ham foydadan xoli emas.



Endi qo'yilgan masalaning matematik modelini quramiz. Masalaning shartiga ko'ra quyidagi tengsizliklarni yozish mumkin:

$$0 \le x \le 50, \quad 0 \le y \le 70, \quad 20 \le x + y \le 80.$$

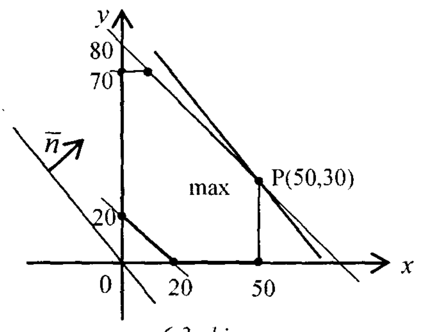
Sarf etilgan benzin miqdorini hisoblaymiz:

$$f(x, y) = 2x + 4y + 5(80 - x - y) + 4(50 - x) +$$
$$+ 5(70 - y) + 3(x + y - 20) = 890 - 4x - 3y.$$

Shunday qilib, masalaning matematik modeli ushbu

$$\begin{cases} f(x, y) = 9890 - 4x - 3y \to \min, \\ 0 \le x \le 50, \quad 0 \le y \le 70, \quad 20 \le x + y \le 80 \end{cases}$$

ikki o'zgaruvchili normal masaladan iborat ekan. Masala geometrik usul bilan yechiladi. Avval tengsizliklar bilan berilgan sohani – ko'pburchakni chizamiz (6.3-chizma). U (6.3-chizma) shtrixlangan 6 burchakli qavariq ko'pburchakdan iborat.



6.3-chizma

Maqsad funksiyasi $f(x, y) = 890 - 4x - 3y$ ning minimumini topish masalasi $f_*(x, y) = 4x + 3y - 890$ funksiyaning maksimumini topish masalasiga ekvivalent. Ushbu $4x + 3y - 890$ ifoda maksimumga erishishi uchun $4x + 3y$ ifoda maksimumga erishishi yetarli. Biz $4x+3y \to \max$ masalani yechamiz. Unda, ravshanki, $4x+3y=C$, $C=const$ sath to‘g‘ri chiziqlarini ifodalaydi, normali $\bar{n}\,(4,3)$ birinchi chorakka yo‘nalgan. Koordinata boshidan chiqadigan sath to‘g‘ri chizig‘ini chizamiz (6.3-chizma). Uni $\bar{n}\,(4,3)$ normal yo‘nalishi bo‘yicha parallel siljitib bursak $4x+3y=C$ chiziq bilan sathning oxirgi umumiy nuqtasi P bo‘ladi. Demak, $f_*(x,y)=4x+3y-890$ funksiya P nuqtada maksimumga, dastlabki masala uchun $f(x,y)=890-4x-3y$ funksiya shu nuqtada minimumga erishadi. Shu P nuqta koordinatalarini hisoblaymiz. Uning uchun $x+y=80$, $x=50$ sistemani yechish yetarli: $x=50$, $y=30$. Shunday qilib, A stansiyadan I omborga 50 ta, II omborga 30 ta mashina yuborilishi kerak. Shuningdek, V stansiyadan I omborga mashina yuborilmaydi, II omborga esa, 40 ta mashina yuboriladi. Yana A stansiyadan III omborga mashina yuborilmaydi, B stansiyadan esa III omborga 60 ta yuboriladi.

6.3-§. Bazis rejaning optimallik sharti

Eslatamizki, kanonik masala vektor-matritsali ko‘rinishda quyidagicha yozilar edi:

$$\left.\begin{aligned} c'\cdot x &\to \max, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

Bunda A matritsa $k\times n$, $k<n$ o‘lchovli bo‘lib, uning ustunlari n ta, satrlari k ta:

$$a^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad a^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \quad a^{(n)}=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Shu $a^{(1)}$, $a^{(2)}, \dots,$ $a^{(n)}$ vektorlar shart vektorlari deyiladi. Matritsani shartli ravishda $A=(a^{(1)}, a^{(2)},\ldots, a^{(n)})$ deb yozish mumkin.

Biror $x^0 \in P_k$ reja optimal bo'lishi uchun yetarli shartni keltirib chiqarish jarayonida kerak bo'ladigan asosiy tushunchalarni keltiramiz.

6.7-*ta'rif.* *Agar biror* $x^0 \in P_k$ *joiz rejaning* $n-k$ *ta koordinatasi nolga teng bo'lib, qolgan* k *ta* $x_{j_1}, x_{j_2},\ldots, x_{j_k}$ *koordinatalariga mos* $a^{(j_1)}, a^{(j_2)},\ldots, a^{(j_k)}$ *shart vektorlari chiziqli erkli bo'lsa, tekshirilayotgan* $x^0 \in P_k$ *reja bazis (asosiy) reja deyiladi.*

6.8-*ta'rif.* *Bazis rejaning* $x_{j_1}, x_{j_2},\ldots, x_{j_k}$ *koordinatalari bazis koordinatalari deyiladi va* $x_Б$ *deb belgilanadi.*

6.9-*ta'rif.* *Agar bazis rejaning barcha bazis koordinatalari musbat bo'lsa, u buzilmagan bazis reja (невырожденный план) deyiladi.*

Keyingi mulohazalarimizda faqat buzilmagan bazis rejalar bilan ish ko'ramiz. Bazis reja deyilganda buzilmagan bazis reja nazarda tutiladi.

Bazis reja simpleks-usulning asosiy tushunchalaridan biridir. Uning $n-k$ ta koordinatasi nol, qolganlari (asosan) musbat bo'ladi. Bazis rejaning k ta musbat koordinatalaridan tuzilgan vektorni $x_Б$, nolga teng $n-k$ ta koordinatalaridan tuzilgan vektorni (nol vektorni) $x_Н$ deb belgilanadi. Chiziqli erkli shart vektorlaridan tuzilgan matritsani $A_Б$ deb olamiz, u $k \times k$ o'lchovli kvadrat matritsa. Maqsad funksiyasi yozuvida ishtirok etgan $c'=(c_1, c_2,\ldots, c_n)$ uchun $j_1, j_2,\ldots, j_k$ nomerli koordinatalardan tuzilgan vektorni $c_Б$ deb, qolgan $n-k$ ta nomerlaridan tuzilgan vektorni $c_Н$ deb belgilanadi. Shu belgilashlar yordamida quyidagilarga egamiz:

$$x=(x_Б, x_Н), \qquad A=(A_Б, A_Н), \qquad c=(c_Б, c_Н).$$

Eslatib o'tamizki, $a^{(j_1)}, a^{(j_2)},\ldots, a^{(j_k)}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lishi uchun ulardan tuzilgan determinat noldan farqli bo'lishi yetarli.

Yuqorida kiritilgan tushunchalarni muayyan misollarda ko'rib chiqaylik.

1-misol. Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (K)$$

kanonik masala va 2 ta reja

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. Bu rejalar sistemani qanoatlantiradi.

Demak, ular joiz reja bo'ladi. Endi shart vektorlarini yozamiz:

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Avval $x^{(1)} \in P_k$ joiz rejani tekshiramiz. (K) masalaga ko'ra n=3, k=2. Shuning uchun $n-k$=1. $x^{(1)}$ning ikkinchi koordinatasi nolga teng, qolgan 2 ta: birinchi va uchinchi koordinatalari musbat. Demak, $x'_Б = (1, 2)$, $x_Н = \{0\}$. Endi bunga mos $a^{(1)}$ va $a^{(3)}$ shart vektorlarining chiziqli erkliligini tekshiramiz. Haqiqatan,

$$\left| a^{(1)}, a^{(3)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \ne 0.$$

Shunday qilib, $x^{(1)}$ reja bazis reja ekan. Endi $c'_Б$, $c'_Н$, $A_Б$, $A_Н$ lar uchun ifodalarni yozamiz:

$$c'_Б = (-3,\ 5), \quad c'_Н = \{2\}, \quad A_Б = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_Н = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Endi $x^{(2)} \in P_k$ joiz rejani olamiz. U bazis reja. Haqiqatan, $x^{(2)}$ning bitta birinchi koordinatasi nolga teng, qolgan ikkita koordinatasi musbat. Demak, $x^{(2)}$ bazis reja bo'lishi uchun $a^{(2)}$ va $a^{(3)}$ shart vektorlari chiziqli erkli bo'lishi kerak. Haqiqatan,

$$\left| a^{(2)}, a^{(3)} \right| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Shunday qilib, $x^{(2)}$ joiz reja bazis reja ekani isbotlandi.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

kanonik masala va 2 ta reja berilgan bo'lsin. $x^{(1)}$ va $x^{(2)}$ rejalar

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiradi. Demak, ular joiz reja bo'ladi. Ular bazis rejami yoki bazis reja emasligini tekshirish uchun avval shart vektorlarini yozib chiqamiz:

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dastlab $x^{(1)}$ rejani olaylik. Uning bazis koordinatalari $x'_Б = (1, 2)$. Ular $x^{(1)}$ joiz rejaning 2–va 3–koordinatalari. Shuning uchun $a^{(2)}$ va $a^{(3)}$ shart vektorlaridan tuzilgan determinantni hisoblaymiz:

$$\left| a^{(2)}, a^{(3)} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 .$$

Bundan $x^{(1)}$ joiz reja bazis reja ekani kelib chiqadi.

Endi bazis reja optimal bo'lishi uchun zaruriy, yetarli shart bilan shug'ullanamiz.

Shu munosabat bilan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$A=(A_Б \;\; A_Н), \qquad x=(x_Б, x_Н), \qquad c=(c_Б, c_Н).$$

Masala quyidagicha yozilishi mumkin:

$$c'x = c'_Б x_Б + c'_Н x_Н = c'_Б x_Б \to \max .$$

Endi *maqsad funksiyasining orttirmasi* bilan shug'ullanamiz.

Faraz etaylik, $x \in P_k$ – biror bazis reja bo'lsin. Unga shunday orttirma beramizki, $\bar{x} = (x + \Delta x) \in P_k$ bo'lsin, bunda Δx – argument orttirmasi deyiladi, $\bar{x}$ – reja bazis reja bo'lishi shart emas, faqat joiz reja bo'lsa yetarli. Endi maqsad funksiyasi orttirmasini topamiz:

$$c' \cdot \bar{x} - c' \cdot x = c' \cdot (x + \Delta x) - c' \cdot x = c' \cdot \Delta x . \qquad (6.1)$$

Ravshanki, agar ixtiyoriy $\bar{x} \in P_k$ uchun $c' \cdot \Delta x \le 0$, ya'ni $c' \cdot \bar{x} \le c' \cdot x$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, olingan bazis reja x optimal bo'ladi. Ammo bazis rejaning optimalligini shu ko'rinishda tekshirish noqulay. Shu sababli optimallikni tekshirish qulay bo'lgan yetarli va zaruriy shart keltiramiz.

6.2-teorema. Bazis reja x optimal bo'lishi uchun ushbu

$$c'_Б \cdot A_Б^{-1} \cdot A_Н - c'_Н \ge 0 . \qquad (6.2)$$

vektor tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Biz (6.2) vektor tengsizlikning keltirib chiqarilishiga to'xtalamiz. Bazis reja x optimal bo'lishi uchun shu tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekanini isbotlaymiz.

Yetarliligi. Bazis reja x (6.2) tengsizlikni qanoatlantirsin. Unda nobazis koordinatalar ta'rif bo'yicha nolga teng: $x_Н = 0$. Endi $Ax=b$ dan $\Delta x_Н = \bar{x}_Н - x_Н = \bar{x}_Н \ge 0$ tengsizlik kelib chiqadi. Bunda $x_Н$ ixtiyoriy $\bar{x} = (x_Б, \; x_Н)$ reja. Topilgan ifodalarni (6.2)ga qo'ysak, $c' \cdot \bar{x} - c' \cdot x \le 0$ kelib chiqadi. Bu esa x joiz rejaning optimalligini isbot etadi.

Zarurligi. Faraz etaylik, optimal bazis x reja uchun (6.2) tengsizlik bajarilmasin. Hech bo'lmaganda bitta nobazis x nomer uchun ziddiyatlikka kelinsa, (6.2) bajarilishi kelib chiqadi.

Faraz etaylik, optimal bazis reja x uchun (6.2) vektor-tengsizlik bajarilmasin, ya'ni biror nobazis nomer j_0 uchun

$$\Delta X_{j_0} > 0 \tag{6.3}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. $\bar{x} = (x + \Delta x)$, $\bar{x} \in P_k$ vektorni quyidagicha aniqlaymiz:

$\Delta x_{j_0} = \theta \geq 0, \quad \Delta x_j \equiv 0, \quad j \neq j_0, \quad j$ – nobazis nomerlar. (6.4)

Bazis koordinatalarini topamiz:

$$\Delta x_Б = -A_Б^{-1} \cdot A_Н \cdot \Delta x_Н = -\theta \cdot A_Б^{-1} \cdot a^{j_0}. \tag{6.5}$$

$\bar{x}$ vektor tenglamalar sistemasini ($Ax=b$ni) qanoatlantiradi: $A\bar{x} = Ax + A\Delta x = Ax = b$. Shu bilan birga quyidagiga egamiz: ixtiyoriy $\theta \geq 0$ uchun

$$\bar{x}_Н = x_Н + \Delta x_Н = \Delta x_Н \geq 0. \tag{6.6}$$

Endi $x_Б$ uchun topamiz:

$$\Delta \bar{x}_Б = x_Б + \Delta x_Б = x_Б - \theta \cdot A_Б^{-1} \cdot a^{j_0}. \tag{6.7}$$

Ravshanki, yetarli kichik $\theta \geq 0$ topiladiki, $\bar{x}_Б \geq 0$ bo‘ladi. Bundan topilgan θ uchun $\bar{x}$ vektor $c' \cdot x \to \max$, $Ax = b$ masalaning joiz rejasi bo‘ladi. Agar (6.3) va (6.4)ni (6.2) ga qo‘ysak

$$c' \cdot \bar{x} - c' \cdot x = \theta \cdot \Delta X_{j_0} > 0 \tag{6.8}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa, bazis reja x ning optimalligiga zid. 6.2-*teorema to‘liq isbotlandi.*

Agar bazis rejalar berilgan bo‘lsa, (6.2) shartning bajarilishini vektor-matritsali ko‘rinishda tekshirish mumkin.

Yuqorida ko‘rilgan 1-misol uchun (6.2)ni tekshiraylik. Unda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_Б' = (1, 2),$$

$$x_Н = \{0\}, \quad A_Б = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_Н = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c' = (-3, 5), \quad c_Н = \{2\}.$$

(6.2) tengsizlikda $A_Б^{-1}$ ishtirok etayapti. Sodda hisoblar yordamida $A_Б^{-1}$ ni topamiz:

$$T_{11}=-1,\quad T_{21}=-3,\qquad A_Б=-4,\quad A_Б^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$
$$T_{12}=-1,\quad T_{22}=1,$$

Topilgan miqdorni (6.2)ga qo‘yamiz:

$$\frac{1}{4}(-3,\ 5)\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot(2,\ -14)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot(-2-14)=-4<0$$

Ko‘rinadiki, $x^{(1)}$ joiz reja optimal emas.

Endi $x^{(2)}$ ni tekshiramiz. Unda

$$A_Б=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad |A_Б|=-2\neq 0,\quad A_Н=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad x_Б=(2;3),\quad x_Н=\{0\}.$$

Topilgan qiymatlarni (6.2) ga qo‘yamiz:

$$\frac{1}{2}(2,\ 5)\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(7,\ 11)\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(7+11)=9>0.$$

Demak, $x^{(2)}$ bazis reja optimal ekan. Ikkinchi tomondan,

$$f(x^{(1)})=-3\cdot 1+2\cdot 0+5\cdot 2=7,\quad f(x^{(2)})=-3\cdot 0+2\cdot 2+5\cdot 3=19,$$

$$f(x^{(2)})>f(x^{(1)}).$$

Shu 1-misolda $x^{(1)}$ va $x^{(2)}$ bazis rejalardan boshqa bazis rejalar yo‘qligini isbot etish qiyin emas. Uning uchun $x_3=0$ da sistemani yechib ko‘rish kifoya. Haqiqatan, $x_3=0$ bo‘lganda,

$$\begin{cases} x_1-x_2=7\\ x_1+x_2=-1\end{cases}$$

sistema (3;–4) yechimga ega. Reja $x'=(3;-4;0)$ bo‘ladi.

Ammo $x_2<0$, demak, x' joiz reja emas.

2-misol uchun xuddi shunday hisob-kitoblarni olib borish mumkin edi. Bu ishni talabaning o‘ziga topshiramiz.

Eslatma. Ta’kidlab o‘tamizki, chiziqli dasturlashning kanonik masalasi berilganda bironta ham bazis reja ma’lum bo‘lmaydi. Bunday hollar o‘rganilgan va dastlabki bazis rejani topish usullari mavjud. Bunga masalan sun’iy bazis usuli (ikki fazali usul) misol bo‘la oladi. Agar jarayon modeli normal masala ko'rinishida tavsiflangan bo'lsa, uni quyidagicha o'zgaruvchilar kiritib kanonik masalaga olib kelinadi va dastlabki bazis reja osongina topiladi. Haqiqatan, (N) sistemani koordinatalarda yozamiz:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2\, x_2 \ + \ldots + \ c_n\, x_n \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}\, x_2 + \ldots + a_{kn}\, x_n \le b_k, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Shu sistemaning chap tomoniga mos ravishda $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$ larni qo'shib, tengliklar hosil qilsak, quyidagi kanonik masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum\limits_{j=n+1}^{n+k} x_j \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}\, x_2 + \ldots + a_{kn}\, x_n + x_{n+k} = b_k, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ldots, x_{n+k} \ge 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

Ushbu $\bar{x}' = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n\text{ та}}, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ (n+k)– o'lchovli vektor (6.10) dagi sistemani qanoatlantiradi. Demak, u joiz reja. Shu bilan birga u bazis reja ham, chunki $a^{(n+1)}, a^{(n+2)}, \ldots, a^{(n+k)}$ shart vektorlari chiziqli erkli. Ulardan tuzilgan determinant 1 ga teng, demak, $\bar{x}$ bazis reja.

6.4-§. Simpleks jadval va uning tuzilishi

Agar biror usul bilan dastlabki bazis reja topilgan bo'lsa, o'lchovlar katta bo'lmaganda (6.2) tengsizlikning bajarilishini tekshirish mumkin. Agar (6.2) bajarilsa, o'sha bazis reja (K) masalaning yechimi bo'ladi. Dastlabki bazis reja uchun (6.2) tengsizlik bajarilmasachi? Unda optimal bazis rejani izlash usullari mavjud. Dj. Dansigning "simpleks-usul" deb atalgan usuli ana shu usullardan eng muhimi hisoblanadi. Bu usulning bayoni 1951-yilda bosilib chiqqan T.K.Kupmansning ("Activity Analysis of Production and Allocation", Wiley, 1951, Cocules monograph 13) monografiyasida "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalites" nomi bilan bosilib chiqqan.

Zaruriy va yetarli shartni ifodalaydigan (6.2) vektor tengsizlikning chap va o'ng tomonlari satr vektorlardan iborat. O'ng tomoni $\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ та}}$ – nol satr vektor.

Dj. Dansig (6.2) ni tekshirish uchun qulay bo'lgan simpleks-jadvalni tavsiya etgan. Avval jadvalning tuzilishini yozamiz, so'ngra uni tushuntiramiz (6.1-jadvalga qarang).

Jadvalda $a^{(1)}$, $a^{(2)}, \ldots,$ $a^{(k)}$ – bazis shart vektorlar. Bazis matritsa $A_Б$ shu vektorlardan tuziladi va $A_Б^{-1}$ mavjud. Jadvalning $A_Б$, $c_Б$, $x_Б$ turgan ustunlari $A_Б$ uchun bazis shart vektorlari bilan, $c_Б$, $x_Б$ lar esa bazis koordinatalari bilan to'ldirilgan. Keyingi $a^{(1)}$, $a^{(2)}, \ldots,$ $a^{(k)}$ ustun elementlari esa, har bir $a^{(i)}$ ning shu bazis shart vektorlari bo'yicha yoyilmasi koeffitsientlaridan iborat. Masalan,

$$a^{(1)} = 1 \cdot a^{(1)} + 0 \cdot a^{(2)} + \ldots + 0 \cdot a^{(k)},$$
$$a^{(2)} = 0 \cdot a^{(1)} + 1 \cdot a^{(2)} + \ldots + 0 \cdot a^{(k)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{(k)} = 0 \cdot a^{(1)} + 0 \cdot a^{(2)} + \ldots + 1 \cdot a^{(k)}.$$

Ko'rinadiki, $a^{(1)}$ ning yoyilmasi koeffitsientlari (1,0,...,0), $a^{(2)}$ niki – (0,1,0,...,0) va h.k. $a^{(k)}$ niki – (0, 0, ..., 0, 1).

Endi jadvalning k+1,...,n – ustunlarini to'ldirishni tushuntiramiz. Har bir nobazis $a^{(k+1)}, a^{(k+2)}, \ldots, a^{(n)}$ vektorning bazis shart vektorlari bo'yicha yoyilmasi koeffitsientlarini topib, mos ustunga joylashtiramiz.

Simpleks-jadval

6.1-jadval

			c_1	c_2	…	c_k	c_{k+1}	…	c_n
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	…	$a^{(k)}$	$a^{(k+1)}$	…	
$a^{(1)}$	c_1	x_1	1	0	…	0	$x^{1\,k+1}$	…	$x^{1\,n}$
$a^{(2)}$	c_2	x_2	0	1	…	0	$x^{2\,k+1}$	…	$x^{2\,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$a^{(k)}$	c_k	x_k	0	0	…	1	$x^{k\,k+1}$	…	$x^{k\,n}$
	$z=\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$		c_1	c_2	…	c_k	$\sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,k+1}$	…	$\sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,n}$
	$c'_Б \cdot A_Б^{-1} A_Н - c_H = z - c$		0	0	…	0	$\sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,k+1} - c_{k+1}$	…	$\sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,n} - c_n$

Oxirgi satrdagi sonlar z–c satr-vektor koordinatalarini ifodalaydi. Ravshanki, .

$$c'_Б \cdot A_Б^{-1} A_Н - c'_H = z - c$$

Agar $x^{1\,k+1}, x^{2\,k+1}, \dots, x^{k\,k+1}$ lar bilan $a^{(k+1)}$ vektorning bazis shart vektorlari orqali yoyilmasi koeffitsientlarini belgilasak, ular ushbu

$$x^{k+1} = A_{Б}^{-1} \cdot a^{(k+1)} \qquad (6.11)$$

formula yordamida hisoblanadi, unda

$$x^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{1\,k+1} \\ x^{2\,k+1} \\ \vdots \\ x^{k\,k+1} \end{pmatrix}. \qquad (6.12)$$

Qolgan nobazis shart vektorlarining bazis shart vektorlari orqali yoyilmasi koeffitsientlari ham (6.11) ga o'xshash formula bilan topiladi.

Shunday qilib, jadvalning birinchi *k*ta satri qanday to'ldirilishi bilan tanishdik. Endi navbatdagi (*k*+1)-satrini tushuntiramiz.

Jadvalda $A_Б$ joylashgan ustundan boshqa yana (*n*+2)ta ustun bor. (*k*+1)– satr elementlari $c_Б$ turgan ustun elementlarini qolgan (*n*+1)ta ustun elementlariga ko'paytirib chiqishdan (ya'ni $c_Б$ ustun vektor bilan qolgan ustun vektorlar skalyar ko'paytmasidan) iborat. Unda $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$ vektorlar tagida (*k*+1) satrda $c_1, c_2, \dots, c_k$ turgan bo'ladi. Qolgan $a^{(k+2)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}$ vektorlar tagida, o'sha (*k*+1)-satrda mos ravishda

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,k+1},\ \sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,k+2},\ \dots,\ \sum_{i=1}^{k} c_i x^{i\,n}$$

sonlar turgan bo'ladi.

Endi oxirgi (*k*+2)– satrni tushuntiramiz. Unda $c'_Б \cdot A_Б^{-1} A_Н - c'_H = z - c$ satr vektor joylashgan bo'ladi. Unda bazis shart vektorlari $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$ tagida albatta nollar turgan bo'ladi. Qolgan $a^{(k+1)}, a^{(k+2)}, \dots, a^{(n)}$ nobazis shart vektorlari tagida turli sonlar turishi mumkin. Agar ular ***nomanfiy*** bo'lsa, (6.2) tengsizlik tekshirilayotgan bazis reja uchun bajariladi va u optimal bo'ladi. Agar ular ichida bir necha manfiylari bo'lsa, bundan tekshirilayotgan bazis reja optimal emasligi kelib chiqadi. Mulohazalarni davom ettirish uchun manfiylari ichida moduli bo'yicha eng kichigini olib, shu son turgan ustunni o'rganamiz. Agar tegishli ustun elemenlari faqat manfiy sonlardan tashkil topgan bo'lsa, kanonik masala umuman yechimga ega emasligi kelib chiqadi. Buning isbotini talabaga qoldiramiz. Agar o'sha ustun elementlari ichida musbatlari ham bo'lsa, unda Dj.Dansig yangi simpleks-jadvalga o'tishni tavsiya qiladi. U yangi simpleks-jadvalga o'tishning o'ziga xos ajoyib qoidasini beradi.

Endi simpleks-jadvalni to'ldirishga oid misol ko'ramiz. 6.3-§ da ko'rilgan misollardan birinchisini olamiz:

$$\left.\begin{aligned} & f \equiv -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ & x_1 + x_2 - x_3 = -1, \end{aligned}\right\}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ rejalar joiz va bazis reja ekani ko'rsatilgan edi. Shu bilan birga

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n=3, \quad k=2.$$

Avval $x^{(1)}$ ni tekshiramiz. Shu bazis reja uchun $A_Б = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ va

$A_Б^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Endi simpleks-jadvalni to'ldiramiz:

			-3	2	5
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(1)}$	-3	1	1	$1/2$	0
$a^{(3)}$	5	2	0	$-1/2$	1
	7		-3	-4	5
			0	-6	0

Ko'rinadiki, jadvalning oxirgi satrida bitta manfiy son -6 turibdi. Demak, $x^{(1)}$ bazis reja masalaning yechimi emas. O'rab qo'yilgan 7 son maqsad funksiyasining qiymatini anglatadi: $f(x^{(1)})=7$.

Endi $x^{(2)}$ bazis rejaga mos simpleks-jadvalni to'ldiramiz:

$$x^1 = A_Б^{-1} \cdot a^{(1)}, \quad \text{bunda} \quad A_Б^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

			-3	2	5
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	2	2	2	1	0
$a^{(3)}$	5	3	1	0	1
			9	2	5
	19		12	0	0

Jadvalning oxirgi satrida nomanfiy sonlar turibdi. Demak, $x^{(2)}$ bazis reja optimal bo'ladi. Maqsad funksiyasining qiymati o'rab qo'yilgan, $f(x^{(2)})=19$.

Endi 6.3-§dagi misollardan 2-ni olamiz (89-betga qarang)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Bunda $n=3$, $k=2$, $n-k=1$. Avval $x^{(1)}$ uchun jadvalni to'ldiramiz. Shu $x^{(1)}$ – bazis reja, buni bevosita tekshiriladi. Unda

$$x_Б' = (1,2), \; x_k = \{0\}, \; c_Б' = (5,1), \; A_Б = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; A_Б^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_Б^{-1} \cdot a^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Simpleks-jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

			2	5	1
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	5	1	3/4	1	0
$a^{(3)}$	1	2	−1/4	0	1
	7		7/2	5	1
			3/2	0	0

Jadvalning oxirgi satrida faqat nomanfiy sonlar turibdi. Demak, $x^{(1)}$ bazis reja yechim bo'ladi $f(x^{(1)})=7$.

Shunga o'xshash $x^{(2)}$ bazis rejani ham tekshirish mumkin. Shu reja uchun $x'_Б=(1/3, 7/3)$, $x_k=\{0\}$, $c'_Б=(2,1)$, $A_Б=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

$$|A_Б|=3,\ A_Б^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad A_Б^{-1}a^{(2)}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\ 1/3\end{pmatrix}.$$

Endi jadvalni yozamiz:

			2	5	1
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	1	1/3	1	4/3	0
$a^{(3)}$	1	2/3	0	1/3	1
	5		2	3	1
			0	−2	0

Oxirgi satrda bitta manfiy son bor. Demak, $x^{(2)}$ bazis reja yechim emas.

6.5-§. Bir simpleks-jadvaldan ikkinchisiga o'tish

Biz simpleks-jadvalning tuzilishi va qanday to'ldirilishi bilan tanishdik. Muayyan misollarda jadvalni to'ldirdik. Hisob-kitoblar soddaroq bo'lsin deb, n=3, k=2 bo'lgan hollarni ko'rdik. Aslida mulohazalar ixtiyoriy n va k, $n>k$ lar uchun ham to'g'riligi ma'lum. Agar jadvalning oxirgi satrida bitta yoki bir necha manfiy sonlar bor bo'lsa, unda tekshirilayotgan bazis reja optimal bo'lmaydi. Ammo bu masalaning optimal yechimi mavjud emasligini tasdiqlamaydi. Bu holda optimal yechim mavjud bo'lishi ham, mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Demak, mulohazalarni davom ettirish lozim bo'ladi. Djon Dansig bunday hollarda yangi simpleks-jadvalga o'tish, shu bilan birga yangi bazis reja topish qoidasini tavsiya etgan. Shu qoidani (uni *to'g'ri to'rtburchaklar qoidasi* deb yuritiladi) qisqacha, ayrim tasdiqlarni isbotsiz bayon etamiz va qator misollar ko'ramiz. Bunda hisob-kitoblar faqat birinchi simpleks-jadvaldagi ma'lumotlardan foydalanib olib boriladi. Bu ham simpleks-usulning afzalliklaridan hisoblanadi.

Birinchi simpleks-jadvalning oxirgi satrida bitta yoki bir nechta manfiy sonlar bor bo'lsin. Manfiy sonlar faqat bitta bo'lsa, o'sha son turgan ustunni j_0 deb belgilaymiz va uni hal qiluvchi ustun deb ataymiz. Agar oxirgi satrda bir necha manfiy sonlar turgan bo'lsa, ularning ichida moduli eng kichigini olamiz va shu son turgan ustunni yana j_0 deb belgilaymiz, u ham hal qiluvchi ustun bo'ladi. Agar j_0 ustun elementlari manfiy bo'lsa, masala yechimga ega bo'lmaydi. Shu ustun elementlari ichida kamida bittasi musbat bo'lsin, ba'zilari nolga teng bo'lishi ham mumkin. Simpleks-jadvalga θ deb belgilagan ustun qo'shamiz. Shu ustun elementlari ushbu

$$\theta_i = \frac{x_i}{x_{i j_0}}, \quad i=1,2,\dots,k$$

formula bilan topiladi, unda $x_1, x_2, \dots, x_k$ lar bazis koordinatalar, $x_{i j_0}$, $i=1,2,\dots,k$ – j_0– ustun elementlari. Ravshanki, $x_i > 0$, $i = \overline{1,k}$. Agar $x_{i j_0}=0$ bo'lsa, θ_{i_k} – mavjud emas. Bu holda θ ustunning i_k elementi o'rniga tire (–) qo'yamiz. Faraz bo'yicha $x_{i j_0}$ lar ichida musbatlari bor. Shuning uchun θ_i lar ichida ***musbatlarini*** olib, eng kichigini θ_0 deb belgilaymiz. Shu son i_0-satrda turgan bo'lsa, i_0-satr va j_0-ustunlarning kesishgan nuqtasida $x_{i_0 j_0}$ son turgan bo'ladi. $x_{i_0 j_0}$ ni hal qiluvchi element, $i_0$satrni hal qiluvchi satr deyiladi. Uni $\langle x_{i_0 j_0} \rangle$ kabi o'rab qo'yiladi.

x_{ij_0} ga $a^{(j_0)}$, x_{i_0j} ga $a^{(i_0)}$ shart vektorlari to‘g‘ri keladi. $a^{(j_0)}$ ning tagiga $\Uparrow$, x_{i_0j} ga mos $a^{(i_0)}$ ning yoniga $\Rightarrow$ belgi qo‘yamiz. Demak, bazis vektorlardan $a^{(j_0)}$ o‘rniga $a^{(i_0)}$ keladi.

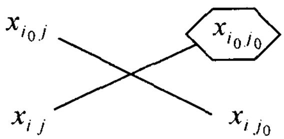
Yangi simpleks-jadval ustunlari quyidagicha topiladi:

$$\left(x_{i_0j}\right)_{\text{yangi}}=\frac{x_{i_0j}}{x_{ij_0}},\quad j=1,2,\dots,n,\quad j\neq j_0.$$

$$\left(x_{ij}\right)_{\text{yangi}}=x_{ij}-\frac{x_{ij_0}\cdot x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}},\quad i\neq i_0,\quad j=1,2,\dots,n,\quad j\neq j_0.$$

$$\left(x_{ij_0}\right)_{\text{yangi}}=0,\quad i\neq i_0,\quad j\neq j_0,\quad \left(x_{i_0j_0}\right)_{\text{yangi}}=1,$$

Bunda $\left(x_{ij}\right)_{\text{yangi}}$ quyidagi “to‘g‘ri to‘rtburchaklar qoidasi” bo‘yicha hisoblanadi:



$$\boxed{x_{ij}-\frac{x_{ij_0}\cdot x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}}}$$

Yangi bazis reja koordinatalarini hisoblash uchun ham shu qoidadan foydalanish mumkin. Shu qoida yordamida bir bazis rejadan ikkinchisiga, bir simpleks-jadvaldan ikkinchisiga o‘tish *simpleks-iteratsiya* deyiladi. Bazis rejalar soni chekli bo‘lgani uchun simpleks-iteratsiyalar soni chegaralangan bo‘ladi. Bazis rejalar soni quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$Q\leq\sum_{s=1}^{k}c_n^s,\quad \text{bunda}\quad c_n^s=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-s-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot s}.$$

Mazkur tengsizlik bazis rejaning musbat koordinatalari soni $s\leq k$ ga mos shart vektorlari $a^{(1)}, a^{(2)},\dots, a^{(s)}$ ning chiziqli erkliligi va buzilmagan joiz vektor aniq k ta musbat koordinatalarga ega ekanligidan kelib chiqadi.

Endi misollar ko‘ramiz. 6.3-§da ko‘rilgan misollarda oxirgi satrda bittadan manfiy son bor bo'lgan hollarni ko'rib chiqamiz va shu misollarda yangi jadvalga o'tish qoidalarini namoyish etamiz.

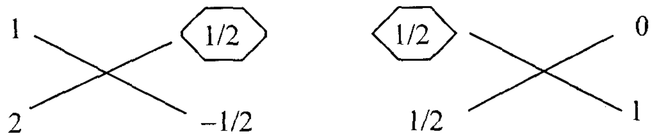
Avval 1-misoldagi $x^{(1)}$ bazis reja uchun tuzilgan simpleks-jadvalni eslaylik.

			-3	2	5		
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	θ	
$a^{(2)}$	-3	1	1	$\langle 1/2 \rangle$	0	2	$\Rightarrow$
$a^{(3)}$	5	2	0	$-1/2$	1	-4	
	7		-3	-4	5		
			0	-6	0		
				$\Uparrow$			

Jadvaldagi -6 turgan ustun hal qiluvchi ustun bo'ladi, unga $\Uparrow$ belgini qo'yamiz. Shu ustun elementlari $1/2$ va $-1/2$. Bittasi musbat. Demak, mulohazalarni davom ettirish kerak. Ustunlar yoniga yana bitta θ bilan belgilangan ustunni qo'yamiz. Uning elementlari $x_Б$ turgan ustun elementlarini mos ravishda $a^{(2)}$ ustun elementlariga bo'lishdan hosil bo'ladi, ya'ni $1:\frac{1}{2}=2,\ 2:\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$. Demak, θ ustunda musbat son (ya'ni 2) bor. Shu son qarshisiga $\Rightarrow$ belgini qo'yamiz, u birinchi satrda joylashgan. Shu satr hal qiluvchi satr bo'ladi. Hal qiluvchi satr va ustunlar kesishgan nuqtasida $\langle 1/2 \rangle$ son turibdi, uni $1/2$ kabi o'rab qo'yamiz. Shu son hal qiluvchi element bo'ladi. Ana endi yangi simpleks-jadvalga o'tish mumkin. Ushbu $\Uparrow$, $\Rightarrow$ belgilar ko'rsatadiki, $a^{(1)}$ shart vektori jadvaldan chiqib ketadi, uning o'rniga $a^{(2)}$ shart vektori kiradi. Eski $A_Б$, $c_Б$, $x_Б$ lar o'rniga yangi $\bar{A}_Б$, $\bar{c}_Б$, $\bar{x}_Б$ lar keladi: $\bar{c}_Б=(2,\ 3)$, $\bar{A}_Б=(a^{(2)},\ a^{(3)})$.

			-3	2	5
$\bar{A}_Б$	$\bar{c}_Б$	$\bar{x}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	2	2	2	1	0
$a^{(3)}$	5	3	1	0	1
	19		9	2	5
			12	0	0

Jadvalda yangi kirgan satr elementlari chiqib ketgan satr elementlarini hal qiluvchi elementga bo‘lishdan hosil bo‘ladi. Bizning holda dastlabki jadvalning $a^{(1)}$ turgan satr elementlarini 1/2ga bo‘lib chiqamiz va yangi jadvalga joylashtiramiz. Yangi jadvaldan qolgan satr elementlari *to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli* bilan topiladi. Jumladan $\overline{x}_Б$ning ikkinchi koordinatasi, ya’ni $\overline{x}_3$ eski jadvaldagi ushbu sonlardan hosil bo‘ladi: $2-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}=3$.



$a^{(3)}$ satr va $a^{(1)}$ ustunlar kesishgan nuqtasida joylashgan son to‘rtburchakdan topiladi: $1-0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}=1$. Shuni jadvalga yozamiz. Natijada kerakli satrlar to‘ldiriladi. Endi $\overline{c}'_Б=(2,\ 5)$ ustunni qolgan ustunlarga skalyar ko‘paytirib keyin satrga joylashtiramiz. Shu satr elementlaridan mos ravishda −3, 2, 5 larni ayirsak, oxirgi satrda 12,0,0 sonlar hosil bo‘ladi. Ular nomanfiy. Demak, yangi $\overline{x'_Б}=(0,2,3)$ bazis reja masalaning yechimi bo‘ladi va $f(\overline{x})=19$.

Endi 6.3-§dagi misollardan ikkinchisiga taalluqli simpleks-jadvalni eslaylik. Unda $x^{(2)}$ga ko‘ra tuzilgan simpleks-jadval quyidagicha edi:

			2	5	1		
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	θ	
$a^{(2)}$	2	1/3	1	4/3	0	1/4	⇒
$a^{(3)}$	1	1/3	0	1/3	1	1	
	5		2	3	1		
			0	−2	0		
				⇑			

Sodda hisoblar ko'rsatadiki, $a^{(2)}$ — hal qiluvchi ustun, $a^{(1)}$— hal qiluvchi satr, 4/3 — hal qiluvchi element bo'ladi. Jadvaldan $a^{(1)}$ turgan satr chiqib ketadi, o'rniga $a^{(2)}$ kiradi. Demak, $\overline{A}_Б = (a^{(2)}, a^{(3)})$, $\overline{c}'_Б = (5, 1)$, bo'ladi. $\overline{x}_Б$ — yangi bazis rejaning koordinatalari avvalgi misoldagi kabi topiladi. Quyida to'ldirilgan jadvalni keltiramiz:

			2	5	1
$\overline{A}_Б$	$\overline{c}_Б$	$\overline{x}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	5	1	3/4	1	0
$a^{(3)}$	1	2	−1/4	0	1
	7		7/2	5	1
			3/2	0	0

$$\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}:\frac{4}{3}=2, \quad 0-1\cdot\frac{1}{3}:\frac{4}{3}=-\frac{1}{4}.$$

Ko'rinadiki, oxirgi satr elementlari nomanfiy: 3/2, 0, 0. Demak, $\overline{x}' = (0, 1, 2)$ — bazis reja optimal va $f(\overline{x}) = 7$.

6.6-§. Dastlabki bazis rejani topishning ba'zi usullari

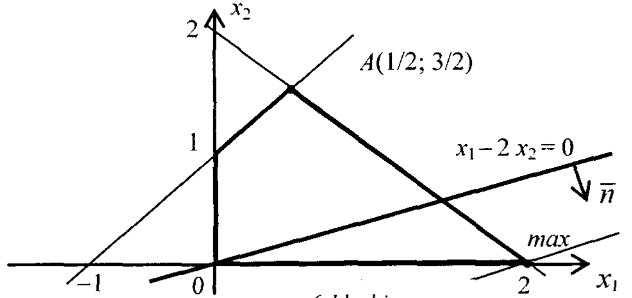
1. Normal masalani kanonik masalaga keltirishdan foydalanish usuli

Agar masala normal ko'rinishda berilgan bo'lsa, 6.3-§da uni yangi o'zgaruvchilar kiritish yordamida kanonik ko'rinishga keltirish va shu bilan birga dastlabki bazis rejani topib olish mumkinligini qayd qilib o'tgan edik. Endi muayyan masalalar uchun dastlabki bazis rejani topib, so'ngra simpleks-jadval yordamida yechimni topishni namoyish qilamiz.

1-misol. Jarayonning matematik modeli ushbu

$$\left.\begin{array}{l} f = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}\right\}$$

munosabatlar bilan berilgan bo'lsin. Bu ikki o'zgaruvchili normal masala. Uni avval geometrik usul bilan yechamiz. Uning uchun tengsizliklar bilan berilgan sohani chizib olamiz, so'ngra koordinata boshidan o'tadigan sath to'g'ri chizig'ini chizib, normalini aniqlaymiz. Shu normal bo'yicha sath to'g'ri chizig'ini parallel siljitib, u bilan oxirgi umumiy nuqtani topamiz. Shu nuqta masalaning yechimi bo'ladi (6.11-chizma).



6.11-chizma

Sodda mulohaza-hisoblashlar ko'rsatadiki, masalaning yechimi (2; 0).

Endi berilgan normal masaladan kanonik masalaga o'tamiz:

$$\left.\begin{array}{l} f_*(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to \max, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{array}\right\} \quad (6.13)$$

(6.13) masala uchun

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ravshanki, $x^{(0)\prime}=(0,\ 0,\ 1,\ 2)$ reja (6.13)dagi sistemani qanoatlantiradi, $n=4$, $k=2$, $n-k=2$. $x^{(0)}$ning 2 ta koordinatasi nolga teng, $a^{(3)}$ va $a^{(4)}$ shart vektorlari esa bazis vektorlar, chunki $\left| a^{(3)}, a^{(4)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Demak, $x^{(0)}$ bazis reja bo'ladi. Hisob-kitoblarni shu reja uchun bajaramiz. Simpleks-jadval tuzamiz:

			1	−2	0	0	
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	θ
$a^{(2)}$	0	1	−1	1	1	0	−1
$a^{(3)}$	0	2	1	1	0	1	2
	0		0	0	0	0	
			−1	2	0	0	

$\Rightarrow$

$\Uparrow$

$$A_Б = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_Б^{-1}, \quad A_Б^{-1} a^{(1)} = a^{(1)}, \quad A_Б^{-1} a^{(2)} = a^{(2)}.$$

			1	−2	0	0
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$
$a^{(2)}$	0	3	0	2	1	1
$a^{(3)}$	1	2	1	1	0	1
	2		1	1	0	1
			0	3	0	1

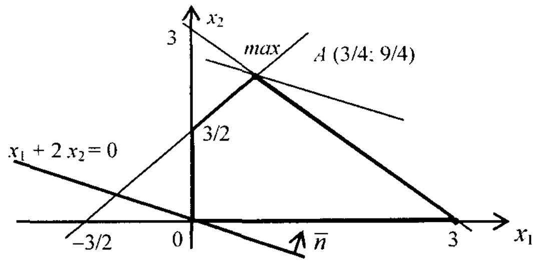
Ko‘rinadiki, oxirgi satrda nomanfiy sonlar turibdi. Shuning uchun (6.13) masalaning yechimi $(2;0;3;0)'$ vektordan iborat bo‘ladi. Undan dastlabki normal masalaning yechimi $(2;0)'$ ekani kelib chiqadi. Bu natija geometrik usul bilan olingan natija bilan ustma-ust tushadi.

2-misol. Quyidagi normal masalani ko‘raylik:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{array}\right\}$$

Berilgan tengsizliklar bilan tavsiflanadigan sohani chizamiz (6.12-chizma). Ravshanki, $n = 2$.

Sodda mulohaza va hisob-kitoblar ko‘rsatadiki, maqsad funksiyasi $A(3/4, 9/4)$ nuqtada maksimumga erishadi va $f_{\max} = f(3/4, 9/4) = 21/4$ bo‘ladi.



6.12-chizma

Endi shu normal masalaga mos kanonik masalani yozamiz:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to \max, \\ -2x_1 + 2x_2 + \quad x_3 + 0\cdot x_4 = 3, \\ \quad x_1 + \ x_2 + 0\cdot x_3 + \quad x_4 = 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{array}\right\} \quad (6.14)$$

Shu (6.14) masala uchun n=4, k=2, $n-k$=2,

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad s' = (1,2,0,0).$$

Ushbu $x^{(0)'}$=(0,0,3,3) rejani ko‘ramiz. U joiz reja, hatto bazis reja ham, chunki $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ shart vektorlari chiziqli erkli va 2 ta koordinatasi nolga teng. Demak, $A_Б = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Shuning uchun $A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_Б^{-1} a^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_Б^{-1} a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Simpleks-jadval tuzish uchun kerakli ma’lumotlar tayyorlandi.

Jadvalni yozamiz:

			1	−2	0	0		
$A_Б$	$c_Б$	$x_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	θ	
$a^{(3)}$	0	3	−2	2	1	0	−7/2	
$a^{(4)}$	0	3	$\boxed{1}$	1	0	1	3	⇒
	0		0	0	0	0		
			−1	−2	0	0		
			⇑					

$$A_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\text{Б}}^{-1}, \quad A_{\text{Б}}^{-1} a^{(1)} = a^{(1)}, \; A_{\text{Б}}^{-1} a^{(2)} = a^{(2)}.$$

			1	−2	0	0		
$\bar{A}_{\text{Б}}$	$\bar{c}_{\text{Б}}$	$\bar{x}_{\text{Б}}$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	θ	
$a^{(3)}$	0	9	0	$\boxed{4}$	1	2	9/4	⇒
$a^{(1)}$	1	3	1	1	0	1	3	
	3		1	1	0	1		
			0	−1	0	1		
				⇑				

			1	−2	0	0
$\bar{\bar{A}}_{\text{Б}}$	$\bar{\bar{c}}_{\text{Б}}$	$\bar{\bar{x}}_{\text{Б}}$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$
$a^{(2)}$	2	9/4	0	1	1/4	1/2
$a^{(1)}$	1	3/4	1	0	−1/4	1/2
	21/4		1	2	1/4	3/2
			0	0	1/4	3/2

Oxirgi jadvalning oxirgi satri nomanfiy sonlardan tashkil topgan. Demak, $x^{(0)\prime}=(3/4,9/4,0,0)$ bazis reja (6.14) kanonik masalaning yechimi. Unday bo'lsa, $(x_1, x_2)=(3/4, 9/4)$ reja dastlabki normal masalaning yechimi bo'ladi. Bu natija geometrik usul yordamida topilgan natija bilan ustma-ust tushadi.

2. Sun'iy bazis usuli

Agar bizga berilgan masala kanonik ko'rinishda bo'lsa, dastlabki rejani topishning usullari mavjud. Ular ichida sun'iy bazis usuli muhim ahamiyat kasb etadi. U tushunish uchun juda oson.

Asosiy g'oyasi dastlabki masalani yechish jarayonini 2 fazada amalga oshirishdan iborat. Birinchi fazada yordamchi masala qo'yiladi. Uni yechish uchun simpleks-usul qo'llanadi va dastlabki bazis reja topiladi. So'ngra ikkinchi fazada berilgan kanonik masalani yechish shu topilgan bazis rejadan foydalanib amalga oshiriladi. Shu usulni qisqacha bayon etaylik.

1-fazada ushbu

$$-\sum_{i=n+1}^{n+k} x_i \to \max, \tag{6.15}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}\,x_2 + \ldots + a_{kn}\,x_n + x_{n+k} = b_k, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n+k} \end{array}\right\} \tag{6.16}$$

masalani ko'ramiz. Unda $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$ o'zgaruvchilar yordamchi (sun'iy) o'zgaruvchilardir. Quyidagi tasdiq o'rinli.

6.3-teorema. Dastlabki $c' \cdot x \to \max$, $Ax = b$, $x \ge 0$ masala joiz rejalari to'plami P_k bo'sh bo'lmasligi uchun (6.15), (6.16) masalaning yechimida ushbu

$$-\sum_{i=n+1}^{n+k} x_i = 0 \tag{6.17}$$

tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Zarurligi. Agar x^0 joiz reja (K) masalaning yechimi bo'lsa, $\bar{x} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0 = 0, x_{n+2}^0 = 0, \ldots, x_{n+k}^0 = 0)'$ vektor (6.15), (6.16) masalaning yechimi bo'ladi. Shu vektor (6.17) tenglikni qanoatlantiradi. (6.15), (6.16) ning ixtiyoriy yechimida $-\sum_{i=n+1}^{n+k} x_i \le 0$ bo'ladi.

Yetarliligi. Ravshanki, agar $\bar{x}$ vektor (6.15), (6.16) masalaning yechimi, u holda $(x_{n+2}^0 = 0, \ldots, x_{n+k}^0 = 0)$ vektor ham o'z navbatida (K) masalaning yechimi bo'ladi. *Teorema isbot bo'ldi.*

(6.15), (6.16) masalani simpleks-usul bilan yechish jarayoni *birinchi faza* deyiladi, masalaning o'zi esa birinchi faza masalasi deb yuritiladi.

Birinchi faza masalasini yechishda 3 hol yuz berishi mumkin:

1^0. Yechimda sun'iy o'zgaruvchilar orasida noldan farqlilari bor.

2^0. Barcha sun'iy o'zgaruvchilar nolga teng va mos bazis vektorlar ichida sun'iy o'zgaruvchilarga mos shart vektorlari yo'q.

3^0. Barcha sun'iy o'zgaruvchilar nolga teng, ammo mos bazis vektorlar ichida sun'iy o'zgaruvchilarga mos shart vektorlari bor.

1^0-holda 6.2-teoremaga ko'ra dastlabki masalaning yechimi mavjud emas. 2^0-holda dastlabki masalaning yechimi mavjud. 3^0-holda esa sun'iy bazis usuldan foydalanib bo'lmaydi, ammo bu dastlabki masala yechimga ega emasligini anglatmaydi. Shu holda quyidagicha ish ko'ramiz. Bazis vektorlar ichida sun'iy o'zgaruvchilarga mos keluvchi vektorlar bor. Ulardan qutilish maqsadida hal qiluvchi satr sifatida x_{n+k} o'zgaruvchiga mos satrni, hal qiluvchi ustun sifatida bazisga kirmagan x_{n+k}, $j \neq 0$ koordinataga mos keluvchi $a^{(j)}$, $j \leq n$ vektorni olamiz. Simpleks-usul to'liq qo'llanilgandan keyin jadvalning oxirgi satri o'zgarmaydi, shuningdek b ustun ham o'zgarishsiz qoladi. Faqat endi x_{n+k} o'rniga $x_j = 0$, $j \leq n$ o'zgaruvchi paydo bo'ladi. Bu jarayon bazis vektorlar orasidan barcha sun'iy o'zgaruvchilarga mos vektorlarni yo'qotish bilan yoki qolgan barcha $x_{n+k}, k = k_1, k_2, \dots, k_s$ o'zgaruvchilar uchun $x_{n+k,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$, $k = k_1, k_2, \dots, k_s$ natijani olish bilan yakunlanadi. Birinchi holda masalani yechish uchun ikkinchi fazaga o'tamiz. Ikkinchi holda esa masalaga mos chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalari orasida bog'lanish borligi ma'lum bo'ladi. Bunda s ta chiziqli bog'liq satrlarni o'chirib, ikkinchi fazani qolgan k–s ta bazis vektorlar uchun davom ettiramiz.

3. M-metod haqida

Sun'iy bazis usuli, ko'rdikki, 2 fazali usul. Nihoyasida dastlabki kanonik masalani simpleks-usul bilan yechish uchun boshlang'ich bazis reja topiladi. Umuman, bu ikki fazani birlashtirish iloji yo'qmi? – degan savolga AQSH olimi Charnes 1966-yilda javob bergan. U kashf etgan usul M-usul deb ataladi. Mazkur usul g'oyasi dastlabki kanonik masala o'rniga quyidagi masalani qarashdan iborat:

$$\begin{cases} c'\cdot x + M\cdot\sum\limits_{i=1}^{k} x_{n+i} \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1, n+k}. \end{cases}$$

Bunda M – yetarli darajada katta qilib olsa bo‘ladigan musbat son. Masalani simpleks-usul bilan yechganda M son parametr sifatida qatnashadi, ammo masalaning yechimi bevosita M ga bog‘liq bo‘lmaydi. Biz mazkur usulni mustaqil o‘rganish uchun talabaga qoldiramiz.

Quyida 2 fazali usulga doir 2 ta masala ko‘ramiz:

1. $\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{array}\right\}$ yoki $\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{array}\right\}$.

Bu masalada $n = 3$, $k = 2$, $n - k = 1$,

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Keyingi mulohazalarni nazarda tutib, doim $b \ge 0$ tengsizlikka erishish mumkin. Uning $b < 0$ joylashgan satrini (tenglamani) -1 ga ko‘paytirish yetarli. Endi 1-*faza* masalasini tuzamiz va simpleks-usul bilan yechamiz:

$$\left.\begin{array}{l} f_* = -x_4 - x_5 \to \max, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 0\cdot x_5 = 7, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 - x_5 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1{,}5 \end{array}\right\}\ a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$a^{(3)}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\quad a^{(4)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad a^{(5)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

c'=(0, 0, 0, −1, −1). Tekshirish qiyinmaski, x'_*=(0, 0, 0, 7, 1) reja joiz reja, hatto bazis reja ham. Shu reja yordamchi masala uchun boshlang'ich reja bo'ladi. Simpleks-usulni qo'llaymiz.

			1	0	0	−1	−1	
$A_Б$	$C_Б$	$X_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$a^{(5)}$	θ
$a^{(4)}$	−1	7	1	−1	3	1	0	7/3
$a^{(5)}$	−1	1	−1	−1	1	0	1	1 ⇒
	−8		0	2	−4	−1	−1	
			0	2	−4	0	0	

⇑

			1	0	0	−1	−1	
$\bar{A}_Б$	$\bar{c}_Б$	$\bar{x}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$a^{(5)}$	θ
$a^{(4)}$	−1	4	4	2	0	1	−3	4 ⇒
$a^{(3)}$	0	1	−1	−1	1	0	1	–
	−4		−4	−2	0	−1	3	
			−4	−2	0	0	4	

⇑

			1	0	0	−1	−1
$\bar{\bar{A}}_Б$	$\bar{\bar{c}}_Б$	$\bar{\bar{x}}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$a^{(5)}$
$a^{(2)}$	0	2	2	1	0	1/2	−3/5
$a^{(3)}$	0	3	1	0	1	1/2	−1/2
	0		0	0	0	0	0
			0	0	0	1	1

Oxirgi jadvaldan yordamchi masala yechimi $\tilde{x}'$=(0,2,3,0) ga ko'ra dastlabki masala uchun boshlang'ich ba'zis reja $x^{(0)'}$=(0,2,3) ekani kelib chiqadi.

Endi 2-fazaga o'tamiz.

Dastlabki masalani boshlang'ich $x^{(0)\prime}=(0,2,3)$ bazis vektor-reja uchun yechamiz: ravshanki, $c'=(-3,2,5)$, $c'_{Б}=(2,5)$, $c'_{Н}=\{-3\}$,

$$x'_{Б}=(2,\ 3),\quad A_{Б}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ |A_{Б}|=2,\ A_{Б}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ A_{Б}^{-1}a^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Simpleks-jadvalni tuzamiz.

			-3	2	5
$A_{Б}$	$C_{Б}$	$X_{Б}$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	2	2	2	1	0
$a^{(3)}$	5	3	1	0	1
	19		9	2	5
			12	0	0

Bundan $x^{(0)\prime}=(0,2,3)$ reja dastlabki masala yechimi ekani kelib chiqadi.

2. $$\left.\begin{aligned} & f=2x_1+5x_2+x_3\to\max\\ & 2x_1+3x_2+x_3=5,\\ & x_1+2x_2+2x_3=6,\\ & x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{aligned}\right\}\qquad (K)$$

Bu masalada $n=3$, $k=2$, $n-k=1$,

$$a^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},\ a^{(2)}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix},\ a^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}.$$

1-*faza*.
$$\left.\begin{aligned} & f_*=-x_4-x_5\to\max\\ & 2x_1+3x_2+x_3+x_4+0\cdot x_5=5,\\ & x_1+2x_2+2x_3+0\cdot x_4+x_5=6,\\ & x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}\end{aligned}\right\}$$

Bunda $a^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ a^{(2)}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ a^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ a^{(4)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ a^{(5)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

Tekshirish qiyinmaski $c'=(0, 0, 0, -1, -1)$ va $x'_*=(0, 0, 0, 5, 6)$ – bazis rejadir. Endi 1-fazaga tegishli simpleks-jadvalni tuzamiz:

			0	0	0	−1	−1		
$A_Б$	$C_Б$	$X_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$a^{(5)}$	θ	
$a^{(4)}$	−1	5	2	3	2	1	0	5	
$a^{(5)}$	−1	6	1	2	$\boxed{2}$	0	1	3	$\Rightarrow$
	−11		−3	−5	−3	−1	−1		
			−3	−5	−3	0	0		
					$\Uparrow$				

			0	0	0	−1	−1		
$\bar{A}_Б$	$\bar{c}_Б$	$\bar{x}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$a^{(5)}$	θ	
$a^{(4)}$	−1	2	$\boxed{3/2}$	2	0	1	7/2	4/3	$\Rightarrow$
$a^{(3)}$	0	3	1/2	1	1	0	1/2	6	
	−2		−3/2	−2	0	−1	−7/2		
			−3/2	−2	0	0	−3/2		
			$\Uparrow$						

			0	0	0	−1	−1
$\bar{\bar{A}}_Б$	$\bar{\bar{c}}_Б$	$\bar{\bar{x}}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$a^{(5)}$
$a^{(1)}$	0	4/3	1	4/3	0	2/3	7/3
$a^{(3)}$	0	7/3	0	1/3	1	−1/3	−7/3
	0		0	0	0	0	0
			0	0	0	1	1

Jadvalning oxirgi satrida nomanfiy sonlar turibdi. Demak, $x'_*=(4/3, 0, 7/3, 0, 0)$ reja 1-fazada ko'rilayotgan yordamchi masalaning yechimi bo'ladi. Unday bo'lsa, $x^{(0)'}=(4/3,0,7/3)$ bazis reja, dastlabki masala uchun boshlang'ich reja bo'ladi.

Endi asosiy masalani yechishga o'tamiz.

2-*faza*.
$$\left.\begin{array}{l} f=2x_1+5x_2+x_3\to\max \\ 2x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+2x_2+2x_3=6, \\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3. \end{array}\right\}$$

Bunda $c'=(2, 5, 1)$, $x^{(0)'}=(4/3,0,7/3)$, $x'_Б=(4/3, 7/3)$, $x_Н=\{0\}$,

$$A_Б=(a^{(1)},a^{(2)})=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ |A_Б|=3,\ A_Б^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ A_Б^{-1}a^{(2)}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Simpleks-jadvalni tuzamiz:

			2	5	1	
$A_Б$	$C_Б$	$X_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	θ
$a^{(4)}$	2	4/3	1	4/3	0	1 ⇒
$a^{(5)}$	1	7/3	0	1/3	1	7
	5		2	3	1	
			0	–2	–3	
				⇑		

			2	5	1
$\overline{A}_Б$	$\overline{c}_Б$	$\overline{x}_Б$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$
$a^{(2)}$	5	1	3/4	1	0
$a^{(3)}$	1	2	–1/4	0	1
	7		7/2	5	1
			3/2	0	0

Ko'rinib turibdiki, jadvalning oxirgi satrida faqat nomanfiy sonl hosil bo'ldi. Demak, yetarlilik sharti bajarildi. Shuning uchu $x^{(0)'}=(0,1,2)$ bazis reja dastlabki masalaning yechimi bo'ladi.

6.7-§. Chiziqli dasturlashning qovushma masalalari [1]

Biz chiziqli dasturlashning kanonik (K) va normal (N) masalalarini o'rgandik. (N) masala uchun qovushma masala tushunchasini kiritamiz. Agar (N) masala an'anaviy

$$\left.\begin{aligned} c'\cdot x &\to \max, \\ Ax &\le b, \\ x &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (N)$$

ko'rinishda yozilgan bo'lsa, unga mos ushbu

$$\left.\begin{aligned} b'\cdot y &\to \min, \\ A'y &\ge c, \\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (Q)$$

masala (K) masalaga *qovushma masala* (Q) deyiladi.

Agar masala kanonik (K) ko'rinishda bo'lsa, uni avval normal (N) ko'rinishga keltirib olish kerak, so'ngra unga mos qovushma masala yoziladi. Faraz etaylik, kanonik masala berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} c'\cdot x &\to \max, \\ Ax &= b, \\ x &\ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

Shu masalaga mos normal masala quyidagi ko'rinishga ega:

$$\left.\begin{aligned} c'\cdot x &\to \max, \\ Ax &\le b, \\ -Ax &\le -b, \\ x &\ge 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{yoki} \quad \left.\begin{aligned} c'\cdot x &\to \max, \\ \overline{A}x &\le \overline{b}, \\ x &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

bunda $\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$

Endi shu (N) masalaga mos qovushma masalani yozish mumkin:

---
[1] qovushma masalalar – двойственные задачи.

$$\left.\begin{aligned} \bar{b}' \cdot \bar{y} &\to \min, \\ \bar{A}'\, \bar{y} &\geq c, \\ \bar{y} &\geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\bar{Q})$$

Bunda $\bar{y}' = (y_1, y_2)$ -2 k o‘lchovli vektor, har bir y_1, y_2 lar k o‘lchovli. $(\bar{Q})$ masalani yoyib yozsak,

$$\left.\begin{aligned} b' \cdot y_1 - b' \cdot y_2 &\to \min, \\ \bar{A}'\, \bar{y}_1 - \bar{A}'\, \bar{y}_2 &\geq c, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}\right\}$$

Agar $y_1 - y_2 = y$ deb belgilasak, oxirgi masalani ushbu

$$\left.\begin{aligned} b' \cdot y &\to \min, \\ A'\, y &\geq c \end{aligned}\right\}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Unda $y \geq 0$ deb yozilmagan, chunki $y = y_1 - y_2$ ifoda musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin.

Yuqorida bayon etilgan (N) va (Q) masalalar shartli ravishda teng kuchli deyish mumkin.

Chiziqli dasturlashning qovushma masalalari haqida quyidagi tasdiqlarni keltiramiz:

6.1-lemma. Agar x va y vektorlar mos ravishda asosiy (N) va qovushma (Q) masalalarning joiz rejalari bo‘lsa, ular uchun $c'x \leq b'y$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Asosiy $x \geq 0$, $Ax \leq b$ munosabat ikki tomonini $y \geq 0$ ustun vektorga skalyar ko‘paytiramiz: Ax va b lar ustun bo‘lgani uchun ularni transponirlab, quyidagi

$$(Ax)' \cdot y \leq b'y \quad \text{yoki} \quad b' \cdot y \geq x' \cdot A' \cdot y \quad \text{yoki} \quad b' \cdot y \geq x' \cdot c = c' \cdot x$$

munosabatlarni hosil qilamiz. *Bu esa lemmani isbot etadi.*

6.2-lemma. Agar x^0 va y^0 vektorlar mos ravishda asosiy (N) va qovushma (Q) masalalarning joiz rejalari bo‘lib, $c' \cdot x^0 = b' \cdot y^0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, x^0 va y^0lar mos ravishda (N) va (Q) masalalarning yechimi bo‘ladi.

Isbot. 1-lemmaga ko'ra ixtiyoriy x va y rejalar uchun $c'\cdot x \le b'\cdot y$ tengsizlik o'rinli. Jumladan, $y = y^0$ da ham bu tengsizlik o'rinli, ya'ni $c'\cdot x \le b'\cdot y^0 = c'\cdot x^0$, ya'ni $c'\cdot x \le c'\cdot x^0$. Bundan x^0 reja (N) masalaning optimal yechimi ekani kelib chiqadi. Shunga o'xshash $c'\cdot x^0 \le b'\cdot y$, ya'ni $b'\cdot y^0 \le b'\cdot y$.

Bundan y^0 reja (Q) masalaning yechimi ekani ma'lum bo'ladi.

6.4-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining yechimi mavjud bo'lishi uchun asosiy va qovushma masalalar rejalari to'plamlari bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Faraz etaylik (N) masala x^0 yechimga ega bo'lsin. Demak, $P_N \ne \varnothing$. Endi qovushma masala (Q)ning ham hech bo'lmaganda bitta rejasi borligini isbot etamiz, ya'ni $P_Q \ne \varnothing$ ni ko'rsatamiz. (N) masala optimal rejasiga mos bazis matritsani $A_Б$ deb belgilaymiz va $y = c'_Б \cdot A_Б^{-1}$ vektorni topib olamiz. Bundan $A_Б^{-1}\cdot y = c_Б$ kelib chiqadi. Bu y vektor qovushma masala (Q) uchun reja ekanini bildiradi. Zaruriylik isbot etildi.

Yetarliligi. Faraz etaylik, $P_N \ne \varnothing$, $P_Q \ne \varnothing$ bo'lsin. U holda, ixtiyoriy $x \in P_N$, $y \in P_Q$ rejalar uchun 6.1-lemmaga ko'ra $c'\cdot x \le b'\cdot y$ tengsizlik o'rinli. Bundan asosiy masalaning maqsad funksiyasi $c'\cdot x$ yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi. Demak, optimal reja mavjud.

Teorema isbot bo'ldi.

Yana bitta muhim teorema keltiramiz.

6.5-teorema. Qovushma masala (Q) da $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ joiz reja optimal bo'lishi uchun b vektorning $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}$ shart bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasi koordinatalari nomanfiy bo'lishi zarur va yetarli.

(Isboti mustaqil ishlash uchun talabaga topshiriladi.)

6.8-§. Chiziqli dasturlashning tatbiqiy masalalari

Amaliy faoliyatda, ayniqsa, iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda, *ko'plab* masalalar modellari chiziqli dasturlash masalalari ko'rinishida tavsiflnadi. Biz ular ichidan bir nechtasini tanlab, ularning bayonini keltiramiz.

1. Diyeta masalasi. *Masalaning qo'yilishi*: Shunday ozuqa (ovqat) tayyorlash lozimki, unda n ta to'yimli moddalar (oqsil, vitaminlar, mineral tuzlar va boshqalar) bor bo'lishi kerak. Ular k ta turli mahsulotlar tarkibida har xil proporsiyada mavjud. Ularni xarid qilish rejalashtirilgan. Har bir mahsulotdan qanchadan olinsa, ozuqa narxi eng arzon (kam) bo'ladi?

Masalaning matematik modelini quramiz. Sotib olish mo'ljallangan j — mahsulot hajmini y_j, $y_j \geq 0$, $j=\overline{1,k}$ deb, tayyorlanadigan ozuqa albatta bo'lishi kerak bo'lgan i — ozuqa moddasi hajmini c_i deb, j — mahsulotning bir birligida bo'lishi kerak bo'lgan i — ozuqa moddasi hajmini a_{ji} deb belgilaymiz. j — mahsulot bir birligi narxi b_i bo'lsin.

Xarid qilingan j — mahsulotning y_j birligidagi i — ozuqa moddasi miqdori $y_j a_{ji}$ ga teng bo'ladi. Hamma xarid qilingan mahsulotlarda i — ozuqa moddasi miqdori $\sum_{j=1}^{k} y_j a_{ji}$ ga teng bo'ladi. Shart bo'yicha bu miqdor ozuqadagi i — ozuqa moddasining quyi chegarasi c_i dan kam bo'lmasligi kerak:

$$\sum_{j=1}^{k} y_j a_{ji} \geq c_i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{6.18}$$

bunda

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad y_k \geq 0. \tag{6.19}$$

Albatta, y_1, $y_2, \ldots,$ y_k larni shunday topish kerakki, ushbu

$$\sum_{j=1}^{k} b_i y_j \to \min \tag{6.20}$$

munosabat bajarilsin.

Yuqorida keltirilgan (6.18)–(6.20) munosabatlar diyeta masalasining matematik modelini tavsiflaydi. Quyilma, qorishmalar haqidagi va boshqa masalalar ana shunday masalalarga keltiriladi.

2. Ishlab chiqarish masalasi

Korxonada turli nomli buyumlar ishlab chiqariladi. Bunda har bir buyum turli texnologiyalar bo'yicha tayyorlanishi mumkin. Har bir buyumni tayyorlash turli resurslar (mehnatga xarajat, turli xomashyolar va b.) xarajatlari bilan bog'langan. Resurslar esa ma'lumki, chegaralangan. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar ularning nomlariga va ularning usuliga bog'langan narxga ega bo'ladi.

Zavod ishlab chiqargan umumiy mahsulotlari hajmi (narxi) maksimal bo'lishi uchun ishlab chiqarishni qanday tashkil qilish kerak?

Masalaning matematik modelini qurish uchun ba'zi belgilashlar kiritamiz.

x_{ij} – j – texnologiya bilan ishlab chiqarish rejalashtirilgan i – buyum miqdori; $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k}$. Shu x_{ij} miqdorda ishlab chiqarilgan buyumning 1birligini ishlab chiqarish uchun sarf etilgan k – resurs hajmini a_{ijs} deymiz ($s=\overline{1,l}$). k – tur resurslar b_k son bilan chegaralangan. j – texnologiya bilan tayyorlangan i – buyum bir-birligining bahosi c_{ij} bo'lsin. Fizik ma'nosi bo'yicha

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,k}. \tag{6.21}$$

Resurslarning chegaralanganligi ushbu

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{ijs} x_{ij} \leq b_s, \quad s=\overline{1,l} \tag{6.22}$$

tengsizlikka olib keladi. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi bahosi uchun ushbu

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \max \tag{6.23}$$

munosabat bajarilishi talab qilinadi.

Yuqorida chiqarilgan (6.21)–(6.23) munosabatlar ishlab chiqarish masalasining matematik modelini tavsiflaydi.

3. Transport masalasi. Bittagina nomli mahsulot k ta $A_1, A_2, \ldots, A_k$ korxonalarda ishlab chiqariladi va n ta $B_1, B_2, \ldots, B_n$ korxonalarda iste'mol qilinadi. A_i korxonada a_i birlik mahsulot ishlab chiqariladi. B_j korxonada b_j birlik mahsulot iste'mol qilinadi. Bunda balans sharti deb ataladigan

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i \tag{6.24}$$

tenglik bajariladi, deb faraz etiladi. Ma'nosi shuki mahsulotlarni tashish jarayonida yo'qotishlar ro'y bermaydi. A_i dan B_j ga bir birlik mahsulotni tashish bahosi c_{ij} deylik. A_i dan B_j ga tashiladigan yuk miqdori $x_{ij} \geq 0$ bo'lib, barcha yuklar A_i lardan tashib ketilgan bo'lsa,

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = a_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{6.25}$$

Barcha B_j korxonalarga kerakli hajmda mahsulotlar keltirilgan bo'lsa,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,k}. \tag{6.26}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar ushbu

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \tag{6.27}$$

munosabat bajarilsa, transport xarajatlari minimal bo'ladi.

Yuqoridagi (6.25)–(6.27) munosabatlar transport masalasining matematik modelidan iborat.

Agar balans sharti (6.24) bajarilsa model *yopiq* deyiladi. Agar (6.24) bajarilmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{k} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_i \qquad \text{yoki} \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_i$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, model *ochiq* deyiladi.

6.6-teorema. Yopiq turdagi transport masalasi yechimga ega bo'lishi uchun balans shartining bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. $\{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$ – optimal tashish rejasi bo'lsin. (6.25) va (6.26) munosabatlarda i– bo'yicha (yoki j– bo'yicha) yig'indi olamiz:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Demak, (6.24) bajarildi.

Yetarliligi. Endi (6.24) bajarilsin deylik. Unda ushbu

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i = \alpha > 0$$

belgi kiritamiz. Endi joiz rejalar to‘plami bo‘sh emasligini ko‘rsatamiz.

Yuk tashish rejasini, masalan, $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{\alpha}$ kabi tanlaylik. Ravshanki,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\alpha} = \frac{a_i}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} x_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i b_j}{\alpha} = \frac{b_j}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} a_i = b_j .$$

Bundan joiz rejalar to‘plami bo‘sh emasligi kelib chiqadi. Undan x_{ij}>0 va (6.24), (6.25)larga ko‘ra joiz rejalar to‘plami yopiq ekani ham kelib chiqadi. O‘sha to‘plam chegaralangan. Haqiqatan,

$$x_{ij} \le \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j < \sum_{j=1}^{k} b_j = \alpha > 0$$

Chegaralangan yopiq to‘plamda aniqlangan va uzluksiz $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$ funksiya o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi. Bundan (6.25)−(6.27) masala yechimga ega ekani kelib chiqadi. *Teorema isbot bo‘ldi.*

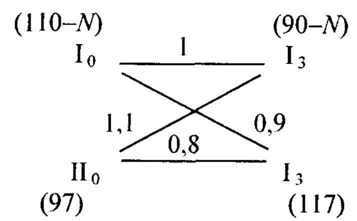
Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi natija kelib chiqadi:

Har qanday yopiq turdagi transport masalasi yechimga ega.

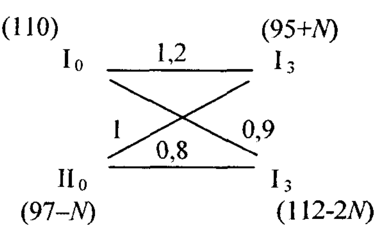
6-bobga oid masalalar

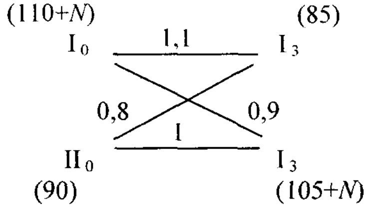
I. Quyidagi kanonik usulda berilgan masalalar elementar usul bilan yechilsin (unda N=1,2,3,...):

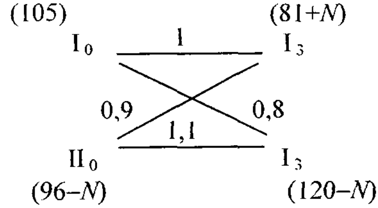
1.

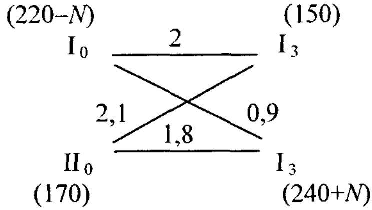


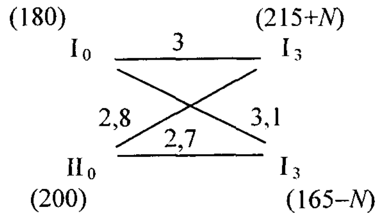
2.



3. 

4. 

5. 

6. 

II. Quyidagi ikki o'zgaruvchili normal masalalar geometrik usul bilan yechilsin (N=1,2,3,...):

1. $\left(\frac{N}{2}+5\right)\cdot x+y\to \max(\min)$, $x+\frac{y}{3}\le\frac{N}{2}$, $\frac{1}{2N}\le x\le\frac{3}{2N}$, $y\ge 0$.

2. $x-\frac{N+2}{3}y\to \max(\min)$, $\frac{x}{N+1}+\frac{y}{N}\le 1$, $\frac{N}{4}\le y\le\frac{3N}{4}$, $x\ge 0$.

3. $\left(1+\frac{N}{3}\right)x+y\to \max(\min)$, $2x+\frac{y}{5}\le N$, $N\le y\le 4N$, $x\ge 0$.

4. $3x-\frac{N+1}{2}y\to \max(\min)$, $\frac{x}{3N}+\frac{y}{2(N+1)}\le\frac{1}{6}$, $\frac{N}{8}\le x\le\frac{3N}{8}$, $y\ge 0$.

5. $\left(\frac{N}{4}+3\right)\cdot x+y\to \max(\min)$, $x+\frac{y}{2}\le\frac{N}{3}$, $\frac{N}{9}\le x\le\frac{2N}{9}$, $y\ge 0$.

6. $x-\frac{N+1}{3}y\to \max(\min)$, $\frac{x}{N}+\frac{y}{N+2}\le 1$, $\frac{N+2}{3}\le y\le\frac{N+2}{2}$, $x\ge 0$.

III. Quyidagi normal masalalarni yordamchi o'zgaruvchilar kiritib kanonik masalaga keltiring:

1. $x_1 + 2x_2 \to \max$, $x_1 - x_2 \le 1$, $x_2 + x_3 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

2. $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$, $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9$, $2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8$,

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7$, $x_1 \ge 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

3. $2x_1 + 5x_2 \to \max$, $2x_1 + 3x_2 \le 6$, $x_1 + 4x_2 \le 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 > 0$.

4. $x_1 - 10x_2 \to \min$, $2x_1 - x_2 \ge 0$, $x_1 - 5x_2 \ge -5$, $x_1 \ge 0$, $x_2 > 0$.

5. $3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \max$, $x_1 + 3x_2 \le 4$, $x_1 + 2x_3 \le 7$,

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12$, $x_1 \ge 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

6. $3x_1 + x_2 \to \max$, $-x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 + x_2 \le 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 > 0$.

IV. Quyidagi normal masalalarga olib keladigan iqtisodiy masalalarning matematik modeli qurilsin va geometrik usul bilan yechilsin.

1. A va B zavodlardan I, II va III omborlarga un tashish lozim. A zavodida barcha yukni 80 ta, B zavodida esa 120 ta mashinaga ortish mumkin. I ombor 55 ta, II ombor 75 ta, III ombor 70 ta mashinani qabul qila oladi. Bitta mashina zavoddan omborgacha masofani bosib o'tishi uchun sarf etadigan benzin miqdori (litrlarda) quyidagi jadvalda berilgan.

Zavodlar	Omborlar		
	I	II	III
A	3	2	4
B	4	2	3

Yuk tashishni qanday tashkil etilganda umumiy sarf etiladigan benzin miqdori minimal bo'ladi?

2. A va V zavodlardan I, II va III omborlarga un tashish lozim. A zavodida barcha yukni 80 ta, V zavodida esa 120 ta mashinaga ortish mumkin. I ombor 55 ta, II ombor 75 ta, III ombor 70 ta mashinani qabul qila oladi. Bitta mashina unni zavoddan omborgacha tashishdan keladigan foyda (so'mlarda) jadvalda berilgan:

Zavodlar	Omborlar		
	I	II	III
A	3	2	4
B	4	3	5

Yuk tashishni qanday tashkil etilganda umumiy sarf etiladigan benzin miqdori minimal bo'ladi?

3. 1-masalani ushbu jadval uchun yeching:

Zavodlar	Omborlar		
	I	II	III
A	3	2	4
B	4	3	6

4. 2-masalani ushbu jadval uchun yeching.

Zavodlar	Omborlar		
	I	II	III
A	3	2	4
B	4	3	6

5. Non mahsulotlari firmasi zaxirasida 250 kg 1-nav, 210 kg 2-nav un bor. Firma 2 turli non mahsuloti ishlab chiqaradi. Har bir mahsulot turi uchun har ikki nav undan foydalaniladi. Bir birlik mahsulot uchun sarf qilinadigan 1– va 2-nav un miqdori va olinadigan daromad miqdori jadvalda berilgan:

	I nav	II nav	Daromad	Qancha mahsulot
1	2	2	5 so'm	x
2	3	2	10 so'm	y
Zaxira	250	210	max	

Har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarilsa daromad maksimum bo'ladi?

6. 5-masalada non mahsulotlari totli bo'lishi uchun xamirga qo'shiladigan 70 so'mlik maxsus zaxira borki, undan bir birlik I tur mahsulotdan 7 so'm, II tur mahsulotdan 17 so'm daromad olinadi. Eng ko'p (maksimal) daromad olish uchun I va II tur mahsulotlardan qanchadan ishlab chiqarish lozim?

Ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot	I nav	II nav	Maxsus mahsulot	Daromad	Qancha i/ch kerak
I	2	3	0	7	x
II	3	2	1	14	y
Zaxira	250	210	70	max	

IV bo'lim masalalarining javoblari.

1. $f_* = 725$ litr
2. $f^* = 715$ so'm
3. $x + y = 10$, $f_* = 715$ litr
4. $x + y = 80$, $f^* = 785$ so'm
5. $x = 0$, $y = 83$, $f^* = 833,(3)$ so'm
6. $x = 20$, $y = 0$, $f^* = 1120$ so'm

Eslatma: Javoblarda f_*–minimumni, f^*–maksimumni anglatadi.

V. Chiziqli dasturlashning kanonik masalasida bazis reja optimal bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart quyidagi vektor-matritsali ko'rinishga ega edi:

$$c'_{\text{Б}} \cdot A_{\text{Б}}^{-1} \cdot A_{\text{Н}} - c'_{\text{Н}} \geq 0 \, .$$

Quyida qator kanonik masala va har biri uchun 1 yoki 2 tadan reja berilgan. Ularning joiz rejami yoki yo'qligi, bazis rejami yoki yo'qligi tekshirilsin. So'ngra, (6.2)-shart vektor-matritsali ko'rinishda (ularda o'lchovlar katta emas!) tekshirilsin:

1. $$\begin{cases} (N+1)x_1 + 5x_2 - (N+1)x_3 \to \max, \\ N x_1 + 4x_2 - x_3 = N, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2N, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 3N \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{3N}{N+1} \\ 0 \\ \dfrac{N(2N-1)}{N+1} \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{cases} (N+1)x_1 - x_2 + N x_3 \to \max, \\ -N x_1 - 3x_2 + 2x_3 = N, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = N, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{N}{4+N} \\ 0 \\ \dfrac{N(N+2)}{4+N} \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 2N \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \to \max, \\ -x_1 + \mathrm{N}x_2 + 2x_3 = 5N, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 2N - 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2N \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} N+2 \\ 0 \\ 3N+1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max, \\ Nx_1 - x_2 + 3x_3 = 7N, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 2N - 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N+9}{2} \\ \frac{5N+1}{2} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2N \end{pmatrix}.$

V bo‘limdagi 1–4-masalalarda N=1,2,3,.... vazifani umumiy holda ham, har bir N, N= 1, 2, 3,... uchun ham bajarish mumkin.

5. $\begin{cases} f = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{cases} f = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max, \\ -x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 = 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{cases} f = x_1 + 4x_2 - 7x_3 \to \max, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

VI. V bo'limdagi masalalar uchun berilgan bazis rejalar bo'yicha simpleks-jadval tuzilsin. Agar masala bitta jadvalda yechilmasa, yangi simpleks-jadvalga o'tib, simpleks-iteratsiya bajarilsin. Masalani yechish jarayoni oxiriga yetkazilsin.

VII. Quyidagi ikki o'zgaruvchili normal masalalar avval geometrik usul bilan yechilsin. So'ngra yordamchi o'zgaruvchilar kiritilib, kanonik masalaga keltirilsin. Shunda aniqlab olingan boshlang'ich bazis reja bo'yicha simpleks-usul qo'llanib, masala yechilsin:

1. $f = x_1 + x_2 \to \max$, $2 \le x_1 \le 5$, $1 \le x_2 \le 3$.

2. $f = x_1 + x_2 \to \max$, $x_1 - x_2 \le 1$, $x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3. $f = 3_1 + x_2 \to \max$, $-x_1 - x_2 \le 2$, $-x_1 + 2x_2 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

4. $f = x_1 + \frac{1}{2}x_2 \to \max$, $1 \le x_1 + x_2 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

5. $f = x_1 + \frac{1}{6}x_2 \to \max$, $x_1 + 2x_2 \le 4$, $-x_1 + 2x_2 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

6. $f = x_1 + 3x_2 \to \max$, $-x_1 + x_2 \le 1$, $x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

VIII. V bo'limdagi 1—14-masalalar (1—4 lar uchun N-ixtiyoriy natural son bo'lganda) sun'iy bazis usul bilan yechilsin.

IX. Quyidagi normal masalalarga mos qovushma masalalar tuzilsin va simpleks-usul bilan yechilsin.

6-bobga oid nazorat savollari

1. Chiziqli dasturlash masalalarini bayon eting.
2. P_K, P_N to'plamlarning qavariq to'plam ekanini isbot qiling.
3. Sodda hollarda (K) masala qanday yechiladi?
4. Bazis rejaning optimallik shartini yozing.
5. Berilgan reja uchun optimallik shartini vektor-matritsali ko'rinishda qanday tekshiriladi?
6. Simpleks-jadval qanday tuziladi?
7. Simpleks-iteratsiya nima?
8. Keyingi simpleks-jadvalga o'tish qoidalarini ayting.
9. Dastlabki bazis rejani topishning qanday usullari bor?
10. Sun'iy bazis usulining mazmuni nimadan iborat?
11. Chiziqli dasturlashning qovushma masalalari ta'rifini yozib bering.
12. Qovushma va (N) masalalar orasidagi bog'lanishlarni ayting.
13. Chiziqli dasturlashning qanday tatbiqiy masalalarini bilasiz?

7-BOB.CHIZIQSIZ DASTURLASH – CHIZIQSIZ MODELLARNI O'RGANISHDA MUHIM MATEMATIK USUL

Iqtisodiy jarayonlarning modellari chiziqli yoki chiziqsiz bo'lishi mumkin. Talab va taklifning chiziqli hamda chiziqsiz modellarini ko'rdik. Chiziqli modellarga chiziqli dasturlash masalalari misol bo'la oladi. Ammo chiziqsiz dasturlash masalalari ham mavjud. Sodda holda talab va taklifning chiziqsiz modellarini eslatib o'tish mumkin. Shu munosabat bilan chiziqsiz dasturlash masalalarining qo'yilishiga to'xtalamiz.

7.1-§. Chiziqsiz dasturlash masalalarining qo'yilishi

Chiziqsiz dasturlash matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, unda chekli o'lchovli fazo to'plamlarida aniqlangan funksiyalarning ekstremumlari va ekstremal qiymatlarini topish nazariyasi va usullari o'rganiladi. Aslida chiziqsiz dasturlash masalalarining qo'yilishi g'oyatda sodda, ammo ularni yechishning *umumiy usullari hozirgacha ishlab chiqilgan emas*. Ularni ba'zi shartlarning bajarilishini talab etgan holda yechish usullari mavjud. Biz masalalarni n-o'lchovli Yevklid fazosi va uning haqiqiy to'plamlarida o'rganamiz.

7.1-*ta'rif*. *Agar nta haqiqiy* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *koordinatali* $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nuqtalar (vektorlar) majmuasi* E^n *quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,* E^n*ni n-o'lchovli* <u>*Yevklid fazosi*</u> *deyiladi:*

1) $x \in E^n$, $y \in E^n$, λ – *haqiqiy son bo'lsin,* $\lambda \neq 0$:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ (*qo'shish*);

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ (songa ko'paytirish);

$(x, y) = x'y = x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n$ (*skalyar ko'paytma*).

2) *Yevklid fazosida Yevklid normasi tushunchasi kiritilgan*:

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \,,$$

$$\| x \| \geq 0, \; \| \lambda \cdot x \| = | \lambda | \cdot \| x \|, \; \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

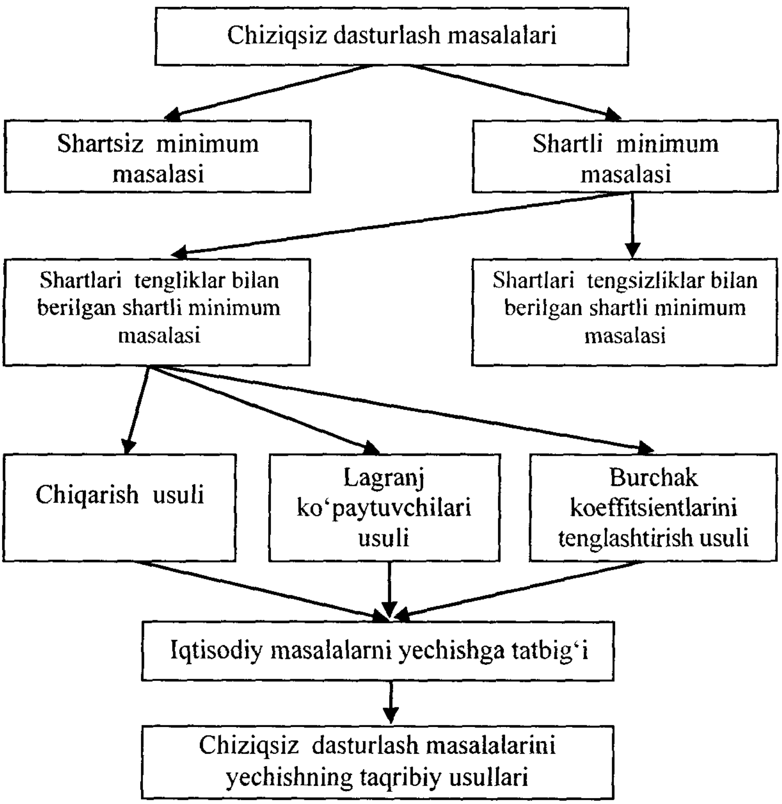
Endi chiziqsiz dasturlash masalalarining qo‘yilishiga to‘xtalamiz. Asosan masalalar ikki turli qo‘yiladi:

1) shartsiz minimum (ekstremum) masalasi;
2) shartli minimum (ekstremum) masalasi.

Shartli minimum masalasi o‘z navbatida 2 turli bo‘ladi:

1) shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum masalasi;
2) shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli minimum masalasi.

Chiziqsiz dasturlash masalalari va ularni yechish usullari shajarasi 7.1-chizmada berilgan.



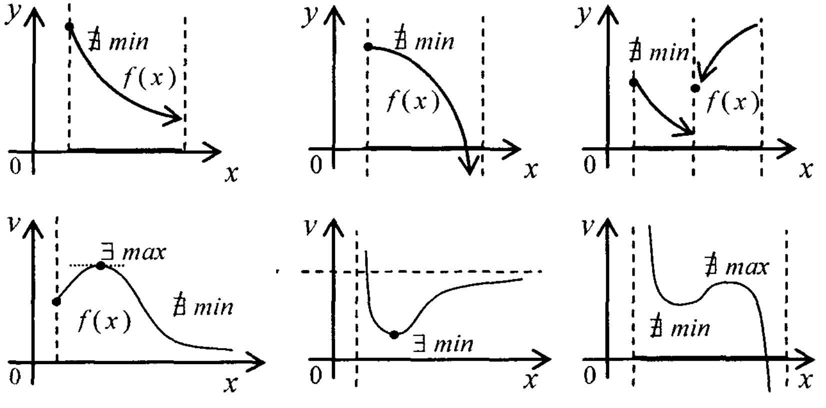
7.1-chizma

Avval shartsiz minimum (ekstremum) masalasining qo‘yilishiga to‘xtalamiz. Masala quyidagicha tavsiflanadi:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min\,(extr), \quad x \in E^n. \tag{7.1}$$

7.2-ta'rif. *Agar biror* $x^0 \in E^n$ *nuqta uchun* $f(x^0) = \min\limits_{x \in E^n} f(x)$*, ya'ni* $f(x^0) \le f(x),\ \forall x \in E^n$ *munosabatlar bajarilsa,* x^0 *nuqta* (7.1) *masalaning yechimi deyiladi.*

(7.1) masala doim yechimga ega bo'lavermaydi. Quyida bir argumentli funksiyalar uchun (7.1) masala yechimga ega bo'lmaydigan va yechimga ega bo'ladigan hollar chizmalar orqali berilgan (7.2-chizma).



7.2-chizma

Shartlari tengliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasi quyidagicha qo'yiladi (iqtisodiy masalalarda $x \ge 0$ bo'ladi):

$$f(x) \to \min, \ g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0. \tag{7.2}$$

Shartlari tengliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasi (7.2) sodda hollarda *chiqarish usuli* bilan, umumiy holda esa, Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan, turli sonli (taqribiy) usullar bilan ham yechiladi.

Ushbu $\overline{P}_K = \{\, x: \ g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0 \,\}$ to'plam *joiz rejalar* to'plami deyiladi. Shuning uchun (7.2)ni $\min\limits_{x \in \overline{P}_K} f(x)$ deb yozish mumkin. Iqtisodiy masalalar uchun $x \ge 0$ bo'ladi.

Shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli minimum (ekstremum) masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$$f(x) \to \min, \ g_1(x) \le 0, \ g_2(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0 \qquad (7.3)$$

yoki

$$f(x) \underset{x \in \overline{P}_N}{\to} \min, \quad \overline{P}_N = \{ x: \ g_1(x) \le 0, \ g_2(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0 \}.$$

7.3-*ta'rif*. *Agar biror* $x^0 \in \overline{P}_K \subset E^n$ *nuqta uchun* $f(x^0) \le f(x), \ \forall x \in \overline{P}_K$ *munosabat bajarilsa,* x^0 *nuqta* (7.2) *masalaning yechimi bo'ladi.*

7.4-*ta'rif*. *Agar biror* $x^0 \in \overline{P}_N \subset E^n$ *nuqta uchun* $f(x^0) \le f(x), \ \forall x \in \overline{P}_N$ *munosabat bajarilsa,* x^0 *nuqta* (7.3) *masalaning yechimi bo'ladi.*

1. Bir argumentli funksiyalarning ekstremal qiymatlari.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi (K.Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra). Shu qiymatlarni topish uchun quyidagi usul qo'llaniladi:

1^0. $f(a)$, $f(b)$ lar hisoblanadi.

2^0. $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi kritik nuqtalari topiladi, ularni $x_1, x_2, \dots, x_k$ deb belgilaymiz.

3^0. $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ lar hisoblanadi.

4^0. Nihoyat javob yoziladi:

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)\},$$

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)\}.$$

Misol ko'raylik. $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - | x |, \ \ x \in [-2; 4]$.

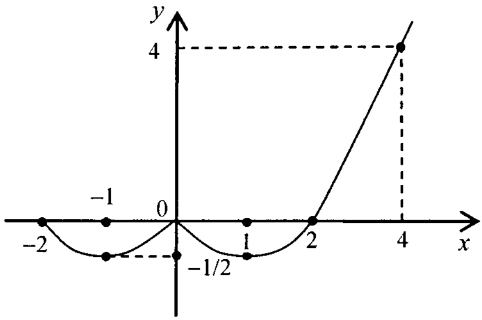
1^0. $y(-2) = 0, \ y(4) = 4$.

2^0. $x_1 = 0, \ x_2 = -1, \ x_3 = 1$.

3^0. $y(0)=0,\ y(-1)=y(1)=-1/2$.

4^0. $\max\limits_{x\in[-2,4]}\left(1/2\cdot x^2-|x|\right)=\max\{0,4,-1/2\}=4=y(4)$,

$\min\limits_{x\in[-2,4]}\left(1/2\cdot x^2-|x|\right)=\min\{0,4,-1/2\}=-1/2=y(1)=y(-1)$.



7.3-chizma

Endi $y=f(x)$ funksiya (a; b) intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin), aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Bu holda funksiya (a; b) intervalda eng kichik, eng katta qiymatlarga erishishi ham, erishmasligi ham mumkin. Shu munosabat bilan funksiya intervalda ekstremal qiymatlarga erishishi uchun yetarli shartlarni (mavjudlik teoremalarini) keltiramiz.

7.1-teorema. *Agar* $y=f(x),\ x\in(a;b)$ *funksiya uchun*

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x)=0 \tag{7.4}$$

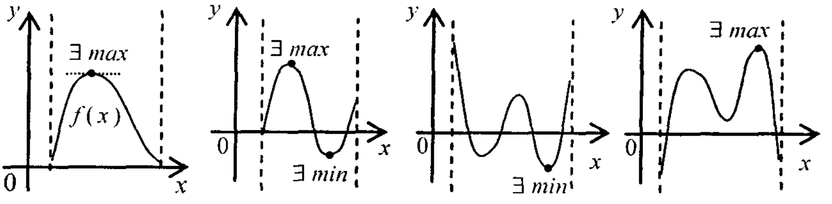
tengliklar o‘rinli bo‘lib, biror $x^0\in(a;b)$ *nuqta uchun* $f(x^0)>0$ ($f(x^0)<0$) *tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda* $y=f(x)$ *funksiya* (a; b) *intervalda o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi.*

7.2-teorema. *Agar* $y=f(x),\ x\in(a;b)$ *funksiya uchun*

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x)=+\infty \quad \text{(yoki } -\infty) \tag{7.5}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsa, unda $y=f(x)$ *funksiya* (a;b) *intervalda o‘zining eng kichik* (*eng katta*) *qiymatiga erishadi.*

Mazkur teoremalarning isboti geometrik nuqtayi nazardan ravshan. Bu quyidagi chizmalardan kelib chiqadi (7.4-chizma):



7.4-chizma

Har ikki teoremaga bittadan misol ko'raylik.

1-misol. $y=\frac{1}{2}x^2(3-x),\ 0<x<3$ funksiyaning ekstremal qiymatlarini tekshiramiz. Ravshanki,

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to 3-0} f(x)=0 \text{ va } f(x)>0,\quad \forall x\in(0,3).$$

7.1-teoremaning shartlari bajarildi. Demak, berilgan funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Uni topish uchun funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. Qo'yilayotgan holda kritik nuqtalar faqat statsionar nuqtalardan iborat. Ularni funksiya hosilasini nolga tenglashtirib topamiz:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot[\,2x\cdot(3-x)+x^2(-1)]=\frac{1}{2}\cdot[\,6x-2x^2-x^2\,]=\frac{3}{2}x\cdot(2-x).$$

$\frac{3}{2}x\cdot(2-x)=0$. Bundan $x_1=0$, $x_2=2$ ammo $0\notin(0;3)$; Demak, (0;3)da statsionar nuqta bitta $x_2=2$ ekan. 7.1-teoremaga ko'ra shu nuqtada funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni

$$\max_{x\in(0,\ 3)} f(x)=f(2)=2.$$

Qayd qilib o'tamizki, agar qaralayotgan intervalda bir necha statsionar nuqtalar mavjud bo'lsa, shu nuqtalardagi funksiya qiymatlari ichida eng kattasi (yoki eng kichigi) olinadi.

2-misol. $y=f(x)=2x+\frac{3}{x},\ 0<x<+\infty$ funksiyani olaylik.

Ravshanki, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ya'ni 7.2-teoremaning sharti bajarilayapti. Demak, funksiyaning eng kichik qiymati mavjud. Uni topish uchun hosilani nolga tenglashtiramiz: $2-\frac{3}{x^2}=0$. Bundan

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, ammo $x>0$ bo'lgani uchun $x_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$ yagona statsionar nuqta bo'ladi. Shuning uchun berilgan funksiya shu $x_2=\sqrt{3/2}$ nuqtada o'zining eng kichik qiymatiga erishadi, ya'ni

$$\min_{0<x<+\infty} f(x)=2\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=2\sqrt{6}.$$

2. Ko'p argumentli funksiyalarning ekstremum va ekstremal qiymatlari

Albatta, funksiya ko'p argumentli bo'lsa, uning ekstremal qiymatlarini topish murakkablashadi. Agar $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiya biror yopiq sohada aniqlangan va barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz bo'lsa, unda avvalo funksiya qiymatini soha chegarasida hisoblab olinadi. Keyin sohada yotgan statsionar nuqtalarni topib, shu nuqtalarda funksiya qiymatlari hisoblanadi. Hosil bo'lgan sonlar ichida eng kattasi va eng kichigi funksiyaning ekstremal qiymatlari bo'ladi. Soha ochiq bo'lsa, bu usulni ishlatib bo'lmaydi. Jumladan, chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum (maksimum) masalasida funksiya Yevklid fazosi E^n da aniqlangan bo'ladi, bu fazo ochiq sohadan iborat. Shu munosabat bilan ko'p argumentli funksiyaning ekstremal qiymatlarini emas, ularning ekstremumlarini topish masalasini qo'yish maqsadga muvofiq. Ba'zi hollarda ekstremal qiymatlarni ham topish mumkin bo'ladi.

7.2-§. Kvadratik formalar haqida

Faraz etaylik $y=f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiya E^n – n-o'lchovli Yevklid fazosida aniqlangan va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi, ya'ni $f\in C^2(E^n)$. Shu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalaridan quyidagi Gesse matritsasini tuzamiz:

$$A(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right). \qquad (7.6)$$

Gesse matritsasi $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ga bog'liq. Agar $x^0 \in E^n$ nuqta berilgan bo'lsa, $A(x^0)$ ni hisoblab olish mumkin. Bunda $A(x^0)=\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$ o'zgarmas matritsa.

7.5– *ta'rif.* $Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, $a_{ij}=a_{ji}$ (7.7) *ifoda n argumentli kvadratik forma deyiladi. Unda* a_{ij} *sonlardan tuzilgan*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (7.8)$$

matritsa kvadratik forma matritsasi deyiladi. (7.7)*ga ko'ra bu matritsa simmetrik, chunki bosh diagonaldan teng uzoqlashgan elementlar o'zaro teng.*

(7.7) ko'rinishda yozilgan kvadratik formani (7.8) matritsa yordamida kelajakda foydalanish uchun qulay bo'lgan vektor-matritsali ko'rinishda yozib olamiz:

$$Q(x)=x'\cdot A\cdot x. \qquad (7.9)$$

Ravshanki, $Q(0)=0$.

7.6-*ta'rif.* *Agar* $Q(x)>0$, $0\neq x\in E^n$ *bo'lsa,* $Q(x)$*–musbat aniqlangan,*

$Q(x)\geq 0$, $0\neq x\in E^n$ *bo'lsa,* $Q(x)$–*nomanfiy aniqlangan deyiladi; aksincha, agar* $Q(x)<0$, $0\neq x\in E^n$ *bo'lsa,* $Q(x)$– *manfiy aniqlangan,* $Q(x)\leq 0$, $0\neq x\in E^n$ *bo'lsa,* $Q(x)$–*nomusbat aniqlangan deyiladi.*

Masalan, $Q(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ –musbat aniqlangan, $Q(x_1,x_2)=$ $=(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$ nomanfiy aniqlangan. Shuningdek, $Q(x_1)=3x_1^2$ ham musbat aniqlangan, ammo $Q(x_1,x_2)=-2x_1^2-3x_2^2$ – manfiy aniqlangan.

Kvadratik forma tuzishga oid 2 ta misol ko'ramiz.

1-misol. Ushbu $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2+2x_1+x_2$ funksiya berilgan bo'lsin.

Chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishda kvadratik formaning ixtiyoriy x^0 nuqtadagi ko'rinishi emas, uning berilgan funksiya statsionar nuqtalaridagi ko'rinishi kerak bo'ladi. Demak, funksiyaning har bir statsionar nuqtasiga (agar u mavjud bo'lsa) bitta kvadratik forma tuziladi. Shu munosabat bilan ko'rilayotgan misoldagi funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Uning uchun $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$ sistemani yechish lozim bo'ladi. Sodda hisob-kitoblar olib boramiz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=2x_1-x_2+2,\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=-x_1+2x_2+1,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}2x_1-x_2+2&=0,\\ -x_1+2x_2+1&=0,\end{aligned}\right\}\quad x_1^0=-\frac{5}{3},\ x_2^0=-\frac{4}{3}.$$

Demak, yagona $x^0=\left(-\frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$ statsionar nuqtaga egamiz. Endi shu nuqtada ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblab, Gesse matritsasini tuzamiz:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\,\partial x_2}=-1\,.$$

Hosilalar bevosita x_1, x_2 larga bog'liq bo'lmay chiqdi. Agar bog'liq bo'lsa, hosilalarni x^0 nuqtada hisoblab olish kerak bo'ladi. Gesse matritsasi ushbu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. Endi kvadratik formani tuzish mumkin:

$$Q_1(y_1, y_2) = (y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (2y_1 - y_2,\ -y_1 + 2y_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2).$$

Ravshanki, $Q_1(y_1, y_2) > 0$, $0 \neq (y_1, y_2) \in E^2$. Demak, mos kvadratik forma musbat aniqlangan.

2-misol. Ushbu $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_2^2 - 3x_1 x_2$ funksiya berilgan bo'lsin. Uning statsionar nuqtalarini topamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 3x_1 - 3x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 9x_2^2 - 3x_1 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} 3(x_1^2 - x_2) &= 0 \\ 3(3x_2^2 - x_1) &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad x^{(1)} = (0,0), \quad x^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$$

Avval $x^{(1)} = (0;\ 0)$ nuqta uchun kvadratik formani tuzamiz. Uning uchun ikkinchi tartibli hosilalarni (0;0) nuqtada hisoblaymiz.

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} = 6x_1\Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2^2} = 18x_2\Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2} = -3.$$

Gesse matritsasini yozamiz:

$$A(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi mos kvadratik formani tuzsak bo'ladi:

$$Q_1(y_1, y_2) = (y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-3y_2;\ -3y_1) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -6y_1 y_2.$$

Demak, kvadratik forma $Q_1(y_1, y_2) = -6y_1y_2$ ko'rinishga ega. Uning ishorasi o'zgarib turadi. Agar y_1 va y_2 lar bir xil ishorali qiymatlar bo'lsa, $Q(y_1, y_2)<0$; turli ishorali bo'lsa, $Q(y_1, {}_2)>0$. Bu kvadratik forma aniq ishorali emasligini anglatadi.

Endi ikkinchi $x^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$ statsionar nuqta uchun mos kvadratik formani chiqaramiz. Shu nuqtada ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 f(x^{(2)})}{\partial x_1^2} = 2\cdot\sqrt[3]{9}, \quad \frac{\partial^2 f(x^{(2)})}{\partial x_2^2} = 6\cdot\sqrt[3]{2}, \quad \frac{\partial^2 f(x^{(2)})}{\partial x_1\,\partial x_2} = -3 .$$

$$A(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt[3]{9} & -3 \\ -3 & 6\cdot\sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$$

Endi kvadratik formani tuzamiz:

$$Q_2 = (y_1, y_2)\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt[3]{9} & -3 \\ -3 & 6\cdot\sqrt[3]{3} \end{pmatrix}\cdot(y_1, y_2) =$$

$$= \left(2\sqrt[3]{9}\, y_1 - 3y_2, -3y_1 + 6\sqrt[3]{3}\, y_2\right)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2\sqrt[3]{9}\, y_1^2 - 6y_1y_2 + 6\sqrt[3]{3}\, y_2^2 .$$

Topilgan kvadratik forma musbat aniqlangan. Haqiqatan, $Q_2(0; y_2) = 6\sqrt[3]{3}\, y_2^2 > 0$, $Q_2(y_1; 0) = 2\sqrt[3]{9}\, y_1^2 > 0$. Shu bilan uning diskriminanti $D=9-36=-27<0$.

Eslatib o'tamizki, kvadratik forma $a\cdot y_1^2 + 2b\cdot y_1y_2 + c\cdot x_2^2$ ko'rinishda bo'lsa, uning diskriminanti deb $D = b^2 - a\cdot c$ ni tushuniladi. Bu kvadrat uchhadning diskriminantidan iborat. Agar $y_1 \neq 0$ bo'lsa, $Q(y_1, y_2) = y_1^2\left(a + 2b\cdot\frac{y_2}{y_1} + c\cdot\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right)$ yoki $y_2 \neq 0$ bo'lsa, $Q(y_1, y_2) = y_2^2\left(a + 2b\cdot\frac{y_1}{y_2} + c\cdot\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right)$ bo'ladi. $Q(y_1, y_2)$ ning ishorasi qavslar ichidagi birinchi holda $u=y_2/y_1$ga nisbatan, ikkinchi holda $v=y_1/y_2$ ga nisbatan kvadrat uchhadning ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

Demak, umumiy holda kvadratik forma $ay_1^2+2by_1y_2+cx_2^2$ uchun $D=b^2-a\cdot c$ diskriminant deb hisoblanadi. Yuqorida ko'rilgan misol uchun $D=-27<0$. Demak, topilgan kvadratik forma musbat aniqlangan.

7.3-§. Chiziqsiz dasturlashning shartsiz va shartli minimum masalalari

1. Avval chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum masalasini ko'ramiz ((7.1)ga qarang):

$$f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\to\min, \qquad x\in E^n. \tag{7.10}$$

Bunda E^n — n o'lchovli Yevklid fazosi.

Endi shartsiz minimum masalasida birinchi, ikkinchi tartibli zaruriy shartlar hamda yetarli shartlarga taalluqli teoremalarni keltiramiz.

7.3-teorema. Agar (7.10) masalada $f(x)\in C^1(E^n)$ bo'lib, $x^0\in E^n$ nuqta $y=f(x)$ funksiyaning mahalliy minimum nuqtasi bo'lsa, quyidagi vektor tenglama

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x}=0$$

yoki koordinatalarda

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}=0,\ \dots,\ \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}=0$$

tenglamalar sistemasi o'rinli bo'ladi.

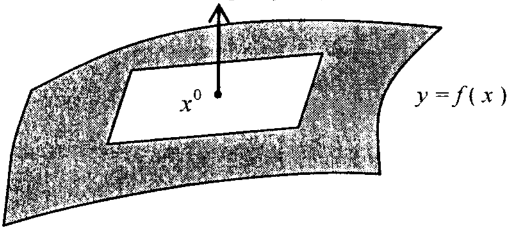
Isbot. $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$ta koordinatasini tayinlab qo'yib, $x_k=x_k^0$, $i\neq k$, $x_i$ni o'zgaruvchi deb qaraymiz. Unda bir argumentli ushbu

$$\varphi(x_i)=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya x_i^0 nuqtada mahalliy minimumga erishadi va bir argumentli funksiyalar uchun birinchi tartibli zaruriy shartga ko'ra $\frac{d\varphi(x_i^0)}{dx_i} = 0$ bo'ladi. Agar i ga 1 dan n gacha qiymatlar bersak, $\frac{\partial f(x_i^0)}{\partial x} = 0$ kelib chiqadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Ravshanki, $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \text{grad}\, f(x^0)$. Bu vektor $y=f(x)$ sirtning x^0 nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning normalidan iborat.



7.5-chizma

Shunday qilib, (7.10) masalaning yechimini $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = 0$ vektor-tenglama yechimlari ichidan, ya'ni statsionar nuqtalar ichidan izlash kerak ekan.

7.4-teorema. Agar (7.10) masalada $f(x) \in C^2(E^n)$ bo'lib, x^0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning mahalliy minimum nuqtasi bo'lsa, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi (ikkinchi tartibli zaruriy shart):

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = 0, \quad Q(y) = y' \cdot \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \geq 0, \quad \forall y \in E^n.$$

Isbot. 7.3-teoremaga ko'ra $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = 0$ tenglik bajariladi. Endi $y=f(x)$ funksiya uchun $x = x_0$ nuqtada Teylor formulasini yozamiz:

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - x^0\right)' \cdot \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \cdot (x - x_0) + o\left(\left\| x - x^0 \right\|^2\right).$$

Agar $\| y \| = 1$ sferada Veyershtrass teoremasiga ko'ra $y' \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} y$ kvadratik forma minimumga erishishini hisobga olsak, biror y, $\| \widetilde{y} \| = 1$ da

$$\alpha = \min_{\|y\|=1} y' \cdot \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \cdot y = \widetilde{y}' \cdot \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \cdot \widetilde{y}.$$

munosabatlar o'rinli.

Faraz etaylik 7.4-teorema noto'g'ri. Unda $\alpha<0$ bo'ladi. Ushbu

$$x(\beta) = x^0 + \beta \cdot (x - x^0) = 1, \quad |\beta| \le 1$$

nuqtani quramiz, unda $x = x^0 + \widetilde{y}$. Yetarli kichik β lar uchun $x(\beta)$ nuqta x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofiga tushadi. Ikkinchi tomondan, yetarli kichik β lar uchun

$$f(x(\beta)) - f(x^0) = \frac{(x(\beta) - x^0)'}{2} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} (x(\beta) - x^0) + o(\|x - x^0\|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \beta^2 \widetilde{y}' \cdot \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \widetilde{y} + o(\beta^2) = \frac{1}{2} \cdot \beta^2 \alpha + o(\beta^2) = \beta^2 \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{o(\beta^2)}{\beta^2} \right] < 0.$$

Bu esa, x_0 nuqtaning mahalliy minimum nuqtasi ekaniga zid. *Teorema isbot bo'ldi.*

7.5-teorema. Agar (7.10) masalada $f(x) \in C^2(E^n)$ bo'lsa, statsionar nuqta $\widetilde{x}$ mahalliy minimum nuqtasi bo'lishi uchun shu nuqtada $y' \cdot \dfrac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x^2} \cdot y$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi yetarli.

Isbot. Faraz etaylik,

$$\alpha = \min y' \cdot \frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x^2} \cdot y, \quad \| y \| = 1.$$

Shartga ko'ra $\alpha>0$. Ushbu

$$x(\gamma) = \widetilde{x} + \gamma(x - \widetilde{x}), \quad \gamma \ge 0, \quad x = \widetilde{x} + y, \quad y \in \{y : \| y \| = 1\}$$

nuqtalarni ko'raylik. Ular uchun

$$f(x(\gamma))-f(\widetilde{x})=\frac{(x(\gamma)-\widetilde{x})'}{2}\cdot\frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x^2}\cdot(x(\gamma)-\widetilde{x})+o(\|x(\gamma)-\widetilde{x}\|^2)=$$

$$=\frac{\gamma^2}{2}\cdot\widetilde{y}'\cdot\frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x^2}\widetilde{y}+o(\gamma^2)\geq\frac{\gamma^2}{2}\cdot\alpha+o(\gamma^2)=\gamma^2\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{o(\gamma^2)}{\gamma^2}\right].$$

Shunday $\varepsilon>0$ son topiladiki, $|\gamma|\leq\varepsilon$ bo'lganda ushbu

$$\left|\frac{o(\gamma^2)}{\gamma^2}\right|\leq\frac{1}{2}\alpha,\quad \alpha>0 \tag{7.11}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunda $x(\gamma)$ nuqtalar $0\leq\gamma\leq\varepsilon$ tengsizlik bajarilganda $\widetilde{x}$ nuqtaning ε atrofini to'ldiradi. Ular uchun (7.11)ga ko'ra

$$f(x(\gamma))-f(\widetilde{x})\geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu $\widetilde{x}$ nuqta mahalliy minimum nuqtasi ekanini anglatadi.

Misollar sifatida 7.2-§ da ko'rilgan masalalarni olamiz.

1-misolda $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2+2x_1+x_2$ funksiya uchun yagona statsionar nuqta $x^0=(-5/3,\ -4/3)$ topilgan va unga mos kvadratik forma $Q_1(y_1,y_2)=2\cdot(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)$ ko'rinishda ekani keltirib chiqarilgan edi. Ravshanki $Q_1(y_1,y_2)>0$, $0\neq(y_1,y_2)\in E^2$. Bundan ko'rinadiki, $x^0=(-5/3,-4/3)$ nuqtada berilgan funksiya mahalliy minimumga ega.

2-misolda $f(x_1,x_2)=x_1^3+3x_2^2-3x_1x_2$ funksiya ikkita $x^{(1)}=(0;\,0)$ va $x^{(2)}=\left(1/\sqrt[3]{3},\ 1/\sqrt[3]{9}\right)$ statsionar nuqtaga ega edi. Birinchisiga mos kelgan kvadratik forma $Q_1(y_1,y_2)=-6y_1y_2$ bo'lib, u o'z ishorasini saqlamaydi. Demak $x^{(1)}$ nuqtada ekstremum yo'q. Ammo ikkinchi $x^{(2)}$ nuqtada mos kvadratik forma

$$Q_2(y_1,y_2)=2\sqrt[3]{9}\,y_1^2-6y_1y_2+6\sqrt[3]{3}\,y_2^2$$

ko'rinishga ega bo'lib, $Q_2(y_1,y_2)>0$, ya'ni o'zining musbat ishorasini saqlaydi. Bundan berilgan funksiya $0\neq(y_1,y_2)\in E^2$ nuqtada mahalliy minimumga ega ekani kelib chiqadi.

2. Endi chiziqsiz dasturlashning shartli minimum masalalariga to'xtalamiz. Avval chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum masalasini ko'ramiz.

Bunday holda masalaning qo'yilishi quyidagicha edi ((7.2)ga qarang):

$$f(x)\to\min,\qquad g_1(x)=0,\ g_2(x)=0,\dots,g_k(x)=0. \tag{7.12}$$

$\overline{P}_K=\{x: g_1(x)=0, g_2(x)=0,\dots\ g_k(x)=0\}$ – joiz rejalar to'plami.

Eslatib o'tamizki, $\overline{P}_K$ to'plamning qavariqligi yoki qavariq emasligi haqida hech nima deyish mumkin emas. Har bir $g_i(x)=0$ tenglama E^n fazoda sirtni anglatadi. Shuning uchun $g(x)=0$ vektor tenglama $k$ta sirtlarning kesishmasidan iborat. Kesishma bo'sh to'plam bo'lishi mumkin. Masalan,

$g_i(x)=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2+a=0$, $a>0$ bo'lganda, $\overline{P}_K\in\varnothing$ bo'ladi.

Agar $g(x)\in C^1(\overline{P}_K)$ bo'lsa $\overline{P}_K$ to'plam $n-r$ o'lchovli *silliq qurama* (гладкое многообразие) deyiladi.

(7.12) masala uchun yechim mavjud bo'lishining zaruriy, yetarli shartlari mavjud. Ammo sodda hollarda (7.12) masalani yechishning sodda usullari mavjud. O'lchov $n=2$, $n=3$ bo'lganda chiqarish usuli, burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usullari shular jumlasidandir.

Quyida misollar ko'ramiz. Dastlab chiqarish usulini qo'llanishiga oid ikkita masala ko'riladi.

1-misol (1-uchastka masalasi). Yuzasi S ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklida yer uchastkasi ajratilgan. Uning eni bilan bo'yi qanday bo'lganda perimetri minimum bo'ladi?

Yechish. Masalaning matematik modelini quramiz. Agar x_1 va x_2 deb to'g'ri to'rtburchakning mos ravishda eni va bo'yini belgilasak, uning perimetri $2(x_1+x_2)$ga teng bo'ladi. Masalaning modeli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 \cdot x_2 = S \end{cases}$$

ko'rinishida yoziladi. Bunda $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$, $g(x_1,x_2)=x_1x_2-S=0$. Ikkinchi munosabatdan $x_2=S/x_1$ni topib $f(x_1,x_2)$ga qo'yamiz. Natijada ushbu

$$f_*(x_1)=x_1+\frac{S}{x_1}\to\min,\quad 0<x_1<+\infty$$

masalani hosil qilamiz. Bu masalaning yechimi mavjud, chunki 7.2-teoremaning shartlari bajarilayapti, ya'ni

$$\lim_{x_1\to+0} f_*(x_1)=\lim_{x_1\to+\infty} f_*(x_1)=+\infty.$$

Demak, masala yechimga, aniqrog'i $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ funksiya $g(x_1,x_2)=x_1x_2-S=0$ bo'lganda minimumga erishadi. Uni topish uchun $f_*(x_1)$ dan hosila olib, 0 ga tenglashtiramiz va yechamiz:

$$f_*'(x_1)=1+\frac{S}{x_2},\quad x_1^0=\sqrt{S};\quad x_2^0=\sqrt{S},\quad x^0=(\sqrt{S},\sqrt{S}).$$

Shu yagona statsionar nuqtada berilgan funksiya o'zining minimumiga erishadi. $\min f(x_1,x_2)=f(x^0)=2\sqrt{S}$. Ko'rinadiki, masalaning yechimini beradigan to'g'ri to'rtburchak kvadrat bo'lar ekan.

2-misol (2-uchastka masalasi). Yarim perimetri $p=x_1+x_2$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi yer maydoni yuzi maksimum bo'lishi uchun uning eni va bo'yi qanday bo'lishi kerak?

Yechish. Masalaning modeli quyidagicha yoziladi:

$$S(x_1,x_2)=x_1x_2\to\max,\quad x_1+x_2=p.$$

Yana chiqarish usulini qo'llaymiz: $x_2=p-x_1$, $0<x_1<p$ bo'lsa, ushbu $S_*(x_1)=x_1(p-x_1)\to\max$, $0<x_1<p$ masalani yechish lozim bo'ladi. Bu masala uchun (7.1) teoremaning shartlari bajariladi. Haqiqatan,

$$\lim_{x_1\to+0} S_*(x_1)=\lim_{x_1\to p-0} S_*(x_1)=0,\quad S_*(x_1)>0,\quad \forall x_1\in(0,p).$$

Yechimni topish uchun $S_*'(x_1)=0$ tenglamani yechsak, yagona statsionar nuqta $x_1^0=\frac{p}{2}$ topiladi. $S_*(x_1)$ funksiya shu nuqtada, $S(x_1,x_2)$ funksiya esa, $x^0=(p/2,\, p/2)$ nuqtada maksimumga erishadi: $S_{\max}=S(x^0)=\frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2}=\frac{p^2}{4}$. Ravshanki, bu holda ham to‘rtburchak kvadratdan iborat bo‘lib chiqdi.

Eslatma. Juda ko‘p masalalarning yechimi kvadrat bo‘lgani sababli uni *sehrli* figura deb atashgan.

Chiziqsiz dasturlashning (7.2) masalasini yechishning Lagranj ko‘paytuvchilari usuliga to‘xtalamiz. Mazkur usul haqida 4-bobning 4.2-§da qisqacha ma’lumot bergan edik. Endi shu usul haqida to‘laroq ma’lumot beramiz. Iqtisodiyotda uchraydigan chiziqsiz dasturlashning $\overline{P}_K$ masalasi uchun mos Lagranj funksiyasi aksariyat holda normal, ya’ni $\lambda_0\neq 0$ bo‘ladi. Shuning uchun umumiyatlikka zid kelmagan holda doim $\lambda_0=1$ deb olsa bo‘ladi. Bunda Lagranj funksiyasi

$$F(x,\lambda)=f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)+\lambda_k g_k(x)=f(x)+\lambda' g(x). \quad (7.13)$$

ko‘rinishda yoziladi. Lagranjning normal funksiyasiga mos shartli minimum masalasi *normal masala* deyiladi.

7.6-teorema. Agar $x^0\in\overline{P}_N$ nuqta (7.12) masala uchun shartli mahalliy minimum nuqtasi bo‘lsa, shunday $\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots,\lambda_k^0$ Lagranj ko‘paytuvchilari topiladiki, (x^0,λ^0) Lagranjning normal funksiyasi uchun shartli-statsionar nuqta bo‘ladi, unda

$$(\lambda^0)'=(\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots,\lambda_k^0).$$

Isboti. Agar (x^0,λ^0) shartli statsionar nuqta bo‘lsa,

$$\frac{\partial f(x^0,\lambda^0)}{\partial x}=0$$

vektor tenglik bajariladi. x^0 va λ^0 ni topish uchun $(n+k)$ta tenglama mavjud:

$$\frac{\partial f(x^0,\lambda^0)}{\partial x}=0, \qquad g(x)=0. \qquad (7.14)$$

Demak, shartli statsionar nuqtalarni (7.14) tenglamalar sistemasi ichidan izlash kerak.

7.6-teoremadan normal masala uchun Lagranj ko'paytuvchilari mavjudligi va yagonaligi kelib chiqadi.

7.7-teorema. (7.11) masala uchun $x^0 \in \overline{P}_N$ nuqta normal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}, \frac{\partial g_2(x^0)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial g_k(x^0)}{\partial x} \tag{7.15}$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarli (isboti talabaga topshiriladi).

Yuqorida ko'rilgan 2ta uchastka masalasining normalligini tekshiraylik.

1-masalada $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$, $g(x_1,x_2)=x_1x_2-S=0$.

Masalaning normalligi $\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\neq 0$, munosabatdan kelib chiqadi.

2-masalada $f(x_1,x_2)=x_1x_2$, $g(x_1,x_2)=x_1+x_2-p$. Masalaning normalligi ushbu

$$\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\neq 0$$

munosabatdan kelib chiqadi. Bu hollar Lagranj funksiyasining normalligini anglatadi.

7.8-teorema. Agar (7.12) masala normal bo'lib, $f(x)\in C^2(\overline{P}_k)$, $g(x)\in C^2(\overline{P}_k)$ va x_0–shu masalaning mahalliy minimum nuqtasi va λ^0 vektor x^0 ga mos Lagranj ko'paytuvchisi bo'lsa, ushbu

$$Q(y)=y'\cdot\frac{\partial^2 F(x^0,\lambda^0)}{\partial x^2}\cdot y\geq 0, \quad \forall y\in\Gamma=\left\{y:\left(\frac{\partial g(x^0)}{\partial x}\right)' y=0\right\}. \tag{7.16}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur.

7.9-teorema. Agar x^0 nuqta (7.2) masalaning shartli-statsionar nuqtasi bo'lsa, shu nuqta (7.2) masalaning mos Lagranj ko'paytuvchisi x^0 bo'lgan shartli minimum masalasining yechimi bo'lishi uchun ushbu

$$Q(y)=y'\frac{\partial^2 F(x^0,\lambda^0)}{\partial x^2}y>0\,,\quad 0\neq\forall y\in\Gamma=\left\{y:\left(\frac{\partial g(x^0)}{\partial x}\right)y=0\right\}\tag{7.17}$$

tengsizlikning bajarilishi ye*tarli.*

Yuqorida yechilgan 2 ta uchastka masalasini endi Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan yechamiz.

1-misolda $\begin{cases} f(x_1,x_2)=x_1+x_2\to\min, \\ g(x_1,x_2)=x_1x_2-S \end{cases}$

masala uchun uning normal masala ekanini bilganimiz holda Lagranjning normal funksiyasini tuzamiz:

$$F(x,\lambda)=x_1+x_2+\lambda\cdot(x_1x_2-S)\,.$$

Ravshanki, $\frac{\partial F}{\partial x_1}=1+\lambda\cdot x_2$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}=1+\lambda\cdot x_1$. Endi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$1+\lambda\cdot x_2=0\,,\qquad 1+\lambda\cdot x_1=0\,,\qquad x_1\cdot x_2=S\,.$$

Bundan $x_1=x_2=-1/\lambda$ va $\lambda=\pm 1/\sqrt{S}$. Ma'nosi bo'yicha $x_1>0$, $x_2>0$ bo'lgani uchun $\lambda=-1/\sqrt{S}$ bo'ladi. Demak, $x_1^0=x_2^0=\sqrt{S}$. Shartli-statsionar nuqta $x^0=\left(\sqrt{S},\sqrt{S}\right)$, unga mos Lagranj ko'paytuvchisi $\lambda^0=-1/\sqrt{S}$.

Endi ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblab, A matritsani va mos kvadratik formani yozamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=\lambda^0=-\frac{1}{\sqrt{S}},\qquad A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{S}}\\ -\frac{1}{\sqrt{S}} & 0\end{pmatrix}.$$

$$Q_1(y_1,y_2)=-(y_1,y_2)\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{S}}\\ -\frac{1}{\sqrt{S}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=-\left(\frac{y_2}{\sqrt{S}};\frac{y_1}{\sqrt{S}}\right)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=-\frac{2y_1y_2}{\sqrt{S}}\,.$$

Shunday qilib, $Q_1(y_1,y_2)=-\frac{2y_1y_2}{\sqrt{S}}$. $Q_1(y_1,y_2)$ ni Γda tekshiramiz:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{x^0} = \sqrt{S}, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{x^0} = \sqrt{S}, \quad \Gamma = \left\{ y : \sqrt{S} y_1 + \sqrt{S} y_2 = 0 \right\},$$

ya'ni $y_1+y_2=0$ yoki $y_2=-y_1\neq 0$. Ravshanki,

$$Q\,|_{\Gamma} = -\frac{2}{\sqrt{S}} \cdot y_1 \cdot (-y_1) = \frac{2}{\sqrt{S}} y_1^2 > 0, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

Bundan $f(x_1, x_2)=x_1+x_2$ funksiya $x_1x_2=S$ bo'lganda mahalliy minimumga erishishi kelib chiqadi va $f_{\min} = f(\sqrt{S}, \sqrt{S}) = 2\sqrt{S}$. Bu avval chiqarish usuli bilan topilgan yechim bilan ustma-ust tushadi.

2-misol uchun ham Lagranj ko'paytuvchilari usulini qo'llaymiz. Mulohazalarni qisqacha olib boramiz.

$$F(x,\lambda) = x_1 x_2 + \lambda \cdot (x_1 + x_2 - p),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + \lambda, \quad x_1 + \lambda = 0, \quad x_2 + \lambda = 0, \quad x_1 + x_2 - p = 0.$$

Bu munosabatlardan $x_1^0 = x_2^0 = \mathrm{p}/2, \quad \lambda^0 = -p/2$ kelib chiqadi.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_1(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1 y_2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1, \quad \Gamma = \left\{ y : (1,1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}, \quad y_1+y_2=0, \; y_2=-y_1,$$

$$Q\,|_{\Gamma} = 2y_1 \cdot (-y_1) = -2y_1^2 < 0, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

Yuqoridagi munosabatlardan $f(x_1, x_2)=x_1x_2$ funksiya $x_1+x_2-p=0$ bo'lganda $x^0 = (p/2,\, p/2)$ nuqtada mahalliy maksimumga erishadi va

$f(x_1, x_2) = \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ bo'ladi.

Ko'rinib turibdiki, $n=2$ bo'lganda Lagranj ko'paytuvchilari usuli bo'yicha hisob-kitoblar anchagina. Agar n=3,4,... bo'lsa, hisoblashlarning hajmi yanada ko'payadi.

Ushbu $f(x) \to \min(\max)$, $g(x)=0$ masalada ishtirok etayotgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ba'zi xossalarga ega bo'lsa, masalani yechishning ratsional usuli G'.Nasritdinov tomonidan tavsiya etilgan va burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli deyiladi. Bu usulning mohiyati 3-bobda bayon etilgan (n=2, n=3 uchun). Biz mulohazalar to'liq bo'lishi uchun shu bobda ham 2 ta misol ko'ramiz.

1-misol. $f(x_1,x_2)=2(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-1} \to \max$, $g(x_1,x_2)=3x_1+x_2-15=0$. Bunda $f(x_1,x_2)$ funksiya naflik funksiyasining barcha xossalariga ega. Haqiqatan $(x_1>0, x_2>0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2\cdot(-1)\cdot\left(x_1^{-1}+x_2^{-1}\right)^{-2}(-1)\cdot x_1^{-2}=2\cdot\left(1+x_1x_2^{-1}\right)^{-2}>0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2\cdot(-1)\cdot\left(x_1^{-1}+x_2^{-1}\right)^{-2}(-1)\cdot x_2^{-2}=2\cdot\left(x_1^{-1}x_2+1\right)^{-2}>0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}=2\cdot(-2)\cdot\left(1+x_1x_2^{-1}\right)^{-3}x_2^{-1}<0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}=2\cdot(-2)\cdot\left(x_1^{-1}x_2+1\right)^{-3}x_1^{-1}<0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=2\cdot(-2)\cdot\left(1+x_1x_2^{-1}+1\right)^{-3}(-x_1)\cdot x_2^{-2}>0.$$

Endi masalani yechishga burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli qo'llansa bo'ladi.

Ravshanki, $k_2=-\frac{3}{5}$, $k_1=-\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}=-\frac{x_2^2}{x_1^2}$.

Masalaning yechimi quyidagi sistemadan topiladi:

$$-\frac{3}{5}=-\frac{x_2^2}{x_1^2}, \qquad 3x_1+5x_2=15.$$

Bundan $3x_1^2 = 5x_2^2$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}x_1$ va $3x_1 + 5\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} - x_1 = 15$,

$$x_1^0 = \frac{15}{3+\sqrt{15}}, \quad x_2^0 = \frac{3\sqrt{15}}{3+\sqrt{15}}.$$

Demak, $f = 2(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-1}$ funksiya $3x_1 + 5x_2 - 15 = 0$ berilganda $x^0 = \left(\frac{15}{3+\sqrt{15}}, \frac{3\sqrt{15}}{3+\sqrt{15}}\right)$ nuqtada maksimal qiymatga erishadi. Sodda hisoblar yordamida f_{max} ni topamiz:

$$f_{max} = f(x^0) = \frac{5}{2(3+\sqrt{15})}.$$

Taqqoslash uchun shu masalani Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan ham yechib ko'raylik. Masala normalligi ravshan. Endi Lagranjning normal funksiyasini yozamiz:

$$F(x,\lambda) = 2\cdot(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-1} + \lambda\cdot(3x_1 + 5x_2 - 15).$$

Bundan

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1^2}\cdot(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-2} + 3\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2^2}\cdot(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-2} + 5\lambda.$$

hosilalarni nolga tenglashtirib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x_1^2}\cdot(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-2}+3\lambda=0, \\ \frac{2}{x_2^2}\cdot(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-2}+5\lambda=0, \\ 3x_1+5x_2-15=0. \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} \lambda=-\frac{2}{3x_1^2}\cdot(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-2}, \\ \lambda=-\frac{2}{5x_2^2}\cdot(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-2}, \\ 3x_1+5x_2-15=0. \end{aligned}\right\}$$

Dastlabki tengliklarning chap va o'ng tomonlarini mos ravishda bo'lsak, soddagina $5x_2^2 = 3x_1^2$ tenglik chiqadi. Bu holda hisob-kitoblar bajarilgan va shartli statsionar nuqta $\left(\frac{15}{3+\sqrt{15}}, \frac{3\sqrt{15}}{3+\sqrt{15}}\right)$ ekani ma'lum.

Endi shu nuqtada ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblab, A matritsani tuzamiz: hisoblash aniqroq bo'lishi uchun $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ larni quyidagicha yozib olamiz

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2\cdot(1+x_1x_2^{-1})^{-2}+3\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=2\cdot(x_1^{-1}x_2+1)^{-2}+5\lambda.$$

Bundan

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=-4\cdot(1+x_1x_2^{-1})^{-3}x_2^{-1}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=-4\cdot(x_1^{-1}x_2+1)^{-3}x_1^{-1}.$$

Statsionar nuqtada shu hosilalarni hisoblaymiz:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right|_{x^o}=-\frac{2\cdot\sqrt{15}}{5\cdot(4+\sqrt{15})}, \quad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right|_{x^o}=-\frac{2\cdot\sqrt{15}}{3\cdot(4+\sqrt{15})},$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{x^o}=\frac{2}{4+\sqrt{15}}, \quad A=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{15}}{5} & 1\\ 1 & -\frac{\sqrt{15}}{5}\end{pmatrix},$$

$$Q=\frac{2}{4+\sqrt{15}}\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}y_1^2+2y_1y_2-\frac{\sqrt{15}}{3}y_2^2\right), \quad \Gamma:\ 3y_1+5y_2=0.$$

Agar $y_2=-\frac{3}{5}y_1$ ekanini hisobga olsak,

$$Q\,|_{\Gamma}=\frac{2}{4+\sqrt{15}}\cdot\frac{30-8\sqrt{15}}{25}y_1^2=\frac{2}{4+\sqrt{15}}\cdot\frac{30-30{,}984}{25}<0.$$

Demak, shartli-statsionar $x_0=\left(\frac{15}{3+\sqrt{15}}, \frac{3\sqrt{15}}{3+\sqrt{15}}\right)$ nuqtada berilgan funksiya maksimal qiymatga erishadi.

Yuqoridagi hisoblashlar ko'rsatadiki, $F(x_1,x_2)$ funksiya naflik funksiyasining xossalarini anglatuvchi shartlarni qanoatlantirsa, burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usuli masalani yechishning *ratsional* usuli bo'lib xizmat qiladi.

7.4-§. Chiziqsiz dasturlashning shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli minimum masalasi

Avvalgi bo'limda chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum masalasiga va uni yechishning turli usullariga, birinchi galda, Lagranj ko'paytuvchilari usuliga to'xtaldik. Ammo turli iqtisodiy jarayonlarning matematik modellarida tegishli shartlar tengliklar va tengsizliklar sistemasi ko'rinishida bo'lishi mumkin.

Faraz etaylik, $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... , $g_k(x)$ funksiyalar n o'lchovli Yevklid fazosida berilgan bo'lsin. Shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli minimum masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$$f(x)\to\min,\ g_1(x)\le 0,\ g_2(x)\le 0,\ \dots,\ g_k(x)\le 0. \qquad (7.18)$$

***7.7-ta'rif.** Ushbu* $\widetilde{P}_N=\{x: g_1(x)\le 0,\ g_2(x)\le 0,\ \dots,\ g_k(x)\le 0\}$ *to'plam __joiz rejalar__ to'plami deyiladi.*

Bunda $k\le n$ tengsizlik bajarilishi shart emas. Iqtisodiy masalalar uchun $x\ge 0$. Agar $g'(x)=(g_1(x),\ g_2(x),\ \dots,\ g_k(x))$ belgilash kiritsak, $\widetilde{P}_N=\{x: g(x)\le 0\}$ deb yozish qulay.

***7.8-ta'rif.** Agar biror* $x^0\in\widetilde{P}_N$ *nuqta uchun* $f(x^0)\le f(x)$ *tengsizlik o'rinli bo'lsa,* x^0 *nuqta* (7.18) *masalaning yechimi deyiladi.*

Agar masala ixtiyoriy joiz rejalar uchun yechilsa, yechim absolut minimum masalasiga oid bo'ladi, aksincha, agar masala x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofida, ya'ni $\|x-x^0\|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$ sharda qaralsa, biz mahalliy minimum masalasini yechgan bo'lamiz. Absolut minimum masalasini yechishning umumiy usullari ishlab chiqilmagan. Ayrim soddaroq hollarda absolut minimum masalalari yechilishi mumkin. Biz mahalliy minimum masalalarini o'rganamiz.

Shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli minimum masalasi (7.18) yordamchi o'zgaruvchilar kiritish orqali shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum masalasiga keltirilishi mumkin. Shuni asoslash uchun quyidagi masalani ko'ramiz:

$$f(x) \to \min, \quad g_i(x) + x_{n+i}^2 = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{7.19}$$

bunda $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$ lar yordamchi o'zgaruvchilar.

7.1-lemma. Har bir (7.18) masala (7.19) masalaga ekvivalent.

Isbot. Biror x^0 nuqta (7.17) masalaning yechimi bo'lishi uchun

$$\left(x^0, \; x_{n+1}^0 = [-g_1(x^0)]^{1/2}, \; \ldots \;, \; x_{n+k}^0 = [-g_k(x^0)]^{1/2}\right) \tag{7.20}$$

nuqta (7.18) masalaning yechimi bo'lishi zarur va yetarli ekanini ko'rsatish kifoya.

Faraz etaylik, x^0– (7.18) masalaning yechimi, ammo (7.19) nuqta (7.18) masalaning yechimi bo'lmasin, ya'ni $\{\tilde{x}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_{n+2}, \ldots, \tilde{x}_{n+k}\}$ nuqta uchun $f(\tilde{x}) = f(x^0)$, $g_i(\tilde{x}) + \tilde{x}_{n+i}^2 = 0$ munosabatlari bajariladi. Shunday qilib, $f(\tilde{x}) < f(x^0)$, $g_i(\tilde{x}) = -\tilde{x}_{n+i} \le 0$. Bu esa x^0 nuqta (7.18) masalaning yechimi ekanligiga zid.

Endi, teskarisi, $\{x^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+k}^0\}$ nuqta (7.19) masalaning yechimi, ammo x^0 nuqta (7.18) masalaning yechimi emas deylik. Bu holda shunday x^* nuqta mavjud bo'ladiki, shu nuqta uchun

$$f(x^*) < f(x^0), \quad g_i(x^*) \le 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{7.21}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Endi x^* ni ushbu

$$x_{n+1}^* = [-g_1(x^*)]^{1/2}, \; \ldots \;, \; x_{n+k}^* = [-g_k(x^*)]^{1/2}$$

koordinatalar bilan to'ldiramiz. Unda $(n-k)$– vektor $\{x^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+k}^*\}$ uchun ushbu

$$f(x^*) < f(x^0), \quad g_i(x^*) + (x_{n+i}^*)^2 = 0, \quad i = \overline{1,k}$$

munosabatlar o'rinli. Bu esa, $\{x^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+k}^*\}$ nuqta (7.19) masalaning yechimi deyilgan farazga zid.

(7.18) masalani yechish uchun olib boriladigan mulohazalar quyidagicha. Avval shartlari tengliklar bilan berilgan (7.19) masalani yechishga zaruriy, yetarli shartlarni qo'llaymiz. So'ngra natijani (7.18) masala uchun yozib olamiz.

7.9-ta'rif. *Agar biror joiz nuqta* $x^0 \in \tilde{P}_N$ *da* $g_i(x^0) = 0$ *bo'lsa,* $g_i(x) \le 0$, $1 \le i \le k$, *tengsizlik shu* x^0 *nuqtada faol deyiladi, agar,*

$g_i(x^0)<0$ *bo'lsa,* $g_i(x)\le 0$, $1\le i\le k$ *tengsizlik* x^0 *nuqtada* *sust* *deyiladi.*

7.2-lemma. Agar x^0 joiz nuqtada faol bo'lgan $i_1, i_2, \dots, i_S,\ S\le k$ indekslarga ega bo'lgan tengsizliklar uchun ushbu

$$\frac{\partial g_{i_1}(x^0)}{\partial x},\ \frac{\partial g_{i_2}(x^0)}{\partial x},\ \dots,\ \frac{\partial g_{i_S}(x^0)}{\partial x} \tag{7.22}$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, (7.18) masala uchun

$$\left\{x^0,\ [-g_1(x^0)]^{1/2},\ \dots,\ [-g_k(x^0)]^{1/2}\right\}$$

nuqta normal nuqta bo'ladi.

Shu lemmaga ko'ra (7.22) vektorlar chiziqli erkli deb faraz qilib, Lagranj normal funksiyasini yozish mumkin:

$$\widetilde{F}(x, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n+1}^2 . \tag{7.23}$$

Agar $\{x^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+k}^0\}$ nuqta (bunda $x_{n+i}^0 = [-g_i(x^0)]^{1/2}$, $i=\overline{1,k}$ (7.19) masalaning mahalliy minimum nuqtasi bo'lsa, quyidagi tenglamalar sistemasini yozish mumkin (bunda $\widetilde{x} = \{x^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+k}^0\}$):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \widetilde{F}(\widetilde{x}^0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial g_k(x^0)}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \widetilde{F}(\widetilde{x}^0)}{\partial x_{n+1}} = 2\lambda_1 x_{n+1}^0 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial \widetilde{F}(\widetilde{x}^0)}{\partial x_{n+k}} = 2\lambda_k x_{n+k}^0 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

(7.24)dagi tengliklarning o'rinli bo'lishi zaruriy shartdir. Agar (7.18) masala uchun ham Lagranj funksiyasini kiritsak

$$F(x,\lambda) = f(x) + \lambda' g(x),$$

mahalliy minimumning zaruriy sharti, ya'ni (7.23) munosabatlar

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda)}{\partial x} = 0 \tag{7.25}$$

$$\lambda_i x_{n+i}^0 = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda_i g_i(x^0) = 0, \quad i = \overline{1,k} \tag{7.26}$$

ko'rinishni oladi. Bunda (7.25) – *sustlikni to'ldiruvchi shart* deyiladi. Buning ma'nosi shuki, x^0 nuqtada sust bo'lgan tengsizlikka mos Lagranj ko'paytuvchisi 0 ga teng, va, aksincha. Lagranjning biror ko'paytuvchisi noldan farqli bo'lsa, unga mos tengsizlik x^0 nuqtada faol bo'ladi.

(7.18) masala normal bo'lgani uchun x^0 nuqtada ikkinchi tartibli shartli minimumning zaruriy sharti bajariladi.

$F(x, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, \lambda)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalaridan tuzilgan matritsa quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x^0,\lambda)}{\partial^2 x} & & & & \\ & 2\lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & 2\lambda_2 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 0 & 0 & \ldots & 2\lambda_k \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun mos kvadratik forma quyidagicha yoziladi:

$$y' \cdot \frac{\partial^2 F(x^0,\lambda)}{\partial^2 x} \cdot y + 2\lambda_1 y_{n+1}^2 + \ldots + 2\lambda_k y_{n+k}^2 . \tag{7.27}$$

Endi y vektor yotadigan gipertekslik va $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+k}$ sonlar quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}\right)' y + 2x_{n+1}^0 y_{n+1} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial g_2(x^0)}{\partial x}\right)' y + 2x_{n+2}^0 y_{n+2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\dfrac{\partial g_k(x^0)}{\partial x}\right)' y + 2x_{n+k}^0 y_{n+k} = 0. \end{array}\right\} \tag{7.28}$$

$$\left(\frac{\partial g_k(x^0)}{\partial x}\right)' y + 2x^0_{n+k} y_{n+k} = 0 .$$

7.10-*ta'rif*. *Agar* (7.18) *masala uchun* x^0 *– joiz nuqta bo'lib, shunday* $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) > 0$ *– Lagranj ko'paytuvchisi topilsaki,* $F(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ *Lagranj funksiyasi uchun ushbu*

$$\frac{\partial F(x^0,\lambda)}{\partial x} = 0, \qquad \lambda_i g_i(x_0) = 0, \quad i = \overline{1,k}$$

tengliklar bajarilsa, x^0*–*(7.18) *masala uchun shartli-statsionar nuqta deyiladi.*

7.10-teorema. (7.18) masalada shartli-statsionar x^0 nuqta mahalliy minimum nuqtasi bo'lishi uchun x^0 nuqtada *faol* bo'lgan $i_1, i_2, \dots, i_s$, $s \le k$ indeksli tenglamalarga nisbatan tuzilgan

$$\Gamma = \left\{ y : \left(\frac{\partial g_{i_p}(x^0)}{\partial x}\right)' \cdot y = 0 \right\}.$$

yoki to'laroq yozuvda

$$\left(\frac{\partial g_{i_1}(x^0)}{\partial x}\right)' y = 0, \quad \left(\frac{\partial g_{i_2}(x^0)}{\partial x}\right)' y = 0, \quad \left(\frac{\partial g_{i_k}(x^0)}{\partial x}\right)' y = 0.$$

gipertekislikda

$$Q(y) = y' \cdot \frac{\partial^2 F(x^0,\lambda)}{\partial^2 x} \cdot y, \quad \text{ya'ni} \quad Q(y)\big|_\Gamma$$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi yetarli.

Misollar ko'ramiz.

1-misol. $\begin{cases} f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1 - 18x_2 + 5, \\ g(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 1 \le 0. \end{cases}$

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1 - 18x_2 + 5 + \lambda\cdot(x_1 + x_2 - 1).$$

Zaruriy shartlarni yozamiz. x_1, x_2 va λ uchun sistemani yozamiz:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = x_1 + 4 + \lambda, \qquad \begin{cases} x_1 + 4 + \lambda = 0, \\ 3x_2 - 18 + \lambda = 0, \\ \lambda(x_1 + x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = 3x_2 - 18 + \lambda,$$

Avvalo λ=0ni tekshiraylik. Agar λ=0 bo'lsa, x_1=−4, x_2=6 bo'ladi. Ammo $(x_1 + x_2 - 1)\big|_{x^0} = -4 + 6 - 1 = 1 > 0$. Demak, (−4;6) nuqta joiz emas. Bundan $\lambda \neq 0$ ekani kelib chiqadi, demak, $x_1 + x_2 - 1 = 0$ bo'lishi zarur. Endi ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 4 + \lambda = 0, \\ 3x_2 - 18 + \lambda = 0, \\ \lambda(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

sistemani yechish kerak bo'ladi. Uning yechimi $x^0 = \left(-\frac{13}{4}; \frac{23}{4}\right)$, $\lambda^0 = \frac{3}{4}$.

Ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan matritsa va mos kvadratik formani yozamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Q(y_1, y_2) = (y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + 3y_2^2 .$$

Endi Γni topamiz: $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 1$ va $(1;\ 1) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$ yoki $y_2 = -y_1$. $Q(y_1, y_2)$ ni Γ da hisoblaymiz: $Q\big|_\Gamma = 4y_1^2 > 0, \quad \forall y_1 \neq 0.$

Bundan berilgan $f(x_1, x_2)$ funksiya $x^0 = \left(-\frac{13}{4}; \frac{23}{4}\right)$ nuqtada mahalliy minimumga erishishi kelib chiqadi.

2-misol. $\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min, \ x_1 > 0, \ x_2 > 0. \\ g(x_1, x_2) = s - x_1 x_2 \leq 0, \ s > 0. \end{cases}$

Lagranj funksiyasini tuzamiz. Bu mumkin, chunki masala normal.

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(s - x_1 x_2),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 1 - \lambda \cdot x_2, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 1 - \lambda \cdot x_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - \lambda \cdot x_2 = 0, \\ 1 - \lambda \cdot x_1 = 0, \\ \lambda \cdot (s - x_1 x_2) = 0. \end{cases}$$

Agar $\lambda=0$ bo'lsa, $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 1$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 1$ bo'ladi, ya'ni statsionar nuqta mavjud emas. Demak, $\lambda \neq 0$. Unday bo'lsa $s - x_1 x_2 = 0$ va $x_1 = x_2 = 1/\lambda$ bo'lgani uchun $\lambda = 1/\sqrt{s}$. Ikkinchi tartibli hosilalar osongina hisoblanadi. Mos kvadratik forma $Q = -2y_1 y_2$ va $\Gamma : y_1 + y_2 = 0$. Demak, $Q|_{\Gamma} = 2y_1^2 > 0$, $\forall y_1 \neq 0$ va $f(x_1, x_2)$ funksiya $(\sqrt{s}, \sqrt{s})$ da minimumga erishadi.

7.5-§. Sodda iqtisodiy modellarni geometrik dasturlash usullari yordamida o'rganish

XX asrning ikkinchi yarmida ekstremal masalalar yechishning yangi yo'nalishi paydo bo'ldi. Uni geometrik dasturlash deb ataladi. U ko'p hollarda chiziqsiz dasturlash masalalarini ratsional usul bilan yechish imkoniyatini beradi. Bunda ba'zi hollarda masalalarni yechish uchun hatto hosilalardan foydalanilmaydi. Sodda hollarda geometrik dasturlashning tengsizliklar usuli, pazinomlar usuli muvaffaqiyat bilan qo'llaniladi. Biz quyida shu usullar yordamida o'rganiladigan modellarga to'xtalamiz.

1. Iqtisodiy masalalarni yechishning tengsizliklar usuli

Ba'zi iqtisodiy masalalarni tengsizliklar usuli bilan yechish maqsadga muvofiq. Unda ba'zi klassik tengsizliklardan foydalaniladi. Ayniqsa, o'rta miqdorlar va ular orasidagi munosabatlar asqotadi.

Bizga n ta musbat $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$ miqdorlar yoki biror o'zgaruvchining musbat funksiyalari $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ $t \in (a, b)$

berilgan bo'lsin. Ulardan tuzilgan o'rta miqdorlarni yozamiz:

$$H_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}$$ — o'rta garmonik miqdor,

$$\Gamma_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$ — o'rta geometrik miqdor,

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$ — o'rta arifmetik miqdor,

$$D_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$ — o'rta kvadratik miqdor.

Mazkur miqdorlar orasida quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$H_n \le \Gamma_n \le A_n \le D_n .$$

Unda tenglik ishorasi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Shu tengsizliklarning isboti murakkab emas. Ular turli usullar bilan isbotlanadi.

Biz iqtisodiy masalalarni yechishda

$$\Gamma_n \le A_n \qquad (*)$$

tengsizlikdan foydalanish usulidan foydalanamiz. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin.

1⁰-hol. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, $a = const$. Bunda $\Gamma_n \le A_n$ tengsizlik ushbu $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = a/n$ ko'rinishga keladi. Undan $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (a/n)^n$ kelib chiqadi. Ko'rinadiki, $\max\{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\} = (a/n)^n$ va $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a/n$.

Shunday qilib, biz quyidagi masalaga egamiz:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \to \max, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \ a = const, \\ x_1 > 0, x_2 > 0, \ \ldots, \ x_n > 0. \end{cases} \qquad (7.29)$$

Bu masala matematik dasturlash fanida shartlari tengliklar bilan berilgan *shartli ekstremal* masala deyiladi. Uni yechish anchagina murakkab. Jumladan, u Lagranj ko‘paytuvchilar usuli bilan yechiladi. Ammo biz ko‘rayotgan maxsus holda (7.29) masalaning yechimi osongina yoziladi:

1-masala. Yarim perimetri $x_1+x_2=p$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi maydonning yuzi uning tomonlari qanday bo‘lganda eng katta bo‘ladi?

Yechish. Ushbu masalaga egamiz:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \to max, \\ x_1+x_2=p. \end{cases}$$

(7.29) masalaga ko‘ra $n=2,\quad a=p$ bo‘lib, yechim $\max(x_1,x_2)=$ $=(p/2)^2 \quad x_1=x_2=p/2$ ko‘rinishda yoziladi.

2-masala. Ushbu $f(x)=ax(b-x)\to\max,\ 0<x<b,\ a>0$ masala yechilsin. Agar $x_1=x,\ x_2=b-x$ desak $x_1+x_2=b=const$ bo‘ladi. Shuning uchun $\max\{ax(b-x)\}=a\cdot(b/2)^2$. Endi $x_1=x_2$ tenglikka ko‘ra $x=b-x,\ 2x=b,\ x_0=b/2$. Shunday qilib javobni $\max f(x)=f(b/2)=ab^2/4$ ko‘rinishda yozish mumkin.

3-masala. Tomoni p ga teng bo‘lgan kvadrat shaklidagi materialdan uning burchagidan qanday kvadratlar qirqib usti ochiq yashik yasasak, shu yashikning hajmi eng katta bo‘ladi?

Yechish. Kvadratning tomonini x desak, $0<x<p/2$ bo‘ladi. Unda yashik hajmi $V(x)=(p-x)^2x$ formula bilan aniqlanadi. Agar $V(x)=1/4\cdot 4x(p-2x)\cdot(p-2x)$ deb yozib, $x_1=4x$, $x_2=x_3=p-2x$ desak, $x_1+x_2+x_3=2p$ bo‘ladi. Shuning uchun (7.29)ga ko‘ra

$\max f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{2p}{3}\right)$, $4x=p-2x$ dan $x=\frac{p}{6}$ kelib chiqadi.

2⁰-hol. $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=b,\ b=const$. Bunda (*) tengsizlik $\sqrt[n]{b}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ ko‘rinishda yoziladi. Undan

$\min(x_1+x_2+\ldots+x_n)=n\cdot\sqrt[n]{b}$ — kelib chiqadi. $x_1=x_2=\ldots=x_n$ bo‘lganda $x_i=\sqrt[n]{b}$, $i=\overline{1,n}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, biz quyidagi masala va uning yechimiga egamiz.

Masala:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n\to\min, \\ x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=b,\ b=const, \\ x_1>0, x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0. \end{cases} \tag{7.30}$$

Yechish: $\min(x_1+x_2+\ldots+x_n)=n\cdot\sqrt[n]{b}$,

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt[n]{b}.$$

1-masala. Yuzasi S bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi maydonning tomonlari qanday bo‘lganda uning perimetri eng kam bo‘ladi?

Yechish: Ushbu $x_1+x_2\to\min$, $x_1\cdot x_2=S$ masalaga egamiz. Unda yechimni darhol yozish mumkin:

$$\min(x_1+x_2)=n\cdot\sqrt{b},\quad x_1=x_2=\sqrt{b}.$$

2-masala (eng yaxshi konserva idishi haqida). Hajmi V bo‘lgan silindr shaklidagi konserva idishining asos doirasi radiusi r va balandligi h qanday bo‘lganda uni yasash eng arzon tushadi?

Yechish. Idishning hajmi $V=\pi\cdot r^2h$. U eng arzon tushishi uchun to‘liq sirti eng kam bo‘lishi ravshan. Shu holdagina unga eng kam material ketadi. Demak, $S=2\pi\cdot r^2+2\pi\cdot r\cdot h$, $V=\pi\cdot r^2h$. Agar $h=\dfrac{V}{\pi\cdot r^2}$ ni S ifodaga qo‘ysak,

$$S(r)=2\pi\cdot r^2+\frac{2\cdot V}{r}\to\min,\ r>0$$

masala hosil bo‘ladi. Agar bu funksiyani ushbu

$$S(r)=2\pi\cdot r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}$$

ko'rinishda yozilsa, $x_1 = 2\pi \cdot r^2$, $x_2 = x_3 = V/r$ bo'lganda

$$x_1 x_2 x_3 = 2\pi \cdot r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} = 2\pi \cdot V^2 = b$$

bo'ladi. Demak, yechimni yozish mumkin: $\min S(r) = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi \cdot V^2}$,

$x_1 = x_2 = x_3$ga ko'ra $2\pi \cdot r^2 = V/r$ dan $r^0 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h = 2 \cdot r_0$ kelib chiqadi. Demak, hajmi V bo'lgan silindr shaklidagi konserva idishi eng arzon tushishi uchun uning o'q kesimi kvadrat bo'lishi lozim.

2. Iqtisodiy masalalarni yechishning pozinomlar usuli

Pozinomlar funksiyalarning ma'lum turidan iborat bo'lib, pozinom so'zi musbat aniqlangan ma'noni anglatadi. Pozinomlar muhim xossalarga ega, ular iqtisodiy masalalarni yechishda asqotadi.

7.11-*ta'rif.* *Ushbu* $f(x) = c \cdot x^{\alpha}$, $c>0$, $\alpha \in R$, $x>0$ *ko'rinishdagi funksiya bir o'zgaruvchili bir hadli pozinom deyiladi.*

7.12-*ta'rif.* *Ushbu*

$$f(x) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + \ldots + C_n x^{\alpha_n}, C_i > 0, \quad \alpha_i \in R, \ i = \overline{1, n}. \qquad (7.31)$$

ko'rinishdagi funksiya bir o'zgaruvchili n hadli pozinom deyiladi.

7.13-*ta'rif.* *Agar* (7.31) *pozinom uchun ushbu*

$$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ldots + C_n\alpha_n = 0$$

sonli tenglik o'rinli bo'lsa, (7.31) *pozinom regulyar deyiladi.*

7.11-teorema. Agar (7.31) pozinom noregulyar bo'lib, biror α_i va α_j, $i \neq j$ juftlik uchun $\alpha_i \alpha_j < 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, (7.31) pozinomni $x = x_0 y$ almashtirish yordamida yangi o'zgaruvchi y bo'yicha regulyar pozinomga keltirish mumkin, unda x_0 ushbu

$$C_1\alpha_1 x^{\alpha_1} + C_2\alpha_2 x^{\alpha_2} + \ldots + C_n\alpha_n x^{\alpha_n} = 0 \qquad (7.32)$$

tenglamaning musbat yechimidan iborat.

Ko'pgina iqtisodiy masalalarni yechish jarayonida pozinom ko'rinishidagi funksiyalarning eng kichik qiymatini topishga kelib qolinadi. Shunda quyidagi teoremalardan foydalanish tezgina natija beradi.

7.12-teorema. Agar (7.31) pozinom regulyar bo'lsa, u o'zining eng kichik qiymatiga $x=1$ bo'lganda erishadi, ya'ni, agar *

* *μ - pozinomlarning eng kichik qiymatini anglatuvchi maxsus belgi.*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = 0 \quad \text{bo‘lsa,} \quad \mu f = \min \sum_{i=1}^{n} c_i x^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i = f(1)$$

bo‘ladi.

Misollar.

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Bu regulyar pozinom, demak, $\min f(x) = \mu f =$ $=1+1=2$.

2. $f(x) = x + x^{-\sin^2\alpha} + x^{-\cos^2\alpha}$. Bu ham regulyar pozinom. Shuning uchun $\mu f = f(1) = 3$.

3. $f(x) = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \ldots + \dfrac{1}{x^n}$, $x>0$. Bu regulyar pozinom, chunki

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-2) + \ldots + 1\cdot(-n) = \frac{n(n+1)}{2} - (1+2+\ldots+n) = 0.$$

Demak, $\mu f = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} + 1 + 1 + \ldots + 1 = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} + n$.

7.13-teorema. Agar (7.31) pozinom noregulyar bo‘lib, x_0 son (7.32) tenglamaning musbat yechimi bo‘lsa, u o‘zining eng kichik qiymatiga $x=x_0$ bo‘lganda erishadi, ya’ni,

$$\mu f = f(x_0),\ f(x_0 y) = f_*(y),\ \mu f_*(y) = f_*(1).\ = f(x_0)$$

Misollar.

1. $x\cdot y = S,\quad x + y \to \min$.

$f(x) = x + S/x \to \min$; bu pozinom, chunki biz bu masala bilan tanishmiz. Agar $S=1$ bo‘lsa, $\mu f = 1+1 = 2$ bo‘ladi. Endi $S\neq 1$ bo‘lsin. Unda x_0 ni topamiz:

$$1\cdot 1\cdot x + S\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x} \to x_0 = \sqrt{S},\ y_0 = \sqrt{S}.$$

Shuning uchun

$$\mu f = f(\sqrt{S}) = \sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S} + \frac{\sqrt{S}\cdot\sqrt{S}}{\sqrt{S}} = 2\sqrt{S}.$$

Shu pozinomni regulyar ko‘rinishga keltiraylik:

$$f(x)=f(x_0y)=f(\sqrt{S}y)=\sqrt{S}y+S/(\sqrt{S}y)=\sqrt{S}y+\sqrt{S}/y.$$

Shunday qilib, $f(x)=x+S/x=f_*(y)=\sqrt{S}\cdot(y+1/y)$.

Ko'rinadiki, $\mu f=f(\sqrt{S})=\mu f_*=f_*(1)$.

2. Eng yaxshi konserva idishi haqidagi masalani ko'raylik. Unda, ma'lumki $S(r)=2\pi\cdot r^2+2V/r\to\min$, $r>0$ masalani yechish lozim edi. Ko'rinadiki, $S(r)$ funksiya pozinom. Regulyarlikka tekshiramiz: $2\pi\cdot 2+2V\cdot(-1)=2\cdot(2\pi-V)$. Agar $V=2\pi$ bo'lsa, pozinom regulyar bo'ladi. Ammo iqtisodiy ma'nosi bo'yicha hech mahal hajmi (V) irratsional qilib tanlanmaydi. Shuning uchun $V\neq 2\pi$ deylik. Unda r_0 ni topamiz:

$$2\pi\cdot 2r^2+2V\cdot(-1/r)\to r_0=\sqrt{V}/\sqrt{2\pi}\,,\qquad h_0=2\cdot r_0.$$

Demak, $\mu S=S(r_0)$. Endi $S(r)$ ni regulyar ko'rinishga keltiraylik. Shunday qilib, $f_*(y)=(Vy^2+2V/y)/r_0$ pozinomga egamiz, u regulyar,

$$S(r)=S(r_0y)=2\pi r_0^2y^2+\frac{2V}{r_0y}=\frac{1}{r_0}\left(2\pi r_0^3y^3+\frac{2V}{y}\right)=\frac{1}{r_0}\left(Vy^2+\frac{2V}{y}\right).$$

Shunday qilib, $f_*(x)=\frac{1}{r_0}\left(Vy^2+\frac{2V}{y}\right)$ pozinomga egamiz, u regulyar, chunki $V\cdot 2+2\cdot V\cdot(-1)=0$. Demak,

$$\mu f=f(r_0)=f_*(1)=\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}\cdot(V+2V)=3\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}\,.$$

7-bobga oid masalalar

I. Quyidagi funksiyalarning kritik nuqtalari topilsin va ekstremumga tekshirilsin ($N=1,2,3,\ldots$):

1. $y=\frac{1}{N}x^2-2N\cdot x$, 2. $y=N\cdot x^3+3N\cdot x$

3. $y=\sqrt[3]{N\cdot x-N^2}$ 4. $y=N\cdot x\cdot(x-N)^3$

5. $y=x^2-(N+1)\cdot|x|+N$ 6. $y=x^2+(N+1)\cdot|x|+N$

II. Quyidagi ekstremal masalalar yechilsin (N=1,2,3,...):

1. $y=\frac{1}{3}\cdot x^3(4-N\cdot x)\to\max,\quad 0<x<\frac{4}{N}$.

2. $y=5\cdot x\cdot\sqrt{N-x^2}\to\max,\quad 0<x<\sqrt{N}$.

3. $y=3\cdot x\cdot(4-N\sqrt{x})\to\max,\quad 0<x<16/N^2$.

4. $y=\frac{N}{4}x^2+\frac{5}{N\,x}\to\min,\quad x>0,\quad (0<x<+\infty)$.

5. $y=N\cdot x+\frac{3}{N\cdot x^2}\to\min,\quad x>0$.

6. $y=N\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\to\max,\quad x>0$.

III. Quyidagi funksiyalarning statsionar nuqtalari topilsin va har bir statsionar nuqta uchun mos kvadratik forma tuzilsin (N=1,2,3,...) va shartsiz ekstremum masalasi yechilsin:

1. $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2-2x_1+N\cdot x_2$.

2. $f(x_1,x_2)=N\cdot x_1^2+x_2^2-4x_1+2x_2$.

3. $f(x_1,x_2)=N\cdot x_1x_2+\frac{10}{x_1}+\frac{N}{x_2}$.

4. $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2-(N-1)x_2^2+16x_1+12x_2$.

5. $f(x_1,x_2)=x_1^2-3x_1x_2+x_2^2-2x_1-N\cdot x_2$.

6. $f(x_1,x_2)=N\cdot x_1x_2-\frac{1}{2}x_1^2x_2+\frac{1}{2}x_1x_2^2$.

IV. Quyidagi shartli ekstremum masalalari Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan yechilsin (N=1,2,3,...):

1. $f(x_1,x_2)=2x_1-Nx_2 \to extr, \quad g(x_1,x_2)=Nx_1^2+x_2^2+1=0$.

2. $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+Nx_2^2 \to extr, \quad g(x_1,x_2)=2x_1+Nx_2-1=0$.

3. $f(x_1,x_2)=2x_1^2-x_2^2+Nx_1 \to extr, \quad g(x_1,x_2)=x_1+Nx_2-N=0$.

4. $f(x_1,x_2)=e^{4x_1x_2} \to extr, \quad g(x_1,x_2)=Nx_1+x_2-4=0$.

V. IV bo'limdagi masalalar chiqarish usuli bilan yechilsin.

VI. 3-bobga oid masalalar ichida II, III, IV bo'limlardagi masalalar Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan yechilsin.

VII. II bo'limdagi 1–6 masalalar tengsizliklar usuli bilan, 7–12 masalalar esa pozinomlar usuli bilan yechilsin.

7-bobga oid nazorat savollari

1. Bir va ko'p argumentli funksiyalarning kritik nuqtalari ta'rifini keltiring.

2. Bir va ko'p argumentli funksiyalarning ekstremumlari va ekstremal qiymatlari ta'rifini ayting.

3. Chiziqsiz dasturlash masalalari qo'yilishini aytib bering.

4. Chiziqsiz dasturlash masalalari uchun $\overline{P_K}$ *va* $\overline{P_N}$ *to'plamlar nimani anglatadi?*

5. Chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum masalasi yechimi mavjud bo'lishining zaruriy, yetarli sharti qanday ifodalanadi?

6. Shartsiz minimum masalasiga oid misollar keltiring.

7. Shartli minimum masalasi yechimi mavjud bo'lishi uchun zaruriy, yetarli shartlar qanday ifodalanadi?

8. Shartli minimum masalasini chiqarish usuli bilan yechish qanday bajariladi?

9. Lagranj ko'paytuvchilari usuli mohiyatini so'zlab bering.

10. Masaladagi funksiyalar qanday shartlarni qanoatlantirganda uni yechish uchun burchak koeffitsientlarni tenglashtirish usulini qo'llash mumkin?

11. Geometrik dasturlashning mohiyati nima?

12. Tengsizliklar usuli qanday masalani yechib beradi?

13. Pozinomlar ta'rifini bering.

14. Pozinomlar usuli yordamida qanday masalalar yechiladi?

15. Tengsizliklar va pozinomlar usuli bilan yechiladigan iqtisodiy masalalarga misol keltiring.

8-BOB. IQTISODIY JARAYONLARNING SILLIQMAS MASALALAR KO'RINISHIDA TAVSIFLANADIGAN MATEMATIK MODELLARI

Silliqmas masalalarga to'xtalishdan avval silliq masalalar, silliq funksiyalar tushunchasini eslatib o'tamiz.

8.1-*ta'rif*. Agar $f(x)$, $x \in P \subset E^n$ funksiya biror $x^0 \in P$ nuqtada *k*-tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, uni *k-tartibli silliq funksiya* deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya silliq deyilgan bo'lsa, unda uning 1-tartibli silliqligi nazarda tutiladi.

Masalaning qo'yilishida ishtirok etgan funksiyalar silliq bo'lsa, o'sha masalalarni *silliq masalalar* deyiladi.

Avvalgi bobda ko'rilgan chiziqsiz dasturlash masalalari silliq edi. Unda funksiyalarning 2 marta uzluksiz hosilalarga ega bo'lishi talab etilgan. Ammo doim silliq masalalarga duch kelavermaymiz. Masalada ishtirok etayotgan funksiyalar u yoki bu nuqtalarda hosilaga ega bo'lmasligi mumkin. Agar funksiya uzluksiz bo'lib, chekli sondagi nuqtalarda birinchi yoki ikkinchi tur uzilishga ega bo'lsa, turli shartlar bajarilganda funksiyaning ekstremumlarini yoki ekstremal qiymatlarini topish masalasi *silliqmas masala* deyiladi. Bunday masalalar ham o'rganilgan, ba'zi hollarda masala yechimga ega bo'lishi uchun zaruriy, yetarli shartlar ishlab chiqilgan.

8.1-§. Yo'nalish bo'yicha hosila

Silliqmas masalalarni yechishning turli usullari, shu jumladan, taqribiy usullari ham mavjud. Yo'nalish bo'yicha hosila tushunchasidan foydalanish usuli shular jumlasidandir. Yo'nalish bo'yicha hosila tushunchasi oddiy hosila tushunchasining bevosita umumlashtirilishidan iborat. Shu sababli avval funksiyaning nuqtada va sohada hosilasi tushunchasini eslatib o'tamiz.

8.1-ta'rif. *Biror $P \subset E^n$ sohada aniqlangan va uzluksiz funksiya $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ berilgan bo'lsin. Agar $x^0 \in P$ning $(n-1)$ta koordinatasi tayinlangan, ya'ni $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, \quad x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ bo'lsa, funksiyadan x_i bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ quyidagi limitga teng bo'ladi:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f_\bullet(x_i+\Delta x_i)-f_\bullet(x_i)}{\Delta x_i},$$

bunda $f_\bullet(x_i)=f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)$. *Har bir argument bo'yicha olingan hosila* *__xususiy hosila__* *deyiladi.*

Bir argumentli funksiya uchun hosila

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

munosabat bilan aniqlanadi. Albatta bu ta'riflarda tegishli limitlar mavjud bo'lganda hosila nuqtada yoki sohada mavjud bo'ladi. Agar biror nuqtada hosila mavjud bo'lmasa, demak, biz silliqmas masalaga kelib qolamiz. Misol sifatida $y=|x|$ funksiya uzluksiz, ammo $x_0=0$ nuqtada hosilasi mavjud emasligini ko'rsataylik. Uning uchun $x_0=0$ nuqtada funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining $\Delta x>0$ da limitini hisoblashga harakat qilaylik:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0,\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$

Yagona limit mavjud emas. Demak, $x=0$ da hosila mavjud emas.

Oddiy hosilada argument orttirmasi gorizontal o'q bo'yicha berilayapti. Agar orttirmani biror l yo'nalish bo'yicha berilsa nima bo'ladi? – degan savol qo'yamiz. Bu hol bizni yo'nalish bo'yicha hosila tushunchasiga olib keladi.

1. Deylik, z=*f*(*x*), $x\in E^n$ funksiya berilgan va l berilgan n o'lchovli vektor-yo'nalish. Ravshanki, $\tilde{l}=\frac{l}{|l|}$, ya'ni $\|\tilde{l}\|=1$. Berilgan yo'nalish l birlik vektor bo'lsin: $\|l\|=1$

8.3.-*ta'rif.* *Agar ushbu*

$$\lim_{k\to +0}\frac{f(x^0+k\,l)-f(x_0)}{k},\ (x^0+k\,l)\in E^n,\ \|l\|=1,\ x^0\in E^n \tag{8.1}$$

limit mavjud bo'lsa, shu limit z=*f*(*x*) *funksiyadan* $x^0\in E^n$ *nuqtada* l

yo'nalish bo'yicha olingan hosila deyiladi va $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial l}$ *kabi belgilanadi.*

Tushunarli bo'lishi uchun $n=2$ bo'lgan $z=f(x_1,x_2)$ holni ko'raylik. Unda l yo'nalish bilan $0x_1$ va $0x_2$ o'qlar orasidagi burchaklar mos ravishda α va β ($\beta=90^0\alpha$) bo'lsin. Argument orttirmalari $x_1+\Delta l\cdot\cos\alpha$, $x_2+\Delta l\cdot\cos\beta$ bo'ladi. Funksiya orttirmasi quyidagicha yoziladi:

$$\Delta z = f(x_1+\Delta l\cdot\cos\alpha,\, x_2+\Delta l\cdot\cos\beta) - f(x_1,x_2),\quad \| l \| = 1.$$

Agar $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta l}$ mavjud bo'lsa, u $z=f(x_1,x_2)$ funksiyadan $x=(x_1,x_2)$ nuqtada l yo'nalish bo'yicha olingan hosila bo'ladi. Ravshanki, $\Delta l\cdot\cos\alpha=k\cdot l_1$, $\Delta l\cdot\cos\beta=k\cdot l_2$ va $\cos\alpha$, $\cos\beta$ yo'naltiruvchi kosinuslar deyiladi.

Misollar.

1. $z=f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2,\ l=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad x^0=(0,0),\quad \| l \|=1.$

$$\frac{\partial f(0{,}0)}{\partial l}=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left\{\left[(0+kl_1)^2+2(0+kl_2)\right]-(0^2+2\cdot 0)\right\}=2l_2=\sqrt{2}\,.$$

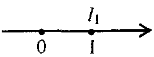
2. $z=f(x_1,x_2)=x_1^2+|x_2-1|,\quad l=(1;2),\quad x^0=(0,1)$,

bunda $\quad \| l \|=\sqrt{5}\neq 1,\quad \tilde{l}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right),\quad \| \tilde{l} \|=1$

$$\frac{\partial f(0{,}1)}{\partial \tilde{l}}=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left\{\left[\left(0+k\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left|1+k\frac{2}{\sqrt{5}}-1\right|\right]-\left(0^2+|1-1|\right)\right\}=$$

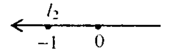
$$=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{5}k^2+\frac{2}{\sqrt{5}}k\right)=\lim_{k\to+0}\left(\frac{1}{5}k+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

3. $f(x)=|x|,\ x^0=1,\ l=1,\ \| l \|=1,$



$$\frac{\partial f(0)}{\partial l_1}=\lim_{k\to+0}\frac{|0+k\cdot 1|-|0|}{k}=\lim_{k\to+0}\frac{k}{k}=1$$

4. $f(x)=|x|,\ x^0=1,\ l=-1,\ \|l\|=1,$



$$\frac{\partial f(0)}{\partial l_2}=\lim_{k\to+0}\frac{|0+k\cdot(-1)|-|0|}{k}=\lim_{k\to+0}\frac{k}{k}=1$$

2. Agar $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x),\ \ x\in E^n$, funksiya berilgan $x^0\in E^n$ nuqtada barcha argumentlari bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsa, shu funksiyadan x_0 nuqtada berilgan l, $\|l\|$ yo'nalish bo'yicha hosila osongina hisoblanadi. Quyida shu hisoblash formulasini keltiramiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\cdot\cos\alpha_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\cdot\cos\alpha_2+\ldots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\cdot\cos\alpha_n=$$

$$=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\cdot l_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\cdot l_2+\ldots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\cdot l_n\ . \tag{8.2}$$

Misollar ko'ramiz:

1. $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2,\ l=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \ x^0=0$.

Avval $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}$ va $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}$ miqdorlarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=1,\qquad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}=3.$$

Endi $\frac{\partial f(x^0)}{\partial l}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l}=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot\sqrt{3}+1}{2}.$$

2. $f(x_1,x_2)=\frac{1}{3}x_1^3+\frac{1}{2}x_2^2-2x_1+3x_2+5,\ l=(3;\ 4),\ \ x^0=(1,-2)$.

Ravshanki, $\|l\|=5\neq1,\ l_*=\frac{l}{\|l\|}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ Endi $\frac{\partial f(x^0)}{\partial l_*}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = (x_1^2 - 2)\Big|_{x^0} = 1 - 2 = -1, \quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} = (x_2 + 3)\Big|_{x^0} = -2 + 3 = 1,$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l_*} = (-1)\cdot\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

3. $f(x_1, x_2) = 2\sin x_1 + 5\cos x_2$, $l = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $x^0 = \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$.

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = 2\cos x_1\Big|_{x^0} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} = -5\sin x_2\Big|_{x^0} = -5\sin\frac{\pi}{6} = -5\cdot\frac{1}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} = 1\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}.$$

8.2-§. Yo‘nalish bo‘yicha hosila yordamida chiziqsiz dasturlashning shartsiz va shartli minimum masalalarini yechish

1. Shartsiz minimum masalasini yechish. Shartsiz minimum masalasining qo‘yilishini eslatamiz ((7.1)ga qarang):

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min, \quad x \in E^n.$$

Faraz etaylik, $z = f(x)$ funksiya E^n fazoda aniqlangan va uning har bir nuqtasida ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha hosila mavjud bo‘lsin. Bu funksiyaning differensiallanuvchi bo‘lishi talab etilmaydi. Shuning uchun berilgan funksiyaning kritik nuqtalarida mahalliy minimum (maksimum) mavjudligi shartlari tekshiriladi.

8.1-teorema (zarurlik sharti). Agar $x_0 \in E^n$ nuqta (7.1) masala uchun kritik nuqta bo‘lsa, $z=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘zining minimumiga (maksimumiga) erishishi uchun uning x_0 nuqtada ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha hosilasi ushbu

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} \geq 0, \quad \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} \leq 0\right) \tag{8.3}$$

tengsizlikni qanoatsizlantirishi zarur.

Eslatma. Qavariq funksiyalar uchun (8.3) shart hatto yetarli shart vazifasini bajaradi.

8.1-teoremaning *isboti.* Faraz etaylik, shunday yo‘nalish $\tilde{l}$, $\|\tilde{l}\|=1$ topiladiki,

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} = \alpha < 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda ta’rif bo‘yicha shunday $\bar{\varepsilon} > 0$ son topiladiki, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ bo‘lganda

$$\frac{f(x^0 + \varepsilon \cdot \tilde{l}) - f(x^0)}{\varepsilon} < \frac{\alpha}{2}$$

tengsizlik bajariladi. Unday bo‘lsa, x^0 nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida shunday $\tilde{x} + \varepsilon \cdot \tilde{l}$ nuqtani topish mumkinki, shu $\tilde{x}$ nuqta uchun ushbu

$$f(x) < f(x^0) + \frac{\varepsilon \cdot \alpha}{2} < f(x^0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu x^0 nuqtaning minimum nuqtasi ekaniga zid.

8.2-teorema. Faraz etaylik, $z=f(x)$ funksiyaning x^* nuqtada barcha yo‘nalishlar bo‘yicha hosilasi mavjud bo‘lsin. Agar x^* nuqtada barcha $l, \|l\|=1$ yo‘nalishlar bo‘yicha $\frac{\partial f(x^*)}{\partial l} > 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda x^* nuqta $z=f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi.

Isbot. $\frac{\partial f(x^*)}{\partial l}$ hosila $\|l\|=1$ sferada ekstremal qiymatlarga erishadi.

Eng kichik qiymatni α deymiz: $\alpha = \min\limits_{\|l\|=1} \frac{\partial f(x^*)}{\partial l}$.

Shart bo‘yicha $\frac{\partial f(x^*)}{\partial l} > 0$ bo‘lgani uchun $\alpha>0$ bo‘ladi. Yo‘nalish bo‘yicha hosila ta’rifiga ko‘ra shunday $\varepsilon>0$ son mavjudki, $0<\beta<\varepsilon$ dan olingan ixtiyoriy β lar uchun va har bir $l, \|l\|=1$ uchun ushbu

$$\frac{f(x^*+\beta l)-f(x^*)}{\beta}>\frac{\alpha}{2} \tag{8.4}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $y=x^*+\beta l$ nuqtalar ixtiyoriy β, l, $0<\beta<\varepsilon$, $\|l\|=1$ uchun x^* nuqtaning ε – atrofni to'ldiradi va shu y lar uchun (8.4) dan $f(y)\geq f(x^*)$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu x^* – minimum nuqtasi ekanini anglatadi.

Misollar ko'ramiz.

1. Avval ko'rilgan $y=f(x)=|x|$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu funksiya uchun yo'nalishlar faqat 2 ta: $l_1=1$, $l_2=-1$. Shu yo'nalishlar bo'yicha hosilalarni yagona kritik $x=0$ nuqtada hisoblaganmiz: $\frac{\partial f(0)}{\partial l_1}=\frac{\partial f(0)}{\partial l_2}=1>0$. Bundan $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga erishishi kelib chiqadi.

2. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1\to extr$, $(x_1,x_2)\in E^2$ masalani ko'ramiz.

Bu holda statsionar nuqta yagona: (0;0), chunki $\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2$ larga ko'ra $x^0=(0;0)$ bo'ladi. $l=(l_1,l_2)$ – ixtiyoriy birlik yo'nalish bo'lsin. Endi hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=0\cdot l_1+0\cdot l_2=0.$$

Zarurlik sharti bajarilayapti. Ammo berilgan funksiya qavariqligidan bu yetarli shart ham bo'ladi. Shuning uchun $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$ funksiya $x=(0;0)$da minimumga erishadi va $f_{\min}=f(0;\ 0)=-1$. Bu hol geometrik nuqtayi nazardan ham ravshan. $z=x_1^2+x_2^2-1$ ning grafigi vertikal o'qli paraboloiddan iborat. Uning uchi $(0;0;\ -1)$ nuqtada.

3. $f(x_1,x_2)=|\,x_1\,|+N\cdot x_2\to extr$, $l=(l_1,l_2)$ – ixtiyoriy, $\|l\|=1$, $x^0=(0,x_2^0)$.

$$\frac{\partial f(0,x_2^0)}{\partial l}=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left\{\left[\,|\,0+k\cdot l_1\,|+N\cdot(x_2^0+k\,l_2)\right]-\left[0+N\cdot x_2^0\right]\right\}=$$

$$=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left\{k\cdot|\,l_1\,|+N\cdot x_2^0+k\,N\,l_2-N\cdot x_2^0\right\}=|\,l_1\,|+N\,l_2\,.$$

Oxirgi $|\,l_1\,|+N\,l_2$ ifoda ixtiyoriy l_1 va l_2 lar uchun o'z ishorasini saqlamaydi, Demak, berilgan funksiya ekstremumga ega emas.

4. $f(x_1,x_2)=|\,x_1+1\,|+N\cdot|\,x_2-2\,|\to extr,\ l=(l_1,l_2)\,,x^0=(-1,2),$ $\|\,l\,\|=1.$

Berilgan funksiya yagona kritik nuqtaga ega: $x^0=(-1,2)$.

$$\frac{\partial f(-1,2)}{\partial l}=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left\{\left[\,|-1+k\cdot l_1\,|+N\cdot|\,2+k\,l_2-2\,|\right]-0\right\}=$$

$$=\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}\left\{\left[k\cdot|\,l_1\,|+k\cdot N\cdot|\,l_2|\right]\right\}=|\,l_1\,|+N\cdot|\,l_2\,|>0$$

Demak, berilgan funksiya $x^0=(-1,2)$ kritik nuqtada minimumga erishadi va $f_{min}=f(-1,2)=0$.

2. Shartli minimum masalasini yechish. Ma'lumki, shartli minimum masalasi 2 turli: shartlari tengliklar bilan berilgan va shartlari tengsizliklar bilan berilgan masalalar.

Yo'nalish bo'yicha hosila shartlari tengsizliklar bilan berilgan (7.3) masalani yechishga tatbiq etilgan. (7.3) masalani eslatamiz:

$$f(x)\to\min,\ g_1(x)\le 0,\ g_2(x)\le 0,\ldots,g_k(x)\le 0\,.$$

Bunda $f(x)$, $g'(x)=(g_1(x),g_2(x),\ldots,g_k(x))$ funksiyalarning differensiallanuvchi bo'lishi talab etilmaydi.

8.3-*ta'rif*. *Agar biror* $x\in\overline{P}_N$ *nuqtada faol bo'lgan tengsizliklar uchun*

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial l}<0,\ \|\,l\,\|,\ i=i_1,i_2,\ldots,i_s,\quad s\le k$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, l *— joiz yo'nalish deyiladi.*

8.3-teorema. Agar $x^0\in\overline{P}_N$ nuqta (7.3) masalaning yechimi bo'lsa, u holda barcha joiz yo‘nalishlar $\tilde{l}$ bo‘yicha ushbu

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} \geq 0, \quad \tilde{l} \text{ — joiz yo‘nalishlar,}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teoremani noto‘g‘ri deb faraz etaylik. Unda shunday joiz yo‘nalish $\tilde{l}$ topiladiki, shu $\tilde{l}$ uchun ushbu

$$\frac{\partial g_i(x^0)}{\partial \tilde{l}} < 0, \quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} = \alpha < 0$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Endi $x(\beta) = x^0 + \beta \cdot \tilde{l}$, $\beta > 0$ vektorni ko‘raylik. Shunday $\varepsilon > 0$ son topiladiki, $0 < \beta < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha β lar uchun $x(\beta)$ nuqta joiz bo‘ladi, ya’ni $g_i(x(\beta)) \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Haqiqatdan, x^0 nuqtada faol bo‘lgan tengsizliklardagi $g_i(x)$, $i = i_1, i_2, \ldots, i_{k'}$, funksiyalar uchun shunday $\varepsilon_i > 0$ topiladiki, quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{g_i(x^0 + \beta \cdot \tilde{l}) - g_i(x^0)}{\beta} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial \tilde{l}} < 0, \quad 0 < \beta < \varepsilon.$$

Shuning uchun barcha β, $0 < \beta < \min \varepsilon_i$ $(i = i_1, i_2, \ldots, i_n)$ lar uchun

$$g_i(x^0 + \beta \cdot \tilde{l}) < g_i(x^0) \leq 0, \quad i = i_1, i_2, \ldots, i_n.$$

Zarurat tug‘ilganda $\varepsilon_i$ni kamaytirsak, $g_i(x)$ning uzluksizligi va $g_i(x^0) < 0$, $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_n$ dan sust $g_i(x)$ funksiyalar uchun

$$g_i(x^0 + \beta \cdot \tilde{l}) \leq 0, \quad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_n$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, $x(\beta)$ $0 < \beta \leq \varepsilon$ nuqtalar joiz. Endi 8.1-teoremaga asosan $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} \geq 0$ kelib chiqadi. *Teorema isbot bo‘ldi.*

8.4-teorema. (7.3) masalaning kritik nuqtasi $x^0 \in \overline{P}_N$ shu masalaning yechimi bo‘lishi uchun barcha joiz yo‘nalishlar $\tilde{l}$ bo‘yicha

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} > 0, \quad \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} < 0\right)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi yetarli.

Misol. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 3 \to \max, \quad x_1 + 5x_2 = 6$.

Bu masalada $g(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 - 6 = 0$. Joiz yo‘nalishlarni topamiz:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 5, \qquad \tilde{l} : \frac{\partial g}{\partial l} = 1 \cdot \tilde{l}_1 + 5 \cdot \tilde{l}_2 = \tilde{l}_1 + 5 \cdot \tilde{l}_2 < 0.$$

Endi $\dfrac{\partial f(x)}{\partial \tilde{l}}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} = x_2^0 \cdot l_1 + x_1^0 \cdot l_2,$$

bu yerda $(x_1^0, x_2^0) = x^0$ – shartli statsionar nuqta. Uni topamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + 3 + \lambda \cdot (x_1 + 5x_2 - 6),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + 5\lambda.$$

Quyidagi sistemani yechamiz:

$$x_2 + \lambda = 0, \quad x_1 + 5 \cdot \lambda = 0, \quad x_1 + 5x_2 = 6.$$

Bundan $x_1 = -5 \cdot \lambda, \quad x_2 = -\lambda, \quad -5 \cdot \lambda - 5 \cdot \lambda = 6 \Rightarrow \lambda^0 = -\dfrac{3}{5};$

$$x\frac{0}{1} = 3; \quad x\frac{0}{2} = \frac{3}{5};$$

Shuning uchun

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} = \frac{3}{5} \cdot \tilde{l}_1 + 3 \cdot \tilde{l}_2 = \frac{3}{5} \cdot \left(\tilde{l}_1 + 5 \cdot \tilde{l}_2\right) < 0.$$

Demak, $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} < 0$ dan berilgan funksiya $x^0 = \left(3, \dfrac{3}{5}\right)$ nuqtada maksimumga erishishi kelib chiqadi.

8.3-§. Shartli minimum (maksimum) ga oid iqtisodiy masalalar

Shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum (maksimum) masalasini yechishda joiz yo'nalish tushunchasi *kiritilmagan*. Bu holda shu masala shartlari tengsizliklar bilan berilgan *qanday* shartli minimum (maksimum) masalasiga teng kuchli ekani aniqlab olinadi, so'ngra tegishli joiz yo'nalishni topish mumkin bo'ladi. Mazkur paragrafda xuddi shunday holga oid masalalar ko'riladi.

1-masala. Yuzi S ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlari qanday bo'lganda uning perimetri eng kichik bo'ladi?

Yechish. Masalaning modeli $f(x_1,x_2)=x_1+x_2 \to \min$, $x_1 \cdot x_2 = S$ kabi yoziladi. Ma'lumki, bu masala uchun shartli-statsionar nuqta bitta $x_0=(\sqrt{S},\sqrt{S})$.

Qo'yilgan masala ushbu

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2 \to \min, \quad g(x_1,x_2)=S-x_1x_2 \le 0$$

masalaga ekvivalent, ya'ni yuzi x_1x_2 berilgan S dan kichik bo'lmagan to'g'ri to'rtburchaklar ichida perimetri eng kichigi topilishi kerak. Endi joiz yo'nalishlarni topamiz:

$$\frac{\partial g(x^0)}{\partial \tilde{l}} = -\sqrt{S}\cdot\tilde{l}_1 - \sqrt{S}\cdot\tilde{l}_2 = -\sqrt{S}\cdot(\tilde{l}_1+\tilde{l}_2) < 0$$

Demak, $\tilde{l}:\ \tilde{l}_1+\tilde{l}_2>0$. Shu yo'nalishlar bo'yicha $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} = 1\cdot\tilde{l}_1 + 1\cdot\tilde{l}_2 = \tilde{l}_1+\tilde{l}_2 > 0.$$

Shunday qilib, $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ funksiya $x_0=(\sqrt{S},\sqrt{S})$ nuqtada minimumga erishadi.

2-masala. Perimetri $2p$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi uning tomonlari qanday bo'lganda eng katta bo'ladi?

Yechish: Bu masala quyidagicha yoziladi: $f(x_1,x_2)=x_1x_2 \to \max$, $x_1+x_2=p$. Shartli-statsionar nuqta $x^0=\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2}\right)$. Masala quyidagi masalaga ekvivalent:

$$f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\to\max,\qquad g(x_1,x_2)=x_1+x_2-p\le 0,$$

buni quyidagicha izohlash mumkin: yarim parametri x_1+x_2 berilgan p sondan katta bo‘lmagan to‘g‘ri to‘rtburchaklar ichida yuzi eng kattasi topilsin.

Joiz yo‘nalishlarni topamiz:

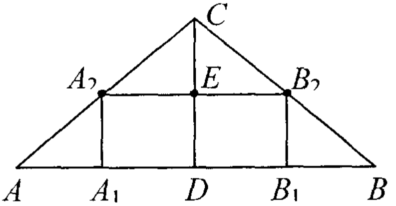
$$\frac{\partial g(x^0)}{\partial\tilde{l}}=1\cdot\tilde{l}_1+1\cdot\tilde{l}_2=\tilde{l}_1+\tilde{l}_2<0,\qquad \tilde{l}:\ \tilde{l}_1+\tilde{l}_2<0.$$

Endi $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial\tilde{l}}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial\tilde{l}}=x_2^0\cdot\tilde{l}_1+x_1^0\cdot\tilde{l}_2=\frac{p}{2}\left(\tilde{l}_1+\tilde{l}_2\right)<0\,.$$

Demak, $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$ funksiya $x^0=\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$ nuqtada maksimumga erishadi.

3-masala (eng yaxshi konserva idishi haqida). Hajmi V bo‘lgan silindr shaklidagi konserva idishining balandligi va asos radiusi qanday bo‘lganda uni yasash uchun eng kam material ketadi?



8.1- chizma

Yechish. Bu masala quyidagicha yoziladi:

$$S(r,h)=2\pi\cdot r^2+2\pi\cdot r\cdot h\to\min,\qquad V=\pi\cdot r^2h$$

Ma’lumki, bu holda shartli-statsionar nuqta

$$(r_0,h_0)=\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\ 2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right).$$

3-masala ushbu

$$f(x_1,x_2)=2\pi\cdot x_1^2+2\pi\cdot r\cdot x_2\to\min,\qquad g(x_1,x_2)=V-\pi\cdot x_1^2x_2\le 0\,.$$

masalaga ekvivalent. Joiz yo‘nalishlarni topamiz:

$$\frac{\partial g(x^0)}{\partial \tilde{l}} = -\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2} \cdot (\tilde{l}_2 + 4 \cdot \tilde{l}_1) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2\pi \cdot V^2} \cdot (4 \cdot \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) < 0.$$

Bundan $\tilde{l}$: $4 \cdot \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 > 0$ ekani kelib chiqadi.

Endi $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}}$ ni hisoblaymiz: $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \tilde{l}} = \sqrt[3]{2\pi \cdot V} \cdot (4\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) > 0.$

Demak, $f(x_1, x_2)$ funksiya x^0 nuqtada minimumga erishadi.

4-masala. Asosi a ga, balandligi h ga teng bo'lgan uchburchak shaklidagi (o'tkir burchakli uchburchak) materialdan maksimal yuzali to'g'ri to'rtburchak kesib olinsin.

Yechish. Bunday to'rtburchakning asosi uchburchak asosida, ikkita uchi uning yon tomonlarida yotishi lozimligi ravshan (8.1-chizmaga qarang).

Masalaning matematik modelini quramiz. Belgilashlar kiritamiz: $A_1B_1 = x_1$, $B_1B_2 = x_2$, $CD = h$, $AB = a$.

Chizmaga ko'ra $\Delta ABC \sim \Delta A_2CB_2$, bundan $\dfrac{h}{h - x_2} = \dfrac{a}{x_1}$ yoki $hx_1 + ax_2 = ah$. Demak, biz quyidagi shartli maksimum masalasiga egamiz:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max, \qquad g(x_1, x_2) = h \cdot x_1 + a \cdot x_2 - a \cdot h = 0$$

Bu quyidagi masalaga ekvivalent:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max, \qquad g(x_1, x_2) = h \cdot x_1 + a \cdot x_2 - a \cdot h \le 0.$$

Shartli-statsionar nuqtani topish uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz: $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1x_2 + \lambda(hx_1 + ax_2 - ah)$. Bundan

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda h, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + a\lambda. \qquad \begin{cases} x_2 + \lambda h = 0, \\ x_1 + a\lambda = 0, \\ hx_1 + ax_2 - ah = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\lambda h, \\ x_1 = -a\lambda, \\ -a\lambda h - a\lambda h - ah = 0. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $\lambda^0 = \frac{1}{2}$, $x_1^0 = \frac{a}{2}$, $x_2^0 = \frac{h}{2}$. Shunday qilib, yagona shartli-statsionar nuqta $x^0=\left(\frac{a}{2},\ \frac{h}{2}\right)$ ga egamiz. Endi joiz yo'nalishlarni topamiz:

$\frac{\partial g(x^0)}{\partial \widetilde{l}}=h\cdot\widetilde{l}_1+a\cdot\widetilde{l}_2<0.$ Demak, $\widetilde{l}:\ h\cdot\widetilde{l}_1+a\cdot\widetilde{l}_2<0.$ Endi

$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \widetilde{l}}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \widetilde{l}}=x_2^0\cdot\widetilde{l}_1+x_1^0\cdot\widetilde{l}_2=\frac{h}{2}\cdot\widetilde{l}_1+\frac{a}{2}\cdot\widetilde{l}_2=\frac{1}{2}(h\cdot\widetilde{l}_1+a\cdot\widetilde{l}_2)<0\,.$$

Bu $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$ funksiya $\left(\frac{a}{2},\ \frac{h}{2}\right)$ da maksimumga erishishini anglatadi.

8-bobga oid masalalar

I. Quyidagi differensiallanuvchi funksiyalarning berilgan nuqtada berilgan yo'nalish bo'yicha hosilasi hisoblansin (N=1,2,3,...):

1. $f(x_1,x_2)=x_1^2+N\cdot x_2^2,\quad x^0=(1;2),\quad l=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

2. $f(x_1,x_2)=N\cdot x_1^2+x_2^2,\quad x^0=(2;1),\quad l=\left(-\frac{1}{\sqrt{N}},\ \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\right).$

3. $f(x_1,x_2)=N\cdot x_1+4x_2^2,\quad x^0=(-1;3),\quad l=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

4. $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1+Nx_2^2,\quad x^0=(2;-1),\quad l=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$

5. $f(x_1,x_2)=3x_1x_2-Nx_2^2,\quad x^0=(2;3),\quad l=(2;3),\ \|\, l\,\|\neq 1\,.$

6. $f(x_1,x_2)=x_1x_2^2-x_1^2x_2+Nx_1,\ x^0=(1;-1),\ l=(-1;2),\|\, l\,\|\neq 1\,.$

7. $f(x_1,x_2)=x_1e^{x_2}+\sqrt{x_1x_2},\quad x^0=(4;9),\quad l=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$

8. $f(x_1,x_2)=x_1\cos x_2+x_2\sin x_1,\ x^0=\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right),\ l=\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{8}}{3}\right).$

II. Quyidagi differensiallanuvchi funksiyalarning statsionar nuqtalari topilsin va yo‘nalish bo‘yicha hosila yordamida ekstremumga tekshirilsin (N=1,2,3,...)

1. $f(x_1,x_2)=3x_1^2-x_1x_2-2x_1+Nx_2$.

2. $f(x_1,x_2)=x_1x_2+\dfrac{N}{x_1}+\dfrac{20}{x_2}$.

3. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-4x_1+Nx_2$.

4. $f(x_1,x_2)=Nx_1^2-2x_1x_2-16x_1+12x_2$.

5. $f(x_1,x_2)=Nx_1x_2-x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

6. $f(x_1,x_2)=3x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-Nx_1-12x_2$.

III. Quyidagi shartli-ekstremum masalasi yo‘nalish bo‘yicha hosila yordamida yechilsin:

1. $f(x_1,x_2)=Nx_1+3x_2\to extr,\quad x_1^2+Nx_2^2\le 1$.

2. $f(x_1,x_2)=x_1^2+Nx_2^2\to extr,\quad 3x_1+Nx_2\le 2$.

3. $f(x_1,x_2)=e^{4x_1x_2}\to extr,\quad x_1+Nx_2\le 3$.

4. $f(x_1,x_2)=Nx_1^2-2x_1x_2+x\to extr,\quad Nx_1+x_2\le 1$.

5. $f(x_1,x_2)=Nx_1-2x_1x_2+x_2\to extr,\quad x_1+Nx_2\le 2$.

6. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+Nx_1\to extr,\quad Nx_1+x_2\le 3$.

7. $f(x_1,x_2)=x_1x_2^2+Nx_1-x_2\to extr,\quad x_1+x_2\le 1$.

8. $f(x_1,x_2)=2\pi x_1^2+2x_1x_2\to extr,\quad V-\pi x_1^2\le 0,$

$x_1>0, x_2>0$.

Ko‘rsatma. III bo‘limdagi masalalarni yechish uchun avval shartli statsionar nuqtalarni, joiz yo‘nalishlarni topish kerak.

IV. Quyidagi 2 ta masala shartlari tengliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasiga keladi. Ularni shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasiga keltirib, yo'nalish bo'yicha hosila yordamida yechilsin.

1-*masala.* Hajmi V bo'lgan to'g'ri parallelepipedning o'lchovlari qanday bo'lganda uning to'liq sirti minimum bo'ladi?

2-*masala.* To'liq sirti S bo'lgan to'g'ri parallelepipedning o'lchovlari qanday bo'lganda uning hajmi maksimum bo'ladi?.

8-bobga oid nazorat savollari

1. Bir argumentli funksiya uchun nuqtadagi hosila ta'rifini bering.

2. Bir argumentli funksiya uchun mahalliy maksimum, mahalliy minimum ta'rifini bering.

3. Bir va ko'p argumentli funksiyalarning ekstremumlari deganda nimani tushunasiz?

4. Bir argumentli funksiyalarning ekstremal qiymatlari mavjud bo'lishining yetarli shartlarini aytib bering.

5. Funksiyaning nuqtada berilgan yo'nalish bo'yicha hosilasi ta'rifini bering va uning ma'nosini tushuntiring.

6. Zaruriy, yetarli shartlarning yo'nalish bo'yicha hosila yordamida ta'riflanishini aytib bering.

7. Yo'nalish bo'yicha hosilaning shartsiz minimum masalasini yechishga tatbig'i qanday amalga oshiriladi?

8. Yo'nalish bo'yicha hosilaning shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli minimum masalasini yechishga tatbig'i qanday amalga oshiriladi?

9. Yo'nalish bo'yicha hosilaning iqtisodiy masalalarni yechishga tatbig'ini so'zlab, bir-ikkita masala keltiring.

9-BOB. IQTISODIY JARAYONLARNING EKONOMETRIK MODELLARI VA ULARNI TEKSHIRISHNING MATEMATIK USULLARI

Ekonometrik modellarni o'rganishdan avval ekonometrika haqida qisqacha ma'lumot beraylik.

Ekonometrika — matematik statistika usullari yordamida iqtisodiyotda miqdoriy qonuniyatlar va o'zaro bog'lanishlarni tadqiqot qiladigan fandir. U ko'p yillar davomida kuzatuvlar natijasida olingan statistik ma'lumotlarga asoslanib iqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zgarishini tavsiflaydigan taqribiy (empirik) munosabatlar chiqaradi va iqtisodiy ko'rsatkichlarning keyingi holatini bashorat qiladi. Ekonometrikaning asoslarini norvegiyalik olim Robert Frish (1895—1973) ishlab chiqqan. Uning ta'biricha "*Ekonometrika — iqtisodiy nazariya, matematika va statistikaning sintezidir*".

1931-yilda Jahon ekonometrik jamiyati tuzildi. Shu yil ekonometrika fanining tug'ilgan yili hisoblanadi. Ekonometrika bilan shug'ullanuvchi mutaxassislar "ekonometrist" deb nomlanadi. Ular statistik ma'lumotlarga asoslanib, iqtisodiy-matematik modellar yaratadi, shu modellarda ishtirok etgan parametrlarning qiymatlarini taqriban topadi va baholaydi. Topilgan empirik munosabatlarning ma'nodorligini mavjud iqtisodiy-matematik usullar yordamida tekshiradi.

Statistik ma'lumotlarga asoslanib iqtisodiy jarayonlarning birinchi matematik modelini fransuz olimi, podshoh Lyudovik IVning leyb-medigi, doktor Fransua Kene (1694—1774) yaratgan. XX asrning birinchi yarmida AQSH olimlari K.Kobb (matematik) va P. Duglas (iqtisodchi) 1899—1922-yillarga oid makroiqtisodiy ko'rsatkichlarni o'rganib, AQSHda ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmining o'zgarishi uchun empirik qonun topishgan. Bu qonun keyinchalik Kobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi (1928) deb ataladigan bo'ldi. Bunga o'xshash misollarni ko'plab keltirish mumkin. Ammo yaratilgan munosabatlar (qonunlar) qanchalik ishonchli ekanini tekshirish muhim ahamiyat kasb etadi. Ba'zida bitta jarayon uchun turlicha yondashish yordamida turli munosabatlarni topish mumkin. Ular ichida eng ishonchlisini tanlab olish maqsadga muvofiq bo'ladi. Yaratilgan modellarning ishonchliligini tekshirishning turli belgilari (kriteriylari) mavjud. Fisherning *F*-belgisi, Styudentning *t*-belgisi ular ichida keng tarqalganlaridandir.

9.1-§. Korrelyatsiya, regressiya va ularning modellari haqida

Erkli parametrlar (o‘rganiluvchi faktorlar – omillar) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, erksiz parametr (faktor) Y bo‘lsin. Alohida hollarda Yni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ faktorlarning funksiyasi deb qarash mumkin, ya’ni

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{9.1}$$

Shu (9.1) munosabat (n+1) o‘lchovli R^{n+1} fazoda biror sirtni, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya chiziqli, ya’ni

$$Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \tag{9.2}$$

bo‘lganda (9.2) munosabat R^{n+1} fazoda tekislikni ifodalaydi.

Agar Y hosil hajmi bo‘lsa, u sug‘orishlar soniga, ishlatilgan ozuqa hajmiga, havoning haroratiga va boshqa faktorlarga bog‘liq bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, hosildorlik tasodifiy jarayondir.

Shuning uchun (9.1) munosabat umumiy holda tasodifiy o‘zgaruvchini o‘z ichiga olishi kerak. Bunday o‘zgaruvchini Y desak, (9.1) o‘rniga ushbu

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, U) \tag{9.3}$$

munosabatni yozish mumkin. (9.3) munosabat korrelyatsion deyiladi. Uni *korrelyatsiya* tenglamasi ham deb yuritiladi. (9.1) yoki (9.2.) munosabatlar *regressiya* tenglamasi deyiladi.

Umumiy holda (9.1) yoki (9.3) tenglamalar haqida tekshirishlar olib borish g‘oyatda murakkab. Odatda n=1 bo‘lgan hol ko‘riladi va bu hol, ma’lum ma’noda, to‘liq o‘rganilgan desa bo‘ladi. Shunday qilib, biz (9.1)da n=1 deymiz. Bu determinatsiyalangan jarayon uchun. *Tasodifiy o‘zgaruvchini* o‘z ichiga olgan (9.3) munosabatni o‘rganmaymiz.

Ushbu

$$Y = f(x) \quad \text{yoki} \quad \hat{y}_x = f(x) \tag{9.4}$$

munosabat *juftlik regressiya tenglamasi* deyiladi, unda y – erksiz o‘zgaruvchi (natijaviy belgi), x – erkli (tushuntiruvchi) o‘zgaruvchi (belgi – faktor). (9.4) da $\hat{y}_x$ deb belgi kiritilishining sababi, korrelyatsion munosabatni bu holda $y=\hat{y}_x+\varepsilon$ (ε–tasodifiy miqdor) kabi yoziladi. Juftlik regressiyada $\hat{y}_x = f(x)$ funksiyaning ko‘rinishini tanlash kuzatuvlar natijasida olingan va koordinata tekisligining birinchi choragida joylashgan

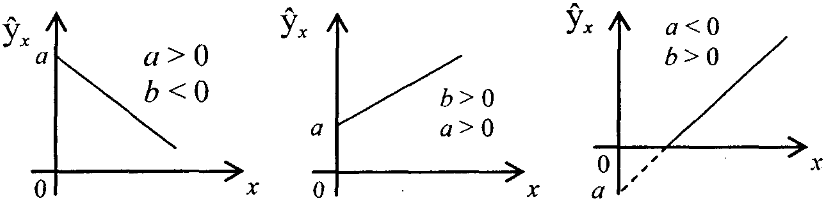
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \quad y_i > 0 \qquad (9.5)$$

nuqtalarning joylashishiga bog‘liq. Shunga qarab $\hat{y}_x = f(x)$ funksiya ko‘rinishi tanlanadi. Tanlash uch usul bilan amalga oshiriladi:

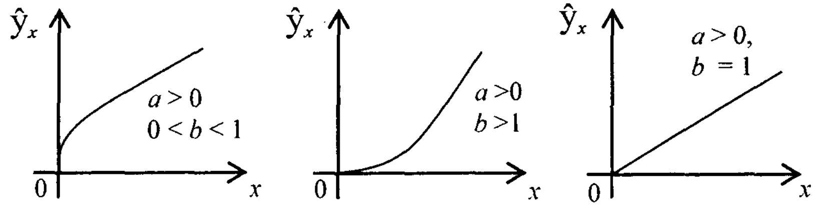
1) grafik usul;
2) analitik usul;
3) tajriba o‘tkazish usuli.

Regressiya tenglamasining ko‘rinishi, ya’ni $\hat{y}_x = f(x)$ funksiya ko‘rinishini tanlashda grafik usul eng ko‘rgazmali hisoblanadi. Quyida $\hat{y}_x = f(x)$ funksiyani tanlash natijalarini miqdoriy jihatdan baholash uchun foydalaniladigan chiziqlarning asosiy turlarini keltiramiz:

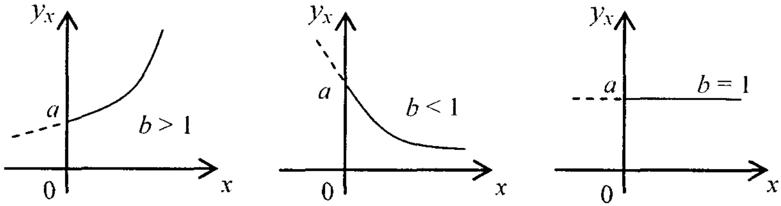
a) $\hat{y}_x = a + bx$ (chiziqli bog‘lanish) – to‘g‘ri chiziq;



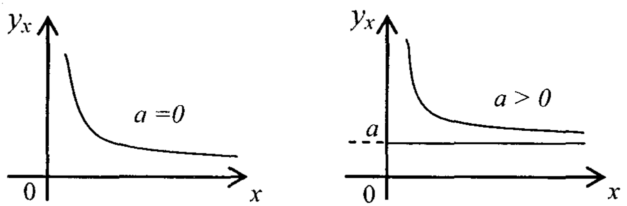
b) $\hat{y}_x = ax^b$, $a > 0$ (chiziqsiz bog‘lanish) – darajali funksiya.



d) $\hat{y}_x = ab^x$, $a > 0$, $b > 0$ (chiziqsiz bog‘lanish) – eksponenta egri chizig‘i (ko‘rsatkichli funksiya)



e) $\hat{y}_x = a + \frac{b}{x}$, $a \geq 0,\ b > 0$ (chiziqsiz bog‘lanish) – giperbola shoxchasi.



Yuqoridagi b), d), e) hollarda bog‘lanishlar chiziqsiz. Ular yangi yordamchi o‘zgaruvchilar kiritish orqali yangi o‘zgaruvchilarga nisbatan chiziqli bog‘lanishga keltirilishi mumkin. Agar b) hol uchun $Y_1 = \ln y$, $X_1 = \ln x$ desak, $\ln y = \ln a + b \ln x$ ga ko‘ra $Y_1 = \ln a + bX_1$ – chiziqli bog‘lanishga ega bo‘lamiz. Shunga o‘xshash, d) holda $\ln y = \ln a + x \ln b$ ga ko‘ra $Y_1 = \ln y$, $X_1 = x$ desak, $Y_1 = \ln a + (\ln b)X_1$ ko‘rinishdagi chiziqli bog‘lanish hosil bo‘ladi. Nihoyat, e) holda $Y_1 = y$, $X_1 = x^{-1}$ desak, $Y_1 = a + bX_1$ hosil bo‘ladi.

Aytib o‘tamizki, kuzatuvlar soni $y_x = a + bx$ dagi x oldidagi bittagina parametrni e’tiborga olsak, undan 7–8 marta ko‘p bo‘lishi kerak. $\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$ uchun kuzatuvlar soni 14–15 tadan ko‘p bo‘lishi mumkin.

9.2-§. Juftlik regressiya va korrelyatsiyaning chiziqli modeli

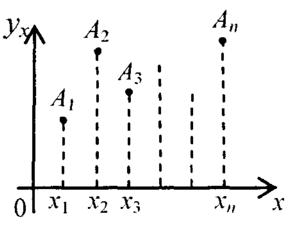
1. Juftlik regressiyaning eng sodda modeli

Eng sodda model – chiziqli regressiya bo‘lib, u iqtisodiyotda keng qo‘llaniladi. Buning sababi chiziqli regressiya parametrlarining aniq iqtisodiy izohlanishidir.

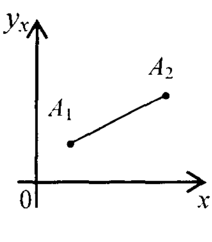
Chiziqli regressiya va korrelyatsiya tenglamalari

$$\hat{y}_x = a + bx \,,\; y = a + bx + \varepsilon \qquad (9.6)$$

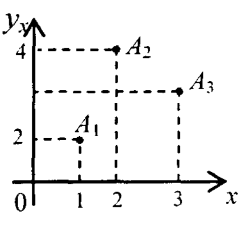
ko‘rinishga ega. Ushbu $\hat{y}_x = a + bx$ ko‘rinishdagi tenglama berilgan nuqtalar abstsissalar bo‘yicha natijaviy belgining nazariy qiymatlarini topishga imkoniyat beradi. $\hat{y}_x = a + bx$ tenglama tekislikda to‘g‘ri chiziqni tavsiflaydi (to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi). Shuning uchun $a + bx_i = \bar{y}_i$, i=1,2,...,n deb belgilaymiz. Agar koordinata tekisligining birinchi choragida joylashgan n ta nuqta $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $y_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ berilgan bo‘lsa, shu nuqtalar $\hat{y}_x = a + bx$ to‘g‘ri chiziqda yotishi ham mumkin. Bu holda $y_i = \bar{y}_i$, $i = \overline{1,n}$ bo‘ladi. Ammo iqtisodiyotda bunday hol yuz berishi faqat nazariy jihatdan mumkin. Ko‘rinadiki, A_1, A_2, ..., A_n nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi, deb faraz etish o‘rinli (9.1-chizma)



9.1-chizma



9.2-chizma



9.3-chizma

Ammo n=2 bo‘lganda A_1 va A_2 nuqtalar $\hat{y}_x = a + bx$ to‘g‘ri chiziqda yotadi, chunki ikki nuqtadan faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi (9.2-chizma). Agar n=3 bo‘lsa, A_1, A_2 va A_3 nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan holda ulardan yagona parabola chizig‘i o‘tadi. Buni misolda ko'rsataylik. Faraz etaylik, tekislikda $A_1(1; 2)$, $A_2(2; 4)$ va $A_3(3; 3)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Shu nuqtalardan o'tadigan parabolani $\hat{y}_x = ax^2 + bx + c$ ko'rinishda izlaymiz:

$$\begin{cases} 2 = a + b + c, \\ 4 = 4a + 2b + c, \\ 3 = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Biz 3 ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga egamiz. Agar mos ravishda 2-tenglamadan ham, 3-tenglamadan ham 1-tenglamani ayirsak,

$$\begin{cases} 2 = 3a + b, \\ 1 = 8a + 2b \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Undan $3=-2a$, ya'ni $a=-3/2$ ni topamiz. Endi $b=13/2$; $s=-3$ ni topish qiyin emas. Shunday qilib, izlangan parabola ushbu $\hat{y}_x = -\frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{13}{2} \cdot x - 3$ ko'rinishda yoziladi. Umuman, nuqtalar soni ortgan sari mos ko'phadlarning koeffitsientlarini topish uchun hisob-kitoblar soni ortib boraveradi. "Hisoblash usullari" fanida n ta nuqtadan o'tadigan egri chiziqni *interpolyatsion* formula yordamida tavsiflanadi va y $(n-1)$ – tartibli algebraik ko'phaddan iborat. Undan foydalanish va x_{p+1} da y_{n+1} ni hisoblash katta noqulayliklarga olib keladi. Shuning uchun ham chiziqli va chiziqsiz regressiya tushunchalari kiritilgan.

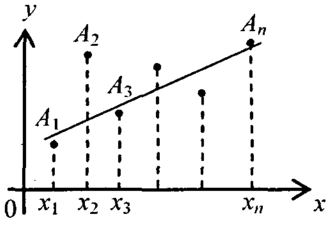
2. Chiziqli regressiya koeffitsientlarini topishning eng kichik kvadratlar usuli

Mazkur bandda juftlik chiziqli regressiya $\hat{y}_x=a+bx$ koeffitsientlarini baholash (topish) bilan shug'ullanamiz. Tekislikning birinchi choragida bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan n ta

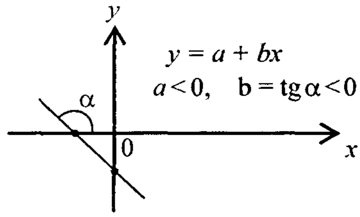
$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n), \qquad (0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n),$$

nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar u yoki bu jarayonni kuzatish natijalarida topilgan. Ularning ordinatalari $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Juftlik chiziqli regressiya to'g'ri chizig'idagi nuqtalar ordinatalari $\bar{y}_i = a + bx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ kabi yoziladi. Faraz bo'yicha, hech bo'lmasa bitta i uchun

$y_i \neq \bar{y}_i$ bo‘ladi (9.4-chizma). Shuning uchun $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 \neq 0$ yoki, baribir, $\sum_{i=1}^{n}|y_i - \bar{y}_i| \neq 0$ munosabat o‘rinli.



9.4-chizma

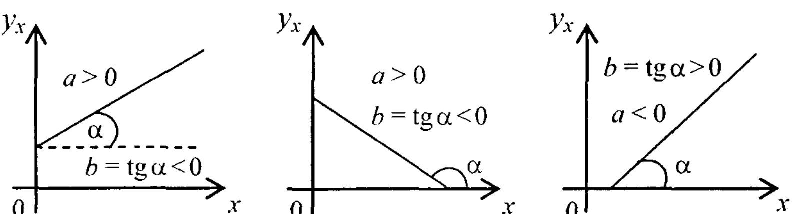


9.5-chizma

Ularni $\Phi_1(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$, $\Phi_2(a,b) = \sum_{i=1}^{n}|\, y_i - a - bx_i|$ ko‘rinishda yozish mumkin. $\Phi_1(a,b)$ – og‘ishishlar kvadratlari yig‘indisi, $\Phi_2(a,b)$ esa og‘ishishlar modullari yig‘indisi deyiladi. Ularda a va b koeffitsientlar bir vaqtda manfiy bo‘lmagan ixtiyoriy haqiqiy sonlar (9.5-chizma). Ko‘pincha $\Phi_1(a,b)$ ning eng kichik qiymatini topish masalasi ko‘riladi:

$$\Phi_1(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \to \min, \quad (a,b) \in R^2, \tag{9.7}$$

bunda iqtisodiy ma’nosi bo‘yicha $\hat{y}_x = a + bx$ juftlik chiziqli regressiya to‘g‘ri chizig‘i II, I, IV; III, II, I; III, IV, I choraklardan o‘tishi mumkin, ammo u II, III, IV choraklardan o‘tishi mumkin emas. Qurilgan joiz hollarda $\hat{y}_x = a + bx$ to‘g‘ri chiziqning I chorakda joylashgan qismi (kesmasi) bizni qiziqtiradi: (9.6-chizma. a), b), d)).



9.6-chizma. a) b) d)

(9.7) masalani yechish bilan juftlik chiziqli regressiya koeffitsientlarini baholash usuli keng tarqalgan *eng kichik kvadratlar usuli* deb yuritiladi. Shu masalani to'liq yechamiz. Ravshanki, (9.7) masala chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum masalasidir. Avval $\Phi_1(a,b)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Uning $\frac{\partial \Phi_1}{\partial a}$ va $\frac{\partial \Phi_2}{\partial b}$ hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial \Phi_1(a,b)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)\cdot(-1),$$

$$\frac{\partial \Phi_1(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)\cdot(-x_i).$$

Endi ushbu

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)\cdot(-1) = 0, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)\cdot(-x_i) = 0, \end{cases} \tag{9.8}$$

tenglamalar sistemasini yechamiz. (9.8) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} na + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases} \tag{9.9}$$

Bundan (9.9) ning birinchi tenglamasini n ga, ikkinchi tenglamasini $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ ga ko'paytirib, birinchidan ikkinchisini ayirsak, b uchun ushbu formulani topamiz:

$$b_0 = \frac{n\cdot\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\cdot\left(\sum y_i\right)}{n\cdot\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}. \tag{9.10}$$

Endi a_0 ni topish qiyin emas:

$$a_0 = \bar{y} - b_0\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i \tag{9.10^1}$$

Keyingi hisob-kitoblarda qulaylik tug'dirish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i, \quad \overline{y\cdot x}=\frac{1}{n}\sum x_i y_i, \\ \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum x_i^2, \quad \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum y_i^2, \\ \bar{x}^2=\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2, \quad \bar{y}^2=\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right)^2. \end{array}\right\} \tag{9.11}$$

bunda

$\bar{x}$ — $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i>0$, $i=\overline{1,n}$ sonlarning o'rta arifmetigi,

$\bar{y}$ — $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $y_i>0$, $i=\overline{1,n}$ sonlarning o'rta arifmetigi,

$\overline{y\cdot x}$ — $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$ sonlarning o'rta arifmetigi,

$\overline{x^2}$ — $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sonlarning o'rta kvadratik miqdori,

$\overline{y^2}$ — $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sonlarning o'rta kvadratik miqdori.

Yana quyidagi belgilarni kiritamiz:

$\sigma_x^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum x_i^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum x_i\right)^2$ — $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o'zgaruvchining dispersiyasi;

$\sigma_y^2=\overline{y^2}-\bar{y}^2=\frac{1}{n}\sum y_i^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum y_i\right)^2$ — $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o'zgaruvchining dispersiyasi

$\operatorname{cov}(x,y)=\overline{y\cdot x}-\bar{y}\cdot\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i y_i-\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)$ — x va y o'zgaruvchilarning koveriatsiyasi.

Kiritilgan belgilashlar yordamida, *avvalo*, (9.10) formulani ushbu

$$b_0=\frac{\overline{y\cdot x}-\bar{y}\cdot\bar{x}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \tag{9.12}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu belgilar, *qolaversa*, juftlik regressiya tenglamasining ma'nodorligini tekshirish uchun olib boriladigan hisob-kitoblarni yengillashtiradi.

Shunday qilib, biz (9.7) masala uchun $\Phi_1(a,b)$ funksiyasining yagona statsionar nuqtasini topdik. Endi uni ekstremumga tekshiramiz. Uning uchun $\Phi_1(a,b)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini (a_0, b_0) nuqtada hisoblab, ulardan matritsa tuzamiz:

$$\frac{\partial^2\Phi(a_0,b_0)}{\partial a^2}=2\sum x_i^2,\quad \frac{\partial^2\Phi(a_0,b_0)}{\partial b^2}=2n,\quad \frac{\partial^2\Phi(a_0,b_0)}{\partial a\partial b}=2\sum x_i\ ,$$

$$A=\begin{pmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2n \end{pmatrix}.$$

Shu A matritsaga mos kvadratik forma tuzamiz:

$$Q(y_1,y_2)=2(y_1,y_2)=\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot\left[\left(\sum x_i^2\right)y_1+\left(\sum x_i\right)y_2,\ \left(\sum x_i\right)y_1+n\cdot y_2\right]\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot\left[\left(\sum x_i^2\right)y_1^2+2\left(\sum x_i\right)y_1y_2+n\cdot y_2^2\right].$$

Hosil bo‘lgan kvadratik forma $y_1^2+y_2^2\neq 0$ bo‘lgani uchun faqat musbat qiymatlar qabul qilishini isbotlaymiz. Uning diskriminantini topamiz:

$$D=\left(\sum x_i\right)^2-n\cdot\left(\sum x_i^2\right).$$

Elementar o‘zgarishlar bajaramiz:

$$D=n^2\left[\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2-\frac{1}{n}\cdot\left(\sum x_i^2\right)\right]=n^2(A_n^2-D_n^2),$$

bunda $A_n=\frac{1}{n}\sum x_i$, $\quad D_n=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_3^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$.

Ma’lumki $x_i\neq x_j$ bo‘lganda $A_n<D_n$. Shu sababli $D<0$. Demak, $Q(y_1,\ y_2)$ o‘z ishorasini saqlaydi. Masalan $y_1=0,\ y_2\neq 0$ bo‘lsa, $Q(0,y_2)=2ny_2^2>0$; $y_1\neq 0,\ y_2=0$ bo‘lsa, $Q(y_1,0)=2n\left(\sum x_i^2\right)y_1^2>0$.

Demak, $Q(y_1,y_2)>0$, $\forall(y_1,y_2)\in R^2$, $y_1^2+y_2^2\neq 0$. Bundan $\Phi_1(a,b)$ funksiya $(a_0,\ b_0)$ nuqtada mahalliy minimumga erishishi kelib chiqadi. Ammo $\Phi_1(a,b)$ funksiya qavariq bo'lgani uchun shu nuqtada $\Phi_1(a,b)$ funksiya o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. Biz (9.7) masalani to'liq yechdik.

9.3-§. Juftlik chiziqli regressiya tenglamasining ma'nodorligini tekshirish usullari

1. Korrelyatsiya va determinatsiya koeffitsientlari

Statistik kuzatishlar natijasida olingan ma'lumotlar asosida eng kichik kvadratlar usuli (EKKU) bilan juftlik chiziqli regressiya tenglamasi $\hat{y}=a_0+b_0x$ topilgan deylik. Bunda, biz yuqorida aytib o'tganimizdek, kuzatuvlar soni 7 tadan kam bo'lmasligi kerak. Ammo kuzatuvlar soni ortib boraversa, regressiya tenglamasining sifati (ma'nodorligi) yaxshilanib boraveradi. Regressiya tenglamasining ma'nodorligini aniqlash barcha $A_1, A_2,\ldots,A_n$ nuqtalardan o'tadigan egri chiziqni juftlik chiziqli regressiya to'g'ri chizig'i qanchalik aniqlikda almashtirishini (approksimatsiya qilinishini) baholashni amalga oshirishdan iborat.

Bunda muhim ko'rsatkichlardan biri chiziqli korrelyatsiya koeffitsientidir. U quyidagicha hisoblanadi:

$$r_{xy}=b_0\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\overline{y\cdot x}-\bar{y}\cdot\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2}-\bar{y}^2}}. \tag{9.13}$$

Chiziqli korrelyatsiya koeffitsienti r_{xy} bog'lanish zichligi ko'rsatkichidir. Aniqrog'i, r_{xy} miqdor berilgan nuqtalar EKKU yordamida topilgan empirik to'g'ri chiziqqa qanchalik yaqin joylashganligini anglatadi. r_{xy} uchun $-1\leq r_{xy}\leq 1$ tengsizlik o'rinli. Shu r_{xy} ning absolut qiymati 1 ga qanchalik yaqinlashib borsa, $A_1, A_2,\ldots,A_n$ nuqtalar empirik to'g'ri chiziqqa shuncha yaqinlashib joylashgan bo'ladi. Agar $|r_{xy}|=1$ bo'lsa, barcha $A_1, A_2,\ldots,A_n$ nuqtalar empirik to'g'ri chiziqda yotadi.

Regressiya chizig'ining ma'nodorligini aniqlash uchun chiziqli korrelyatsiya koeffitsientining kvadratini hisoblashadi. Shu r_{xy}^2 miqdor *determinatsiya koeffitsienti* deyiladi.

Qurilgan modelning sifati approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi bilan aniqlanadi:

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - \bar{y}_{x_i}}{y_i} \right| \cdot 100\,\% . \tag{9.14}$$

Agar $\hat{y}_x = a_0 + b_0 x$ bo'lsa, $\bar{A} = \sum_{i=1}^{n} A_i$ bo'ladi, bunda

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - a_0 - b_0 x_i}{y_i} \right| \cdot 100\,\% .$$

Approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi 8—10%dan oshmasligi kerak.

2. Chiziqli regressiya tenglamasining ma'nodorligini aniqlash

Buning uchun Fisherning F— belgisi, chiziqli regressiya parametrlarining ma'nodorligini aniqlash uchun Styudentning t — belgisini bayon etamiz.

Regressiya chizig'i tenglamasining ma'nodorligini baholash Fisherning F— belgisi, Styudentning t— belgisi yordamida amalga oshiriladi. Fisherning F— belgisi miqdori determinatsiya koeffitsienti r_{xy}^2 bilan bog'langan. U quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n-2), \quad n \geq 3. \tag{9.15}$$

Aslida $n \geq 7$ bo'lishi lozim.

Agar α = 0,05 (besh foizlik ma'nodorlik darajasi) va erklilik darajalari k_1=1, k_2=n−2 bo'lsa, tasodifiy miqdorlarning Fisher taqsimoti keltirilgan jadvallardan Fisherning F— belgisi jadval qiymatini topamiz. Agar ushbu $F_{\text{fakt}} > F_{\text{jadv}}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, regressiya tenglamasini statistik ma'nodor deb hisoblanadi. (F_{jadv} qiymatini Ya.R.Magnus, P.K.Katishev, A.A. Peresetskiy "Эконометрика. Началный курс"dagi 2- va 4-jadvaldan olinadi.)

Shunday qilib, Fisherning F — belgisi regressiya chizig'i tenglamasining ma'nodorligini baholashga xizmat qiladi. Juftlik chiziqli regressiya tenglamasining koeffitsientlari a_0 va $b_0$ning ma'nodorligini baholashga ham xizmat qiladigan belgi bor, bu Styudentning t— belgisidir. Unda har bir ko'rsatkich uchun *ishonchlilik intervali* hisoblanadi.

Tasodifiy xatolar $m_a,$ $m_b,$ $m_{r_{xy}}$ quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi ($n \geq 3$):

$$
\begin{aligned}
m_a &= S_{\text{kold}} \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{n \cdot \sigma_x} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{y}_{x_i})^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{n \cdot \sigma_x}, \\
m_b &= \frac{S_{\text{kold}}}{\sigma_x \sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{y}_{x_i})^2}, \\
m_{r_{xy}} &= \sqrt{\frac{1 - r_{xy}}{n-2}}.
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

$$
t_a = \frac{a}{m_a}, \quad t_b = \frac{b}{m_b}, \quad t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}}, \quad S_{\text{kold}} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{y}_{x_i})^2}.
$$

Agar ushbu $t_a > t_{\text{jadv}}$, $t_a > t_{\text{jadv}}$, $t_{r_{xy}} > t_{\text{jadv}}$ tengsizliklar bajarilsa a_0 va b_0 parametrlar *statistik ma'nodor* hisoblanadi.

Endi a_0 va b_0 parametrlar uchun ishonchlilik intervalini topish mumkin:

$$
\gamma_a = a_0 + \Delta_a, \quad \gamma_b = b_0 + \Delta_b, \tag{9.17}
$$

bunda

$$
\begin{aligned}
&\Delta_a = t_{\text{jadv}}\, m_{a_0}, \quad \Delta_b = t_{\text{jadv}}\, m_{b_0}, \\
&\gamma_{a_{\min}} = a_0 - \Delta_{a_0}, \quad \gamma_{a_{\max}} = a_0 + \Delta_{a_0}, \\
&\gamma_{b_{\min}} = b_0 - \Delta_{b_0}, \quad \gamma_{b_{\max}} = b_0 + \Delta_{b_0}.
\end{aligned}
$$

Chiziqli regressiya tenglamasi va uning koeffitsientlari (parametrlari) uchun olingan baholar undan bashorat qilishda foydalanish imkonini beradi.

Agar o'zgaruvchi x ning bashorat qiymati $x_p = \bar{x} \cdot 1{,}07$ bo'lsa, y o'zgaruvchining bashorat qiymati $\bar{y}_p$ bo'ladi. Bashorat xatoligi ushbu

$$m_{\bar{y}_p} = S_{\text{kold}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}.$$

formula yordamida hisoblanadi.

Limit xatolik $\Delta_{\bar{y}_p}$ ushbu $\Delta_{\bar{y}_p} = t_{\text{jadv}} - m_{\bar{y}_p}$ formula bilan topiladi.

Bashoratning ishonchlilik intervali quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\gamma_{\bar{y}_p} = \bar{y}_p \pm \Delta_{\bar{y}_p}, \quad \gamma_{\bar{y}_{p\max}} = \bar{y}_p + \Delta_{\bar{y}_p}, \quad \gamma_{\bar{y}_{p\min}} = \bar{y}_p - \Delta_{\bar{y}_p},$$

$p = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

9.4-§. Juftlik chiziqli regressiya tenglamasining va parametrlarining ma'nodorligini tekshirishga oid masala

1. Zarur miqdorlar jadvali va masalaning qo'yilishi

9-bobning 9.3-§da kiritilgan miqdorlarni jadval shaklida yozib olish hisob-kitoblarni yengillashtiradi.

9.1-jadval

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x	y	yx	x^2	y^2	y_x	$y - y_x$	A_i, %
1	x_1	y_1	$y_1 x_1$	x_1^2	y_1^2	a_0-b_0x_1	y_1-a_0-b_0x_1	A_1
2	x_2	y_2	$y_2 x_2$	x_2^2	y_2^2	a_0-b_0x_2	y_2-a_0-b_0x_2	A_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_n	y_n	$y_n x_n$	x_n^2	y_n^2	a_0-b_0x_n	y_n-a_0-b_0x_n	
Jami	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum y_i x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$	–	–	$\sum A_i$

O'rtacha qiymat	$\frac{\sum x_i}{n}$	$\frac{\sum y_i}{n}$	$\frac{\sum y_i x_i}{n}$	$\frac{\sum x_i^2}{n}$	$\frac{\sum y_i^2}{n}$	–	–	$\frac{\sum A_i}{n}$
σ	σ_x	σ_y						
σ^2	σ_x^2	σ_y^2						

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, uning 2–6-ustunlarini statistik ma'lumotlarga qarab to'ldirish mumkin. 7-ustunni to'ldirish uchun avval eng kichik kvadratlar usuli bilan a_0, b_0 larni topib olamiz va juftlik chiziqli regressiya tenglamasini ($y=a_0+b_0x$) yozamiz. So'ngra 7-,8-ustunlarni to'ldiramiz. Keyin x va y o'zgaruvchilarning dispersiyalarini $[(\sigma_x, \sigma_y),\ (\sigma_x^2, \sigma_y^2)]$ hisoblab olamiz.

9.1-jadval to'ldirilgandan keyin quyidagi savollarga javob berish lozim bo'ladi:

1. Juftlik chiziqli regressiya tenglamasi qurilsin.
2. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsienti r_{xy} va approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi $\bar{A}$ hisoblansin.
3. Fisherning F-belgisi, Styudentning t-belgisi yordamida regressiya va korrelyatsiyaning statistik ma'nodorligi baholansin.
4. O'rtacha darajasiga nisbatan 107% ni tashkil etadigan x ning jon boshiga zarur qiymati bashoratiga qarab, maosh y ni *bashorat* qilinsin.
5. Bashorat xatoligini va uning ishonchlilik intervalini hisoblab chiqib, bashorat aniqligini baholang.
6. Bitta chizmada berilgan ma'lumotlarni va chiziqli regressiya to'g'ri chizig'ini quring.

Agar eng kichik kvadratlar usuli qo'llanilgan bo'lsa, a_0 va b_0 lar topilgan hamda chiziqli regressiya tenglamasi $y=a_0+b_0x$ topilgan bo'ladi. Demak, 1-savolga javob berilgan deyish mumkin.

Endi masalaning qo'yilishiga to'xtalamiz. Biror region hududi bo'yicha muayyan yil uchun quyidagi ma'lumotlar berilgan bo'lsin (9.2-jadval):

9.2-jadval

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	78	82	87	79	89	106	67	88	73	87	76	115
y	133	148	134	154	162	195	139	158	152	162	159	173

Jadvalda G — regiondagi oila guruhlari nomeri (12 ta oila so'ralgan), y — bir kunlik o'rtacha maosh, x — ish bilan band bo'lganlar uchun bir kunlik minimum xarajat.

9.2-jadvalda berilgan ma'lumotlarga qarab yuqorida keltirilgan 6 ta savolga javob beramiz.

2. Masalaning yechilishi

Juftlik chiziqli regressiya koeffitsientlarini baholash uchun avval 1-jadvalning 2–6-ustunlarini hisoblab olamiz va chiziqli regressiya tenglamasini yozamiz, so'ngra 7-,8-,9-ustunlarni to'ldiramiz (9.3-jadval).

9.3-jadval

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x	y	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	A_i, %
1	78	133	10374	6084	17689	149	–16	12,0
2	82	148	12136	6724	21904	152	–4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	–23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
7	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
8	88	158	139904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1
11	76	159	12084	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	29929	183	–10	5,8
Jami	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,9

O'rtacha qiymat	85,6	155,8	13484	7492,3	24531,4	–	–	5,7
σ	12,84	16,05	–	–	–	–	–	–
σ^2	164,9	257,8	–	–	–	–	–	–

Regressiya koeffitsientlari a_0 va b_0 lar quyidagicha hisoblangan:

$$b_0 = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{13484 - 155,8 \cdot 85,6}{7492,3 - 85,6^2} = \frac{147,52}{164,99} = 0,89,$$

$$a_0 = \bar{y} - b_0\bar{x} = 155,8 - 0,89 \cdot 85,6 = 79,62.$$

Shunday qilib, juftlik chiziqli regressiya tenglamasi ushbu

$$\bar{y}_x = 79,62 + 0,89x \qquad (9.18)$$

ko'rinishga ega. Endi 7-, 8-, 9– ustunlarni to'ldirish qiyin emas. (9.18) tenglamadan ko'rinadiki, *jon boshiga zarur minimal xarajat* 1 *so'm orsa, o'rtacha kundalik maosh o'rta hisobda* 0,89 *so'mga ortar ekan*. Shu bilan biz 1-savolga to'liq javob berdik.

2-savolga oid hisob-kitoblarni bajaramiz.

Bog'lanish zichligini anglatuvchi korreliyatsiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$r_{xy} = b_0 \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,89 \cdot \frac{12,84}{16,05} = 0,712, \quad r_{xy}^2 = 0,57.$$

Bu miqdor maoshning (y ning) variatsiyasi jon boshiga zarur minimal xarajat faktori x bilan tushuntirilishini anglatadi. Approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi model sifatini aniqlaydi:

$$\bar{A} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{68,9\,\%}{12} = 5,74\,\%.$$

Ushbu 5,74%<8% tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun ko'rilgan model sifati *yaxshi* deb baholanadi.

Navbat 3-savolga javob berishga keldi. Fisherning F – belgisini qo'llaymiz:

$$F_{\text{fakt}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (12 - 2) = \frac{0,51}{1 - 0,51} \cdot 10 = 10,41.$$

F – belgining ma'nodorlik darajasi 5% va erklilik darajasi k_1=1 va

k_2=12−2=10 bo'lgandagi jadval qiymati F_{jadv} = 4,96. Shunday qilib, F_{fakt}=10,41>F_{jadv}=4,96 tengsizlik bajariladi. Shu sababli regressiya tenglamasini *statistik ma'nodor* deb hisobga olinadi.

Nihoyat, regressiya parametrlarining statistik ma'nodorligini Styudentning t − belgisi yordamida tekshiramiz.

Styudentning t − belgisi uchun ma'nodorlik darajasi 5% (⟨=0,05) va erklilik darajasi n−2=12−2=10 bo'lgandagi qiymati t_{jadv} = 2,23 bo'ladi.

Endi m_a, m_b, $m_{r_{xy}}$ − tasodifiy xatoliklarni topamiz:

$$m_a = S_{\text{kold}} \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{n \cdot \sigma_x} = 12,6 \cdot \frac{\sqrt{88907}}{12 \cdot 12,84} = 24,5\,,$$

$$m_b = \frac{S_{\text{kold}}}{\sigma_x \sqrt{n}} = \frac{12,6}{12,95 \cdot \sqrt{12}} = 0,281\,,$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,51}{12 - 2}} = 0,219\,.$$

Styudentning t − belgisi qiymatini hisoblaymiz:

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{79,616}{24,6} = 3,2, \quad t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0,89}{0,281} = 3,2\,,$$

$$t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0,712}{0,219} = 3,3\,.$$

Ko'rinadiki, t− belgining qiymatlari bilan uning jadval qiymatlari orasida quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$t_a = 3,2 > t_{jadv} = 2,23; \quad t_b = 3,2 > t_{jadv} = 2,23; \quad t_{r_{xy}} = 3,3 > t_{jadv} = 2,23.$$

Bundan a, b va r_{xy} parametrlar statistik ma'nodor ekani kelib chiqadi.

Regressiya parametrlari a_0 va b_0 uchun ishonchlilik intervallarini topamiz. Uning uchun har bir ko'rsatkichga tegishli limit xatolikni hisoblaymiz:

$$\Delta_a = t_{\text{jadv}} \cdot m_a = 2,23 \cdot 24,5 = 54,64; \quad \Delta_b = t_{\text{jadv}} \cdot m_b = 2,23 \cdot 0,281 = 0,62\,.$$

Ishonchlilik intervallarini yozamiz:

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 79{,}62 \pm 54{,}64; \quad \gamma_{a_{\min}} = 24{,}98, \quad \gamma_{a_{\max}} = 134{,}26 .$$

$$\gamma_b = b \pm \Delta_b = 0{,}89 \pm 0{,}62; \quad \gamma_{b_{\min}} = 0{,}27, \quad \gamma_{b_{\max}} = 1{,}51 .$$

Bu hisoblardan ko'rinadiki, a va b parametrlar $p=1-\alpha=0{,}95$ ga teng ehtimollik bilan ko'rsatilgan chegaralarda nolga teng qiymatlarni qabul qilmaydi, ya'ni statistik ma'nodor va noldan anchagina farq qiladi.

Nihoyat, 5-savolga javob beramiz.

Regressiya tenglamasi uchun olingan baholar undan bashorat qilishda foydalanish mumkinligini bildiradi. Agar zarur minimum xarajatning bashorat qiymati

$x_p = \bar{x} \cdot 1{,}07 = 85{,}6 \cdot 1{,}07 = 91{,}6$ ming so'm bo'lsa, maoshning bashorat qiymati

$\bar{y}_p = 79{,}62 + 0{,}89 \cdot 91{,}6 = 161{,}4$ ming so'm bo'ladi.

Bashorat xatoligini ham hisoblash mumkin:

$$m_{\bar{y}_p} = S_{\text{kold}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = 12{,}6 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(91{,}6 - 85{,}6)^2}{12 \cdot 12{,}84^2}} = 13{,}22 .$$

Bashoratning limit xatoligi

$$\Delta_{\bar{y}_p} = t_{\text{jadv}} \cdot m_{\bar{y}_p} = 2{,}23 \cdot 13{,}22 = 29{,}48 .$$

Bashoratning ishonchlilik intervali:

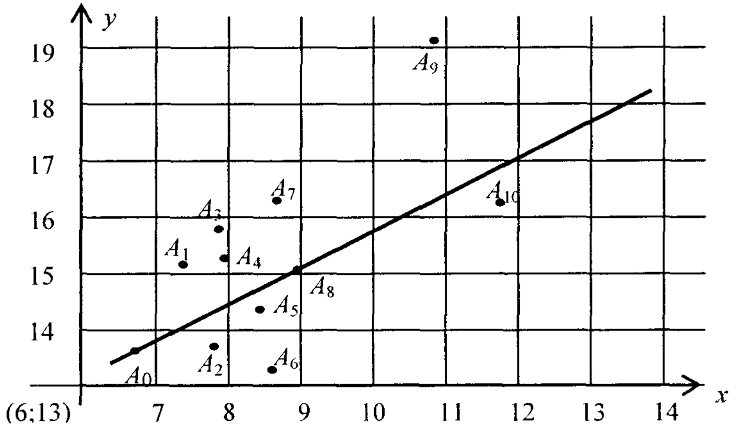
$$\gamma_{\bar{y}_r} = \bar{y}_r \pm \Delta_{\bar{y}_r} = 161{,}14 \pm 29{,}48;$$

$$\gamma_{\bar{y}_{p_{\min}}} = 161{,}14 - 29{,}48 = 131{,}66 \text{ ming so'm};$$

$$\gamma_{\bar{y}_{p_{\max}}} = 161{,}14 + 29{,}48 = 190{,}62 \text{ ming so'm}.$$

Bashoratning limit xatoligi 95% holatlarda 29,48dan ortmaydi. O'rtacha oylik maoshning topilgan bashorati ishonchli deb hisoblanadi ($\rho=1-\alpha=1-0{,}05=0{,}95$) va 131,66 ming so'm bilan 190,62 ming so'm orasida bo'ladi.

Oxirgi 6-savolga javob berish uchun berilgan (kuzatuvlar natijasida topilgan) 12ta A_0, A_1, A_2, ..., A_{11} nuqtani va juftlik chiziqli regressiya tenglamasi bilan tavsiflanadigan to‘g‘ri chiziqni koordinata tekisligida quramiz. Qulaylik uchun masshtabni kichiklashtirib olamiz va koordinata boshini (6;13) nuqtaga qo‘yamiz. O‘rab qo‘yilgan A_0 (6,7; 13,9) va A_9 (8,8; 15,8) nuqtalar empirik to‘g‘ri chiziqda yotadi (9.7-chizma).



9.7 -chizma

9.5-§. Juftlik chiziqli regressiya empirik va asl to‘g‘ri chiziqlari

9.1-tarif. *Chiziqli regressiyaning (9.7) belgi (kriteriy) bo‘yicha koeffitsientlari a_0 va b_0 hisoblangan bo‘lsa,*

$$\hat{y} = a_0 + b_0 x \tag{9.19}$$

tenglama juftlik chiziqli regressiyaning empirik tenglamasi deyiladi.

Endi belgi o‘rnida

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = 0 \tag{9.20}$$

tenglikni olaylik. Bu holda mos chiziqli regressiya chizig‘ini *asl chiziq*, tenglamasini esa, asl tenglama deb ataylik. Asl tenglamani

$$\hat{y} = \bar{a} + \bar{b} \cdot x \tag{9.21}$$

ko‘rinishda yozamiz. Ta’kidlab aytamizki, $\bar{a}$ va a_0, $\bar{b}$ va b_0 lar o‘zaro teng bo‘lishi ham, teng bo‘lmasligi ham mumkin.

9.1-teorema. Chiziqli regressiyaning empirik to‘g‘ri chizig‘i (9.19) $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtadan o‘tadi, bunda $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ (o‘rta arifmetik miqdor).

Isbot. (9.19) ga ko‘ra a_0 va b_0 lar $\Phi_1(a,b)$ funksiyaning minimumga erishishi zaruriy sharti bo‘yicha

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n \cdot b_0 - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Shu tenglamaning ikkala tomonini n ga bo‘lib yuborsak, $y = \bar{a}_0 + \bar{b}_0 \cdot x$ kelib chiqadi.

Teorema isbot bo‘ldi.

Misol. 3 ta (n=3) $A_1(2; 6)$ $A_2(4;9)$ $A_3(7;4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Sodda hisoblash yordamida topamiz: $a_0 = \frac{17}{2}$, $b_0 = -\frac{1}{2}$. Demak, $y = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} x$.

9.2-teorema. Chiziqli regressiyaning asl to‘g‘ri chizig‘i $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtadan o‘tadi.

Isbot. (9.21) tenglama uchun (9.20) tenglik bajariladi. (9.21) ga ko‘ra $\bar{y}_i = \bar{a} + \bar{b} \cdot x_i$. Bundan $\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i = \bar{a} + \bar{b} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ kelib chiqadi. Agar shu tenglikning ikkala tomonini n ga bo‘lsak, $\bar{y} = \bar{a} + \bar{b} \cdot x$ hosil bo‘ladi. *Teorema isbot bo‘ldi.*

Natijalar.

1. Chiziqli regressiyaning empirik va asl to‘g‘ri chiziqlari $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtadan o‘tadi.
2. Agar empirik va asl to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsientlari b_0 va $\bar{b}$ o‘zaro teng bo‘lsa, ular ustma-ust tushadi.

Chiziqli regressiyaning empirik to‘g‘ri chizig‘i parametrlarini ixtiyoriy n uchun topish mumkin, ammo uning asl to‘g‘ri chizig‘ini umumiy holda yasay olmaymiz.

Agar n =3 bo‘lsa, ya’ni koordinata tekisligining birinchi choragida 3 tagina $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $0<x_1<x_2<x_3$, $y_i>0$, i=1, 2,3, nuqta berilgan bo‘lsa, asl to‘g‘ri chiziqni geometrik usul bilan yasash mumkin. Shu geometrik usulning mohiyatiga to‘xtalamiz.

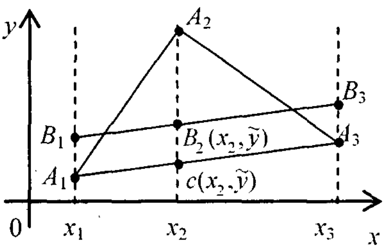
Ravshanki, A_2 nuqta A_1dan o'ngroqda, A_3 esa A_2 dan o'ngroqda joylashgan. Shu bilan birga A_2 nuqta A_1 A_3 to'g'ri chiziqdan yuqorida yoki pastda joylashgan bo'lishi mumkin. Geometrik usulni A_2 nuqta A_1 A_3 dan yuqorida joylashgan holda bayon etamiz (A_2 nuqta A_1 A_3 dan pastda joylashgan holda mulohazalar o'xshash). A_2 nuqtadan $0x$ o'qiga perpendikular tushiramiz. U A_1 A_3 chiziqni $C(x_2, \tilde{\tilde{y}}_2)$ nuqtada kesib o'tadi. SA_2 kesmani *teng uchga* bo'lamiz. B_2 nuqta CA_2 kesmani $CB_2{:}B_2A_2=1{:}2$ nisbatda bo'ladigan qilib tanlanadi, unda $B_2(x_2, \tilde{y}_2)$. Demak, $CB_2=CA_2/3$. Endi shu B_2 nuqtadan A_1A_3 ga parallel chiziq o'tkazamiz. U $x=x_1$ vertikal chiziqni $B_1(x_1, \tilde{y}_1))$ nuqtada, $x=x_3$ vertikal chiziqni esa $B_3(x_3, \tilde{y}_3)$ nuqtada kelib o'tadi.

Tasdiqlaymizki, B_1B_3 chiziq chiziqli regressiyaning asl chizig'idan iborat. Shu chiziq uchun (9.20) tenglik $n=3$ bo'lganda bajariladi. Haqiqatan 9.8-chizmaga ko'ra,

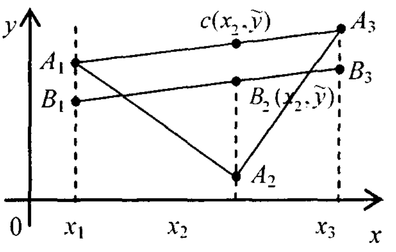
$$y_1-\tilde{y}_1=y_3-\tilde{y}_3=p<0, \quad y_2-\tilde{y}_2=-2p>0.$$

Demak,

$$(y_1-\tilde{y}_1)+(y_2-\tilde{y}_2)+(y_3-\tilde{y}_3)=p-2p+p=0.$$



9.8-chizma



9.9-chizma

Yuqoridagi mulohazalarda $A_1A_2A_3$ uchburchak uchun asos deb A_1A_3 olinadi. Agar asos sifatida A_1A_2 yoki A_2A_3 olinsa, (9.20) tenglik bajarilmaydi. Bunga bevosita chizmalar yordamida ishonch hosil qilish mumkin. Demak, B_1B_3ni chizishda $A_1A_2A_3$ uchburchakning asosi sifatida doim A_1A_3 olinishi kerak. Geometrik usulning mohiyati shu B_1B_3 chiziqni chizib, uning chiziqli regressiyaning aniq chizigi ekanini ko'rsatish edi. Endi B_1B_3 chiziqning tenglamasini chiqarish qiyin emas.

Buning uchun B_1 va B_3 nuqtalarning koordinatalarini topish kerak. Ularning absissalari ma'lum, faqat ordinatalarini topish lozim. Avval B_2 nuqta B_1B_3 ni qanday nisbatda bo'lishini topamiz:

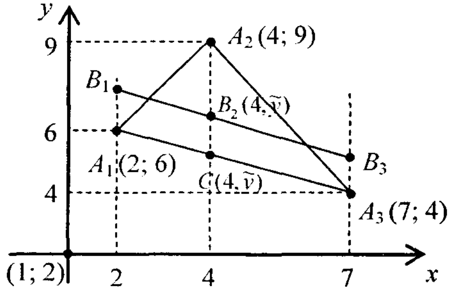
$$\frac{x_1 - \lambda \cdot x_3}{1+\lambda} = x_2 \quad \text{yoki} \quad \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Endi $\widetilde{y}_2$ ni topish qoldi:

$$\widetilde{y}_2 = \frac{y_1 - \lambda \cdot y_3}{1+\lambda} = \frac{(x_3 - x_2)y_1 + (x_2 - x_1)y_3}{x_3 - x_2}.$$

Endi $\widetilde{y}_1$ va $\widetilde{y}_3$ larni topish uchun $\widetilde{y}_1$ ga CB_2 ni, $\widetilde{y}_3$ ga ham CB_2 ni qo'shamiz (A_2 nuqta A_1A_3 dan pastda joylashganda CB_2 ni ayiramiz). So'ngra B_1B_3 ning tenglamasini yozish mumkin.

Misol. I bandda ishlangan misolni ko'raylik. Unda $A_1(2; 6)$, $A_2(4; 9)$, $A_3(7; 4)$ edi. Ravshanki, (A_2 nuqta A_1A_3 dan yuqorida joylashgan) (9.10-chizma).



9.10-chizma

Sodda hisoblashlar bajaramiz:

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{4-2}{7-4} = \frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad \widetilde{y} = \frac{6 + \frac{2}{3} - 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{26}{5}, \quad \widetilde{y} = \frac{26}{5}.$$

$$CA_2 = 9 - \frac{26}{5} = \frac{19}{5}, \quad CB_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{5} = \frac{19}{15}, \quad CB_2 = \frac{19}{15}.$$

Nihoyat, B_1 va B_3 larning ordinatalarini topamiz:

$$\widetilde{y}_1 = 6 + \frac{19}{15} = \frac{109}{15}, \quad \widetilde{y}_3 = 4 + \frac{19}{15} = \frac{79}{15}.$$

Demak, $B_1\left(2,\ \frac{109}{15}\right),\quad B_2\left(7,\ \frac{79}{15}\right).$

Endi B_1B_3 chiziqning tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-\frac{109}{15}}{\frac{79}{15}-\frac{109}{15}} \quad \text{yoki} \quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{121}{15}.$$

Aytib o'taylikki, CB_2 topilgandan keyin A_1A_3 tenglamasini yozib, o'ng tomonga CB_2 ni qo'shib qo'yilsa ham B_1B_3 tenglamasi chiqadi. Ko'rilayotgan holda A_1A_3 tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-6}{4-6} \quad \text{yoki} \quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{34}{5}.$$

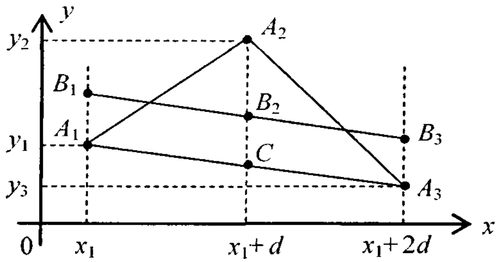
Endi tenglamaning o'ng tomoniga $\frac{19}{15}$ ni qo'shsak, ya'ni o'sha $y=-\frac{2}{5}x+\frac{121}{15}$ tenglama chiqadi. Ravshanki, $-\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{3}+\frac{121}{15}=\frac{19}{3}-\bar{y}$.

Taqqoslash uchun eng kichik kvadratlar usuli bilan topilgan tenglama $y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}$ va geometrik usul bilan topilgan tenglama $y=-\frac{2}{5}x+\frac{34}{5}$ bir xil emasligini ta'kidlab o'taylik. Ammo har ikki to'g'ri chiziq ham $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{13}{3},\ \frac{19}{3}\right)$ nuqtadan o'tadi. Ba'zi hollarda, yuqorida aytib o'tganimizdek, empirik va aniq to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushishi mumkin. Quyidagi teorema bu chiziqlar ustma-ust tushishi uchun $n=3$ bo'lganda yetarli shartni ifodalaydi.

9.3-teorema. Tekislikning birinchi choragida bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $0<x_1< < x_2<x_3$ nuqta berilgan bo'lsin. (1) va (3) tenglamalar ustma-ust tushishi uchun x_1, x_2, x_3 sonlar arifmetik progressiya tashkil etishi ye*tarli*.

Isbot. Teoremani ikki usul bilan isbotlash mumkin. Ulardan birinchisini geometrik, ikkinchisini algebraik usul deb atadik.

Geometrik usul. $0 < x_1$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_1 + 2d$, $d > 0$ bo'lsin. $A_1A_2A_3$ nuqtalar shunday joylashganki, A_2 nuqta A_1 dan o'ngroqda, A_3 esa A_2 dan o'ngroqda bo'ladi. A_2 nuqta A_1A_3 to'gri chiziqdan yo yuqorida, yoki pastda joylashgan bo'ladi. Biz A_2 nuqta A_1A_3 nuqtadan yuqorida joylashgan holni ko'ramiz (A_1A_3 dan pastda bo'lganda mulohazalar o'xshash) (9.11-chizma).



9.11-chizma

Chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'i grafigini $n=3$ bo'lganda G'.Nasritdinov tavsiya etgan geometrik usul bilan chizib olamiz[1]. Buning uchun A_1, A_2, A_3 nuqtalarni tutashtirib A_1 A_2 A_3 burchakni hosil qilamiz va A_2 nuqtadan perpendikular tushiramiz.

U A_1A_3 ni C nuqtada kesib o'tadi. Endi A_2C ni uchta teng bo'laklarga bo'lamiz. C nuqtaga yaqin uchdan bir bo'lakni B_{2C} deb belgilaymiz. Endi B$_2$ nuqtadan A_1 A_3 ga parallel o'tkazamiz va uni B_1B_3 deb belgilaymiz. B_1B_3 chiziq chiziqli regressiyaning asl grafigi bo'ladi (9.11-chizmaga qarang). Haqiqatan, 9.11-chizmadan yasashga ko'ra $A_1B_1=A_3B_3$, $A_2B_2=2A_1B_1$. Ordinatalar bo'yicha yozsak, $(y_1-\widetilde{y}_1)+(y_2-\widetilde{y}_2)+(y_3-\widetilde{y}_3)=0$ tenglik o'rinli. Chizmaga qarab quyidagilarni yozish mumkin:

$$CA_2=y_2-\frac{1}{2}(y_1+y_3),\quad CB_2=\frac{1}{3}CA_2=\frac{1}{2}(2y_2-y_1-y_3)\,.$$

Endi B_1 va B_3 nuqtalarning ordinatlari topish uchun A_1 va A_3 nuqtalarning ordinatlariga CB_2 ni qo'shish kerak (A_2 nuqta A_1A_3 dan pastda joylashganda CB_2 ni ayirish kerak). Shunday qilib, B_1 va B_3 nuqtalar uchun $B_1\left(x_1,\frac{5y_1+2y_2-y_3}{6}\right)$, $B_3\left(x_1+2d,\frac{5y_3+2y_2-y_1}{6}\right)$ va shu ikki nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasini yozish mumkin:

$$\frac{x+x_1}{x_1+2d-x_1}=\frac{y-\frac{5y_1+2y_2-y_3}{6}}{\frac{5y_3+2y_2-y_1}{6}-\frac{5y_1+2y_2-y_3}{6}}\,.$$

[1] G'. Nasriddinov. Chiziqli regressiya chizig'ini qurishning geometrik usuli. FMI, Ilmiy-uslubiy jurnal, Toshkent, 2005. № 6(7–13).

Tenglamani soddalashtirib yozamiz:

$$y=\frac{y_3-y_1}{2d}x+\frac{1}{6d}(5d\cdot y_1+2d\cdot y_2-d\cdot y_3-3x_1y_3+3x_1y_1).$$

Bundan asl to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti $\bar{a}=\frac{1}{2d}(y_3-y_1)$ ekani kelib chiqadi.

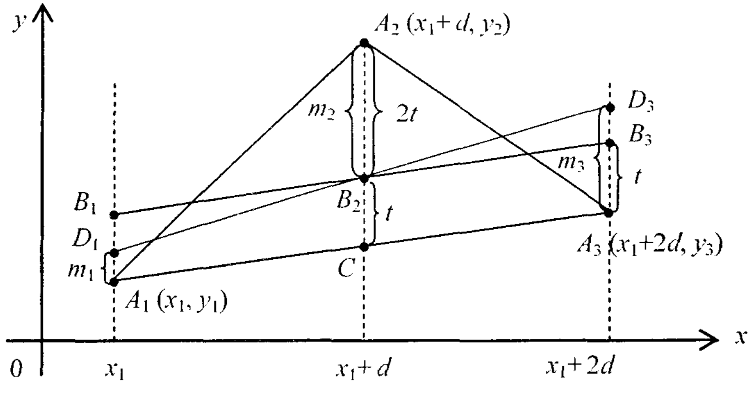
Endi eng kichik kvadratlar usuli yordamida empirik tenglamani topish va burchak koeffitsientini aniqlash mumkin.

$$a_0=\frac{3\left[x_1y_1+(x_1+d)y_2+(x_1+2d)y_3\right]-(x_1+x_1+d+x_1+2d)(y_1+y_2+y_3)}{3\cdot[x+(x_1+d)^2+(x_1+2d)^2]-(x_1+x_1+d+x_1+2d)^2}=$$

$$=\frac{1}{2d}(y_3-y_1)$$

Ko‘rinadiki, $a_0=\bar{a}$ tenglik kelib chiqadi. 1-teoremaga ko‘ra aniq va empirik tenglamalar ustma-ust tushadi, ularga mos to‘g‘ri chiziqlar ham ustma-ust tushadi. *Teorema isbot bo‘ldi.*

Algebraik usul.[1] Endi 9.3-teoremani ikkinchi usul bilan isbotlaymiz.



9.12-chizma

Avvalo, ravshanki.

$\bar{x}=\frac{1}{3}\cdot(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{3}\cdot(x_1+x_1+d+x_1+2d)=x_1+d$, ya’ni

[1] 9.3- teorema isbotining algebraik usulini O‘zMU iqtisodiyot fakultetining sobiq talabasi A. Murtazayev taklif etgan.

$\bar{x} = x_1 + d$, $\bar{y} = \frac{1}{3}\cdot(y_1 + y_2 + y_3)$, $\tilde{\bar{y}} = \frac{1}{2}\cdot(y_1 + y_3)$ (9.12-chizmaga qarang). B_2 nuqtaning absissasi $\bar{x} = x_1 + d$. Endi shu nuqtaning ordinatasini topamiz.

$$y_2 - \tilde{\bar{y}} = y_2 - \frac{1}{2}\cdot(y_1 + y_3) = \frac{2y_2 - y_1 - y_3}{2}, \quad CB_2 = \frac{2y_2 - y_1 - y_3}{6},$$

$$\tilde{\bar{y}} + CB_2 = y_2 - \frac{1}{2}\cdot(y_1 + y_3) + \frac{2y_2 - y_1 - y_3}{6} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \bar{y}.$$

Demak, B_2 nuqtaning ordinatasi $\bar{y}$. Shunday qilib, $B_2(\bar{x}, \bar{y})$.

Mulohazalarni davom ettirish uchun quyidagi belgilarni kiritamiz:

$A_1D_1 = m_1$, $A_2B_2 = m_2 = 2t$, $A_3D_3 = m_3$, $A_1B_1 = CB_2 = A_3B_3 = t$.

Belgilardan ko‘rinadiki, B_1B_3 — chiziqli dasturlashning aniq chizig‘i, D_1D_3 esa, uning empirik chizig‘i. Bu chiziqlar 1-teoremaga asosan $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtada kesishadi. Chizmada bu nuqtalar B_2 dan iborat. Biz B_1B_3 va D_1D_3 chiziqlar ustma-ust tushishini ko‘rsatamiz. Uning yana ushbu

$$l_\Delta = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2, \qquad L_\Delta = A_1D_1^2 + A_2D_2^2 + A_3D_3^2$$

belgilarini kiritamiz. Ular

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{3}(y_i - \bar{y}_i)^2, \qquad L_\Delta = \sum_{i=1}^{3}(y_i - \tilde{\bar{y}}_i)^2$$

miqdorlarni anglatadi. Chizmaga ko‘ra $l_\Delta = 6t^2$, $L_\Delta = m_1^2 + 4t^2 + m_3^2$ tengliklar o‘rinli. Endi $L_\Delta - l_\Delta$ ayirmani baholaymiz. Avvalo $A_1D_1D_3A_3$ to‘rtburchak trapetsiya va CB_2 ning o‘rta chizig‘idan iborat. Shunga ko‘ra $CB_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_3) = t$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$L_\Delta - l_\Delta = m_1^2 + m_3^2 - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot(m_1 + m_3)^2 = \frac{1}{2}\cdot(m_1 - m_3)^2 \geq 0$$

Eng kichik kvadratlar usuliga ko‘ra [2] $\min L_\Delta$ mavjud, chunki

$L_\Delta - l_\Delta \geq 0$ yoki $L_\Delta \geq l_\Delta$.

Demak, $\min L_\Delta = l_\Delta$. Bundan $m_1 = m_3$ ekani kelib chikadi. Bu esa B_1 va D_1 nuqtalar, B_3 va D_3 nuktalar ustma-ust tushishini ko‘rsatadi. Shunday qilib, B_1B_3 va D_1D_3 chiziqlar ustma-ust tushadi.

Teorema isbot bo‘ldi.

9-bobga oid masalalar

I. Quyida n=3 bo'lganda narx va talab hamda takliflarning statistik qiymatlari jadval ko'rinishida berilgan. Shu ma'lumotlar bo'yicha quyidagi savollarga javob berilsin (9.4-jadval).

1. EKKU yordamida juftlik chiziqli regressiya koeffitsientlari a_0 va b_0 topilsin, juftlik chiziqli regressiyaning empirik tenglamasi yozilsin.

2. Geometrik usul bilan juftlik chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'i yasalsin va tenglamasi chiqarilsin.

9.4-jadval

1	x	3	5	8	$a_0=-\frac{17}{19}$	$b_0=\frac{21}{19}$	$y=-\frac{17}{19}+\frac{21}{19}x$
	y	4	2	9	$\bar{a}=-\frac{1}{3}$	$\bar{b}=1$	$y=-\frac{1}{3}+x$
2	x	1	3	6	$a_0=6$	$b_0=\frac{1}{2}$	$y=6+\frac{1}{2}x$
	y	8	5	10	$\bar{a}=\frac{19}{3}$	$\bar{b}=\frac{2}{5}$	$y=\frac{19}{3}+\frac{2}{5}x$
3	x	2	5	7	$a_0=8$	$b_0=-\frac{1}{2}$	$y=8-\frac{1}{2}x$
	y	6	8	3	$\bar{a}=\frac{127}{15}$	$\bar{b}=-\frac{3}{5}$	$y=\frac{127}{15}-\frac{3}{5}x$
4	x	3	6	8	$a_0=\frac{5}{2}$	$b_0=\frac{1}{2}$	$y=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}x$
	y	5	3	8	$\bar{a}=\frac{29}{15}$	$\bar{b}=\frac{3}{5}$	$y=\frac{29}{15}+\frac{3}{5}x$
5	x	3	5	7	$a_0=\frac{55}{12}$	$b_0=\frac{3}{4}$	$y=\frac{55}{12}+\frac{3}{4}x$
	y	8	6	11	$\bar{a}=a_0$	$\bar{b}=b_0$	$y=\frac{55}{12}+\frac{3}{4}x$
6	x	3	5	8	$a_0=\frac{67}{19}$	$b_0=\frac{10}{19}$	$y=\frac{67}{19}+\frac{10}{19}x$
	y	4	8	7	$\bar{a}=\frac{47}{15}$	$\bar{b}=\frac{3}{5}$	$y=\frac{47}{15}+\frac{3}{5}x$
7	x	2	4	6	$a_0=\frac{13}{3}$	$b_0=\frac{1}{4}$	$y=\frac{13}{3}+\frac{1}{4}x$
	y	4	7	5	$\bar{a}=a_0$	$\bar{b}=b_0$	$y=\frac{13}{3}+\frac{1}{4}x$
8	x	1	3	5	$a_0=\frac{11}{2}$	$b_0=-\frac{1}{2}$	$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}x$
	y	6	2	4	$\bar{a}=a_0$	$\bar{b}=b_0$	$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}x$

II. Faraz etaylik, biror region hududi bo'yicha bir kunda mehnatga layoqatli kishilar uchun jon boshiga o'rtacha zarur minimum xarajat (x so'm) va kunlik o'rtacha maoshga (y so'm) oid bir yillik shartli ma'lumotlar berilgan (9.5-jadval). 9.4-§ning 1-bandida keltirilgan 6 ta savolga javob berilsin.

9.5-jadval

	I				II			
	Bitta mehnatga layoqatli kishi uchun bir kunlik jon boshiga xarajat (x, so'm)				Bir kunlik o'rtacha maosh (y, so'm)			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	81	74	77	83	124	122	123	137
2	77	81	85	88	131	134	152	142
3	85	90	79	75	146	136	140	128
4	79	79	93	89	139	125	142	140
5	93	89	89	85	143	120	157	133
6	100	87	81	79	159	127	181	153
7	72	77	79	81	135	125	133	142
8	89	93	97	81	152	148	163	154
9	71	60	73	79	157	122	134	132
10	89	93	95	90	154	158	155	150
11	82	87	84	84	127	144	132	132
12	111	121	108	112	118	165	165	166

9.5-jadval yordamida 16 ta variant tuziladi. Agar variant (3; 4) deb belgilanadigan bo'lsa, I dan 3-ustunni va II dan 4-ustun olinadi.

9-bobga oid nazorat savollari

1. Ushbu $\bar{x},\ \bar{y},\ \overline{y\cdot x},\ \overline{x^2},\ \bar{x}^2,\ \overline{y^2},\ \bar{y}^2$ *belgilar nimani anglatadi?*

2. x va y o'zgaruvchilar dispersiyasi formulasini yozing.

3. Ikki o'zgaruvchi kovariatsiyasi cov(x,y) uchun formulani yozing.

4. Chiziqli regressiya koeffitsientlarini hisoblash formulasini yozing.

5. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsienti r_{xy} *uchun formulani yozing.*

6. Determinatsiya koeffitsienti nima?

7. Approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi qanday hisoblanadi?

8. Fisherning F-belgisi qiymati qanday hisoblanadi?

9. Qachon regressiya tenglamasi statistik ma'nodor deyiladi?

10. Chiziqli regressiya tenglamasi koeffitsientlarining ma'nodorligi Styudentning t – belgisi yordamida qanday aniqlanadi?

11. Tasodifiy xatoliklar m_a, m_b, $m_{x_{xy}}$ *ni hisoblash formulalarini keltiring.*

12. Qanday hollarda a, b va r_{xy} *parametrlar statistik ma'no anglatadi?*

13. a va b parametrlarning ishonchlilik intervallari qanday topiladi?

10-BOB.MAKROIQTISODIY JARAYONLARNING NEOKLASSIK ISHLAB CHIQARISH FUNKSIYALARI (ICHF)

Har bir mamlakatda, har bir yiriklashtirilgan korxonalarda iqtisodiy o'sish ro'y berishi uchun ishlab chiqarishni tashkil qilish muhim ahamiyatga ega. Makroiqtisodiy jarayonlarda avvalo ishlab chiqarish omili (faktori) sifatida asosiy fondlar (K) va mehnat resurslari (L) ishtirok etadi. Ishlab chiqarilgan mahsulot sifatida milliy daromad Y olinadi. Shu K, L va Y miqdorlar orasidagi bog'lanish ishlab chiqarish funksiyasi deb ataladi va $Y=F(L,K)$ kabi yoziladi. Bunday ko'rinishda yozilgan ishlab chiqarish funksiyasi (IChF) ikki faktorli (ikki o'zgaruvchili) deb yuritiladi. Umuman, IChF lar bir va ko'p o'zgaruvchili bo'lishi mumkin.

XX asrning birinchi yarmida AQSH olimlari iqtisodchi P.Duglas va matematik K.Kobb tomonidan birinchi IChF kashf etildi. Ular AQSH iqtisodiyotini 1899–1922-yillardagi statistik ma'lumotlar bo'yicha ekonometrik analiz qilishdi. Ilmiy taraqqiyotlar natijasini 1928-yilda "Ishlab chiqarish nazariyasi" nomli jurnalda chop etishdi. Shundan keyin ishlab chiqarishni IChF lar yordamida o'rganish keng tarqaldi. Avvallari iqtisodiy o'sishni turli usullar bilan tadqiqot qilingan bo'lsa, endi IChF lar yordamida chuqurroq natijalar olish imkoniyati tug'ildi

10.1-§. Neoklassik IChF lar

Avval biz n o'zgaruvchili IChF lar ta'rifini keltiramiz. Ma'lumki, matematikada n o'zgaruvchili funksiyalar

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n) \tag{10.1}$$

ko'rinishda yoziladi.

10.1-*ta'rif*. *Agar* (10.1) *munosabatda* $x_1,x_2,...,x_n$ – *erkli o'zgaruvchilar sarf qilinayotgan (yoki foydalanilayotgan) resurs (xomashyo) hajmlarini, y – erksiz o'zgaruvchi ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini anglatsa,* (10.1) *funksiya n o'zgaruvchili IChF deyiladi.*

(10.1) funksiyani yana n-omilli (n-faktorli) deb ham atashadi. Iqtisodiy ma'nosi bo'yicha x_1, x_2,...,x_n o'zgaruvchilar nomanfiy. Shuning uchun (10.1) funksiyaning aniqlanish sohasi R_+^n dan iborat:

$R_+^n = \{ (x_1, x_2, ..., x_n): \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ ..., \ x_n \geq 0 \}$.

Agar koordinatalari x_1, x_2,...,x_n bo'lgan vektorni x desak,

$R_+^n = \{ x: \ x \geq 0 \}$.

10.2-*ta'rif*. *Agar* (10.1) *funksiya ushbu*:

1^0. *Funksiya* (10.1) R_+^n *da uzluksiz va birinchi hamda ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalari mavjud*;

2^0. $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = 0$, $i = 1,2,...,n$; $f(0,0,...,0) = 0$;

3^0. $f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \equiv \lambda \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\forall x \in R_+^n$; $\lambda > 0$;

4^0. $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} > 0$; $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} > 0$; ..., $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} > 0$ $\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} > 0 \right)$ $\forall x \in R_+^n$;

5^0. $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} < 0$; $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} < 0$; ...; $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} > 0$, $i \neq j$ $\forall x \in R_+^n$

shartlarni qanoatlantirsa, (10.1) *funksiyani n o'zgaruvchili neoklassik IChF deyiladi.*

Ta'rifdagi $1^0 - 5^0$ shartlar *neoklassik shartlar* deyiladi.

Ular ichida 3^0, 4^0 va 5^0 shartlar alohida ajralib turadi. Avval 3^0 shartga to'xtalamiz. Shu 3^0shartni qanoatlantiradigan funksiyalar *chiziqli bir jinsli* deb ataladi.

Ularga misollar keltiramiz:

1. $f(x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n$, $m_i > 0$, $i = 1,2,...,n$.

Ravshanki, $\lambda > 0$ bo'lganda

$$f(\lambda x) = m_1 \lambda x_1 + m_2 \lambda x_2 + ... + m_n \lambda x_n = \lambda (m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n) = \lambda \cdot f(x).$$

2. $f(x) = a_0 x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$; $a_0 > 0$; $0 < \alpha < 1$.

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = a_0 (\lambda x_1)^{\alpha} \cdot (\lambda x_2)^{1-\alpha} = a_0 \lambda^{\alpha} x_1^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} x_2^{1-\alpha} = \lambda f(x_1, x_2).$$

3. $f(x) = \dfrac{a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2}{b_1 x_1 + b_2 x_2}$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$; $b_1 > 0$, $b_2 > 0$,

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2)=\frac{a_1(\lambda x_1)^2+a_2(\lambda x_2)^2}{b_1(\lambda x_1)+b_2(\lambda x_2)}=\frac{\lambda^2(a_1x_1^2+a_2x_2^2)}{\lambda(b_1x_1+b_2x_2)}=\lambda\cdot f(x_1,x_2).$$

4. $f(x_1,x_2)=\sqrt{a_1x_1^2+a_2x_2^2},\quad a_1>0,\ a_2>0$.

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2)=\sqrt{a_1(\lambda x_1)^2+a_2(\lambda x_2)^2}=\sqrt{\lambda^2(a_1x_1^2+a_2x_2^2)}=\lambda\cdot f(x_1,x_2).$$

Chiziqli-bir jinsli funksiyalarda chiziqlik ma'nosi shuki, agar resurslarni λ marta ko'paytirilsa, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori ham λ marta ortadi. Chiziqli-birjinsli funksiyalar uchun quyidagi Eyler teoremasi o'rinli.

10.1-teorema. Agar (10.1) funksiya chiziqli – bir jinsli funksiya bo'lib, birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, ushbu

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}x_2+\ldots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}x_n\equiv f(x)\qquad\forall x\in R_+^n \tag{10.2}$$

ayniyat o'rinli.

L.Eyler yanada umumiyroq, $\delta>0$ tartibli bir jinsli funksiya tushunchasini kiritgan.

10.3-*ta'rif*. *Agar* (10.1) *funksiya uchun ushbu*

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)\equiv\lambda^\delta f(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \lambda>0;\ \delta>0\quad\forall x\in R_+^n \tag{10.3}$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, (10.1) *funksiya* *<u>δ-tartibli bir jinsli funksiya</u>* *deyiladi.*

10.2-teorema. Agar (10.1) funksiya (10.3) shartni qanoatlantirsa, quyidagi

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}x_2+\ldots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}x_n\equiv\delta\cdot f(x),\qquad\forall x\in R_+^n \tag{10.3}$$

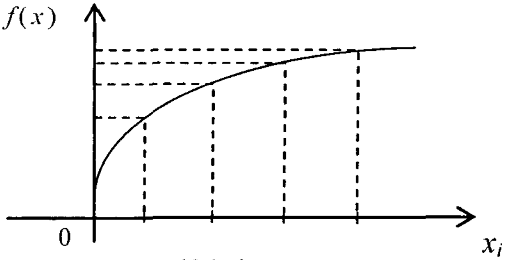
ayniyat o'rinli.

Agar $\delta>1$ bo'lib, ishlab chiqarish masshtabi $\lambda>1$ marta ko'paytirilsa, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori λ^δ marta ko'payadi. Bunda ishlab chiqarish masshtabining orttirilishi samaradorlikka olib keladi. Agar $\delta<1$ bo'lsa, samaradorlik kamayadi.

Endi 4^0 va 5^0-shartlarga to'xtalaylik.

4^0-shartdagi har bir $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}>0$, $i=1,2,\ldots,n$ tengsizlik $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

funksiyaning x_i argumenti bo'yicha o'suvchi ekanini anglatadi, 5^0-shart esa, funksiyaning o'sishi sekinlashib borishini bildiradi (10.1-chizma).



10.1-chizma

Shu bilan birga $f(x)$ funksiya x_i bo'yicha botiq ekani $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} < 0$, $i = \overline{1,n}$ tengsizliklardan kelib chiqadi.

Endi ikki faktorli (ikki o'zgaruvchili) neoklassik IChF larga alohida to'xtalamiz.

Yuqorida ikki faktorli IChF ni

$$Y = F(L,K) \qquad (10.5)$$

ko'rinishda yozilishini qayd qilib o'tdik.

Shu (10.5) IChF uchun $1^0 - 5^0$ shartlar quyidagicha yoziladi:

1^0. *$F(L,K)$ funksiya R_+^2 sohada aniqlangan, uzluksiz va birinchi hamda ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega.*

2^0. $F(0,K) = F(L,0) = 0;\quad F(0,0) = 0;$

3^0. $F(\lambda L, \lambda K) = \lambda F(L,K) \quad \forall (L,K) \in R_+^2;$

4^0. $\frac{\partial F(L,K)}{\partial L} > 0;\quad \frac{\partial F(L,K)}{\partial K} > 0 \quad \forall (L,K) \in R_+^2;$

5^0. $\frac{\partial^2 F(L,K)}{\partial L^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 F(L,K)}{\partial K^2} < 0;\quad \frac{\partial^2 F(L,K)}{\partial L\, \partial K} \geq 0 \quad \forall (L,K) \in R_+^2.$

10.2-§. Kobb-Duglas va Solou IChFlari

Asosiy ikki faktorli neoklassik IChF larga misol sifatida Kobb-Duglas va Solou funksiyalarini keltirish mumkin. Ularni alohida-alohida o'rganamiz.

1. Kobb-Duglas funksiyasi. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$Y = F(L,K) = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{10.6}$$

Bu funksiyaning kashf etilishi tarixi yuqorida aytib o'tildi. Endi (10.6) funksiya uchun 1^0– 5^0-shartlari bajarilishini tekshiramiz. 1^0 va 2^0-shartlarning bajarilishi ravshan. 3^0-shartni tekshiramiz:

$$Y = F(\lambda L, \lambda K) = a_0 (\lambda K)^{\alpha} \cdot (\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda a_0 K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} = \lambda F(L,K).$$

4^0-shart xususiy hosilalarni bevosita hisoblash yordamida tekshiriladi:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = a_0 \cdot (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial K} = a_0 \cdot \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0.$$

Endi 5^0 ni tekshirish qoldi. Uning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = a_0 (1-\alpha)(-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1} = -a_0 \cdot \alpha (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = a_0 \cdot \alpha (\alpha - 1) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} = -a_0 \cdot \alpha (1-\alpha) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = a_0 (1-\alpha) \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{-\alpha} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}.$$

Keyingi mulohazalarda qisqalik uchun Kobb-Duglas funksiyasi haqida gap ketsa, (K-D) deb yozamiz.

2. Solou funksiyasi. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$Y = F(L,K) = a_0 \left[a K^{-\rho} + (1-a) L^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < a < 1, \quad \rho > -1. \tag{10.7}$$

Mazkur funksiya 1961-yilda 4 ta olim: K.Errou, X. Cheneri, B. Minal va R.Solou tomonidan kashf etilgan. Uni qisqalik uchun odatda Solou funksiyasi – SES funksiyasi (Constant Elasticity of Substitution – o'zgarmas elastiklik koeffitsienti) deb yuritiladi. Solou funksiyasi uchun 1^0– 5^0-shartlarni tekshirishga kirishamiz. 1^0-shartning bajarilishi ravshan. 2^0-shartni tekshirish uchun (10.7) funksiyani ushbu

$$F(L,K) = \frac{a_0 \cdot K \cdot L}{\left[a L^{\rho} + (1-a) K^{\rho} \right]^{1/\rho}}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bundan ko'rinadiki, $\rho > 0$ bo'lganda

$F(0,K)=F(L,0)=0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Ammo $-1<\rho<0$ bo'lganda $F(0,K)=a_0 aK\neq 0$, $F(L,0)=a_0(1-a)L\neq 0$. Bundan ko'rinadiki, $-1<\rho<0$ tengsizlik o'rinli bo'lganda Solou funksiyasi neoklassik bo'la olmaydi. Bu Solou funksiyasi IChF emas ma'nosini anglatmaydi, faqat u neoklassik bo'lmaydi xolos.

Endi 3^0 shartni tekshiraylik ($\lambda>0$):

$$F(\lambda L,\lambda K)=a_0\left[a(\lambda K)^{-\rho}\cdot(1-a)(\lambda L)^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=a_0\left[\lambda^{-\rho}aK^{-\rho}+\lambda^{-\rho}(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=$$

$$=a_0(\lambda^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=\lambda F(L,K)\cdot$$

Demak, Solou funksiyasi uchun 3^0-shart bajariladi.

Endi 4^0 va 5^0-shartlarni tekshirishga o'tamiz. Buni bevosita hosilalarni hisoblash yordamida amalga oshiramiz:

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}=a_0\cdot(-1/\rho)\cdot\left[a\cdot K^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot(1-a)\cdot(-\rho)L^{-\rho-1}=$$

$$=a_0\cdot(1-a)\cdot L^{-\rho-1}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}>0;$$

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=a_0\cdot(-1/\rho)\cdot\left[a\cdot K^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot a\cdot(-\rho)K^{-\rho-1}=$$

$$=a_0\cdot a\cdot K^{-\rho-1}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}>0\cdot$$

Ikkinchi tartibli hosilalar ancha "qo'pol" bo'lgani uchun $[...]=\left[aK^{-\rho}\cdot+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]$ belgilashdan foydalanish qulay bo'ladi.

Endi hisoblashga o'tamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=a_0\cdot(1-a)\cdot\left\{(-\rho-1)L^{-\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-1}+L^{-\rho-1}(-1/\rho-1)\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}(1-a)^{-\rho}L^{\rho-1}\right\}=$$

$$=a_0\cdot(1-a)(-\rho-1)\left\{L^{-\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-1}+(1/\rho-1)\cdot(-\rho)(1-a)L^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}\right\}=$$

$$=a_0\cdot(1-a)\cdot(-\rho-1)\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}\left\{L^{-\rho-2}\left(aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right)-(1-a)L^{-2\rho-2}\right\}=$$

$$= a_0(1-a)(-\rho-1)\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}\left\{aL^{-\rho-2}K^{-\rho}+(1-a)L^{-2\rho-2}-(1-a)L^{-2\rho-2}\right\}=$$

$$= -a_0\cdot(1-a)\cdot(\rho+1)\cdot a\cdot L^{-\rho-2}K^{-\rho}\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}<0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=a_0 a\cdot\left\{(-\rho-1)\cdot K^{-\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-1}+K^{-\rho-1}\left(-\frac{1+\rho}{\rho}\right)\cdot[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}a\cdot(-\rho)K^{-\rho-1}\right\}=$$

$$= a_0 aK^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}\left\{(-\rho-1)K^{\rho}\left(-(1+\rho)/\rho\right)\cdot[...]+a(\rho+1)\right\}=$$

$$= a_0 a\cdot K^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}\left\{(-\rho-1)\cdot K^{\rho}\left(a\cdot K^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right)+a\cdot(\rho+1)\right\}=$$

$$= a_0 a\cdot K^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}\left\{-(\rho+1)a-(\rho+1)(1-a)K^{\rho}L^{-\rho}+a\cdot(\rho+1)\right\}=$$

$$= -a_0 a\cdot(1-a)\cdot(\rho+1)\cdot K^{-\rho}L^{-\rho}K^{-2\rho-2}\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}=$$

$$= -a_0\cdot a\cdot(\rho+1)\cdot(1-a)\cdot K^{-\rho-2}L^{-\rho}\cdot[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}<0$$

Nihoyat, $\frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}$ ni hisoblash qoldi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}=a_0\cdot(1-a)\cdot L^{-\rho-1}\cdot\left(-(1+\rho)/\rho\right)\cdot[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}\cdot a\cdot(-\rho)\cdot K^{-\rho-1}=$$

$$= a_0\cdot(1-a)\cdot a\cdot(1+\rho)\cdot L^{-\rho-1}\cdot K^{-\rho-1}\cdot[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}>0$$

Shunday qilib, Solou funksiyasi uchun 1^0, 3^0–5^0-shartlar va $\rho>0$ bo‘lganda, 2^0 shart ham bajariladi.

Yuqorida $\rho=0$ bo‘lgan hol ko‘rilmadi. Umuman, Solou funksiyasining turli ko‘rinishlari bor, u g‘oyatda “boy” funksiyadir. Jumladan, $\rho\to 0$, $\rho\to -1$ va $\rho\to +\infty$ hollarni alohida-alohida ko‘rish lozim bo‘ladi.

Avval $\rho > 0$ holni ko‘raylik. Buning uchun Solou funksiyasini logarifmlaymiz:

$$\ln Y = \ln a_0 - \frac{1}{\rho}\ln\left[aK^{-\rho} + (1-a)\cdot L^{-\rho}\right].$$

Endi $\lim\limits_{\rho\to 0}\ln Y$ ni hisoblaymiz va Lopital qoidasidan foydalanamiz:

$$\lim_{\rho\to 0}\ln Y = \ln a_0 - \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\ln\left[aK^{-\rho} + (1-a)\cdot L^{-\rho}\right] =$$

$$= \ln a_0 - \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\ln\frac{aL^{\rho} + (1-a)\cdot K^{\rho}}{K^{\rho}\cdot L^{\rho}} =$$

$$= \ln a_0 - \lim_{\rho\to 0} 1/\rho\cdot\left[\ln\left(aL^{\rho} + (1-a)\cdot K^{\rho}\right) - \rho\ln(K\cdot L)\right] =$$

$$= \ln a_0 - \ln(K\cdot L) - \lim_{\rho\to 0}\frac{\ln\left(aL^{\rho} + (1-a)\cdot K^{\rho}\right)}{\rho} =$$

$$= \ln a_0 + \ln(KL) - \lim_{\rho\to 0}\frac{aL^{\rho}\ln L + (1-a)\cdot K^{\rho}\ln K}{aL^{\rho} + (1-a)\cdot K^{\rho}} =$$

$$= \ln(a_0 KL) - \left[aLnL + (1-a)\ln K\right] =$$

$$= \ln(a_0 KL) - \ln K^{1-a}L^{a} = \ln\left(a_0 K^{a} L^{1-a}\right).$$

Shunday qilib,

$$\lim_{\rho\to 0}\ln Y = \ln\left(a_0 K^{a} L^{1-a}\right).$$

Bundan

$$\lim_{\rho\to 0} Y = a_0 K^{a} L^{1-a}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < a < 1$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, $\rho\to 0$ da Solou funksiyasi (K-D)ga aylanadi. Bu funksiya uchun esa $1^0 - 5^0$-shartlar bajariladi.

Endi $\rho\to +\infty$ bo'lsin. $\lim\limits_{\rho\to +\infty} Y$ ni hisoblaymiz:

$$\lim_{\rho\to +\infty} Y = a_0 \lim_{\rho\to +\infty}\left[aK^{\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-1/\rho} =$$

$$= a_0 \lim_{\rho\to+\infty} \frac{K\cdot L}{aL^{\rho}+(1-a)K^{1/\rho}} = \begin{cases} a_0 L, & \text{agar} \quad L<K \text{ bo‘lsa,} \\ a_0 K, & \text{agar} \quad K<L \text{ bo‘lsa,} \end{cases}$$

Shunday qilib, biz quyidagi IChF ni hosil qildik:

$$Y = a_0 \min\{L;\ K\}.$$

Mazkur funksiya ham Solou funksiyasining xususiy holi bo‘lib, u *tayinlangan proporsiyali* IChF yoki *Leontev funksiyasi* deb yuritiladi.

Nihoyat, $\rho > -1+0$ holni ko‘raylik. Bu hol osongina hal qilinadi:

$$\lim_{\rho\to-1} Y = a_0\left[\, a\, K + (1-a)\, L\right] = a_0 aK + a_0(1-a)L = \bar{a}K + \bar{b}L\ ,$$

bunda $\bar{a} = a_0 a$, $\bar{b} = a_0(1-a)$. Ko‘rinib turibdiki, bu holda *chiziqli* IChF hosil bo‘ldi.

Oxirgi ikki holda hosil qilingan IChF lar neoklassik shartlarni qanoatlantirmaydi. Ammo ular o‘ziga xos IChF lardan iborat.

Shuni eslatib o‘tamizki, 1960–1990-yillar uchun O‘zbekistonga taalluqli makroiqtisodiy IChF hisoblangan. U quyidagi ko‘rinishga ega:

$$Y = F(L,K) = e^{0{,}011}\cdot K^{0{,}3616}\cdot L^{0{,}6386},$$

bunda $\alpha = 0{,}3616$; $1-\alpha \approx 0{,}6386$; $a_0 = e^{0{,}011}$. Ko‘rinadiki, bu funksiya (K-D) funksiyasidan iborat.

10.3-§. Asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalar

Iqtisodiy jarayonlarni o‘rganishda quyidagi asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalar muhim ahamiyat kasb etadi:

1⁰. $\frac{K}{L} = k$ – qurollanganlik, $\frac{L}{K} = \frac{1}{k}$ – ishlab-chiqarish quvvati.

2⁰. $y = \frac{Y}{L} = \frac{F(L,K)}{L}$ – o‘rtacha mehnat unumdorligi.

3⁰. $z = \frac{Y}{K} = \frac{F(K,L)}{K}$ – o‘rtacha fond unumdorligi.

4⁰. $v = \frac{\partial F(L,K)}{\partial L}$ – mehnat bo‘yicha marjinal (limit) unumdorlik.

5⁰. $r = \frac{\partial F(L,K)}{\partial K}$ – fondlar bo‘yicha marjinal (limit) unumdorlik.

$6^0.\ \alpha=\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F(L,K)}$ – fondlar bo‘yicha elastiklik koeffitsienti.

$7^0.\ \beta=\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F(L,K)}$ – mehnat bo‘yicha elastiklik koeffitsienti.

$8^0.\ S=-\dfrac{dK}{dL}=\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L}:\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}$ – $F(L,K)$ – o‘zgarmas bo‘lganda L resursni K resurs bilan almashtirishning marjinal (limit) normasi.

$9^0.\ \sigma=\left(\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1}$ – $F(L,K)$ – o‘zgarmas bo‘lganda L resursni K resurs bilan almashtirish elastikligi (aslida o‘sha elastiklikka teskari miqdor).

$10^0.\ K\cdot\dfrac{\partial F}{\partial K}$ – kapitaldan olingan daromad.

$11^0.\ L\cdot\dfrac{\partial F}{\partial L}$ – mehnatdan olingan daromad.

$12^0.\ L\cdot\dfrac{\partial F}{\partial L}+K\cdot\dfrac{\partial F}{\partial K}=F$ – yig‘indi daromad (milliy daromad).

Endi IChFning chiziqli-bir jinsliligidan foydalanib, quyidagilarni yozish mumkin:

$$F(L,K)=F\left(L\cdot 1,L\cdot\frac{K}{L}\right)=LF\left(1,\frac{K}{L}\right)=L\cdot F(1,k)=L\cdot f(k),$$

bunda $f(k)=F(1,k)$ – o‘rtacha mehnat unumdorligi.

Keyingi mulohazalarda ushbu

$$F(L,K)=L\cdot f(k) \tag{10.8}$$

formuladan keng foydalanamiz.

Avval 1^0– 5^0-shartlarni shu k va $f(k)$lar nuqtayi nazaridan qarab chiqaylik:

$$0<\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\partial}{\partial K}[L\cdot f(k)]=L\cdot f'(k)\cdot\frac{\partial K}{\partial k}=L\cdot f'(k)\cdot\frac{1}{L}=f'(k).$$

Bundan $f'(k)>0$ ekani kelib chiqadi.

$$0<\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}[L\cdot f(k)]=f(k)+L\cdot f'(k)\frac{\partial k}{\partial L}=$$

$$=f(k)-Lf'(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right)=f(k)-k\cdot f'(k)$$

Demak, $f(k)-k\cdot f'(k)>0$ yoki $0<\dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)}<1$.

Shunday qilib, muhim formulaga egamiz:

$$0<\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}<1. \qquad (10.9)$$

Endi $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2}$ va $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2}$ hosilalarni o‘rganamiz:

$$0>\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\frac{\partial}{\partial K}(f'(k))=f''(k)\cdot\frac{1}{L}$$

Bundan $f''(k)<0$ tengsizlik kelib chiqadi.

$$0>\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=\frac{\partial}{\partial K}[f(k)-kf'(k)]=$$

$$=[f'(k)-f'(k)-k\cdot f''(k)]\cdot\frac{\partial k}{\partial L}=-k\cdot f''(k)\cdot\left(-\frac{K}{L^2}\right)=\frac{1}{L}k^2 f''(k).$$

Bundan yana $f''(k)<0$ kelib chiqadi.

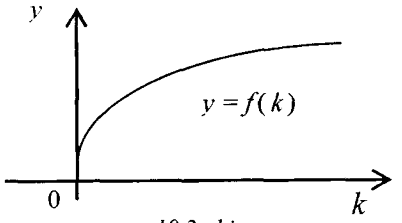
Shunday qilib, o‘rtacha mehnat unumdorligi $y=f(k)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$f(0)=0,\ f(k)>0,\ f'(k)>0,\ f''(k)<0,\quad \forall k>0. \qquad (10.10)$$

Shu bilan birga o‘rtacha mehnat unumdorligi uchun quyidagi munosabatlar ham o‘rinli:

$$\lim_{k\to+\infty} f(k) = +\infty, \quad \lim_{k\to+0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} f'(k) = 0. \qquad (10.11)$$

Endi (10.10) va (10.11) larga ko'ra $y=f(k)$ funksiya grafigini chizish mumkin (10.2-chizma). Grafik koordinata boshidan ordinata o'qiga urinib chiqadi va I chorakda joylashgan bo'ladi.



10.2-chizma

Misol uchun (K-D) funksiyani olaylik: $F(L,K) = a_0 K^\alpha L^{1-\alpha}$.

Bu holda o'rtacha mehnat unumdorligi $f(k) = \frac{F}{L} = a_0 K^\alpha L^{-\alpha} =$

$= a_0 \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = a_0 k^\alpha$ bo'ladi.

Endi $y = a_0 k^\alpha$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ funksiya uchun $f(0)=0$, $f(k) = a_0 k^\alpha > 0$, ekani ravshan. $f'(k) = a_0 \alpha k^{\alpha-1}$ ekanidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{k\to+0} f'(k) = \lim_{k\to+0} \frac{a_0\alpha}{k^{1-\alpha}} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} f'(k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_0\alpha}{k^{1-\alpha}} = 0,$$

$$f''(k) = a_0\alpha(\alpha-1)\cdot k^{\alpha-2} < 0.$$

Asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarning k, $f(k)$, $f'(k)$ va $f''(k)$ lar orqali ifodalanishiga to'xtalamiz:

1⁰. $\frac{K}{L} = k$.

2⁰. $y = \frac{Y}{L} = f(k)$.

3^0. $z=\frac{Y}{K}=\frac{f(k)}{k}$.

4^0. $v=\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}=f(k)-kf'(k)$.

5^0. $r=\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=f'(k)$.

6^0. $\alpha=\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{F}=[f(k)-kf'(k)]\cdot\frac{L}{Lf(k)}=1-\frac{kf'(k)}{f(k)}$.

7^0. $\beta=\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F}=f'(k)\frac{K}{Lf(k)}=\frac{kf'(k)}{f(k)}$.

8^0. $S=\frac{\partial F}{\partial L}:\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{f(k)-kf'(k)}{f'(k)}=\frac{f(k)}{f'(k)}-k$.

9^0. $\frac{dS}{dk}=\frac{[f'(k)]^2-f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}-1=-\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}$.

$$\sigma=\left[-\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}\cdot\frac{kf'(k)}{f(k)-kf'(k)}\right]^{-1}=\frac{f'(k)[kf'(k)-f(k)]}{kf(k)f''(k)}.$$

10^0. $K\cdot\frac{\partial F}{\partial K}=K\cdot f'(k)$.

11^0. $L\cdot\frac{\partial F}{\partial L}=L\cdot[f(k)-k\cdot f'(k)]$.

12^0. $L\cdot\frac{\partial F}{\partial L}+K\cdot\frac{\partial F}{\partial K}=L\cdot(f(k)-kf'(k))+K\cdot f'(k)=$

$$=L\cdot f(k)-L\frac{K}{L}\cdot f'(k)+K\cdot f'(k)=L\cdot f(k)=F(L,K).$$

(10.10) munosabatlarga ko‘ra $\frac{dS}{dk}>0$ va $\sigma>0$, 8^0 ga ko‘ra $S>0$.

10.4-§. Asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarni hisoblash

1. Endi (K-D) funksiyasi uchun asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarni hisoblaymiz: $F(L,K)=a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$.

2^0. $y=f(k)=\dfrac{F(L,K)}{L}=\dfrac{1}{L}a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}=a_0K^{\alpha}L^{-\alpha}=a_0\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\alpha}=a_0k^{\alpha}$;

3^0. $z=\dfrac{f(k)}{k}=\dfrac{a_0k^{\alpha}}{k}=a_0k^{\alpha-1}$;

4^0. $v=\dfrac{\partial F}{\partial L}=a_0k^{\alpha}-ka_0k^{\alpha-1}=a_0k^{\alpha}-a_0\alpha k^{\alpha}=a_0(1-\alpha)k^{\alpha}$;

5^0. $r=\dfrac{\partial F}{\partial K}=a_0\alpha k^{\alpha-1}$;

6^0. $\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}=1-\dfrac{ka_0\alpha k^{\alpha-1}}{a_0k^{\alpha}}=1-\alpha$;

7^0. $\dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F}=\dfrac{ka_0\alpha k^{\alpha-1}}{a_0k^{\alpha}}=\alpha$;

8^0. $S(k)=\dfrac{a_0k^{\alpha}}{a_0\alpha k^{\alpha-1}}-k=\dfrac{k}{\alpha}-k=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}k$;

9^0. $\dfrac{dS(k)}{dk}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$; $\quad \sigma=\dfrac{a_0k^{\alpha}(ka_0\alpha k^{\alpha-1}-a_0k^{\alpha})}{ka_0k^{\alpha}a_0\alpha(\alpha-1)k^{2\alpha-1}}=$

$$=\frac{a_0^2\alpha(\alpha k^{\alpha}-k^{\alpha})k^{\alpha-1}}{a_0^2\alpha(\alpha-1)k^{2\alpha-1}}=\frac{(\alpha-1)k^{\alpha}k^{\alpha-1}}{(\alpha-1)k^{2\alpha-1}}=1;$$

Demak, $\sigma=1$. Bu natijani ushbu $\sigma=\left(\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1}$ formula yordamida olish mumkin: $\sigma=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{k}{\frac{1-\alpha}{\alpha}k}\right)^{-1}=1$.

2. Navbatda Solou funksiyasi uchun asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarni hisoblab chiqamiz. Solou funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega edi:

$$F=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},\quad a_0>0,\quad 0<\alpha<1,\quad \rho>-1.$$

Endi hisob-kitobga o‘tamiz:

$$2^0.\ y=f(k)=\frac{F(L,K)}{L}=a_0\frac{1}{L}\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=$$

$$=a_0\left[L^{\rho}(aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=a_0\left[aL^{\rho}K^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}=$$

$$=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Shunday qilib, $f(k)=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$.

$$3^0.\ z=\frac{f(k)}{k}a_0k^{-1}\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}=a_0\left[k^{\rho}(a^{-\rho}k^{-\rho}+(1-a))\right]^{-\frac{1}{\rho}}=$$

$$=a_0\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}.$$

$$4^0.\ v=f(k)-kf'(k)=$$

$$=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}-\frac{ka_0}{-\rho}\cdot\left[ak^{-\rho}+(1-a)k^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}a(-\rho)k^{-\rho-1}=$$

$$=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot\left[ak^{-\rho}+(1-a)k^{-\rho}\right]=$$

$$=a_0\cdot(1-a)\cdot\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}.$$

$$5^0.\ r=f'(k)=a_0\left(-\frac{1}{\rho}\right)\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot a(-\rho)k^{-\rho-1}=$$

$$= a_0 a(-\rho)k^{-\rho-1}\left[ak^{-\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1} = a_0 a\, k^{\rho}\left[ak^{-\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1} =$$

$$= a_0 ak^{-\rho-1}\left[ak^{-\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1} = a_0 a \cdot \left[a + (1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}.$$

6^0. $\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F} = \dfrac{(1-a)k^{\rho}}{a+(1-a)k^{\rho}}$.

7^0. $\dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F} = \dfrac{a}{a+(1-a)k^{\rho}}$

Ravshanki, $\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F} + \dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F} = \dfrac{(1-a)k^{\rho}}{a+(1-a)k^{\rho}} + \dfrac{a}{a+(1-a)k^{\rho}} = 1$.

8^0. $S(k) = \dfrac{\partial F}{\partial L} : \dfrac{\partial F}{\partial K} = \dfrac{a_0(1-a)\left[ak^{\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}}{a_0(1-a)k^{-\rho-1}\left[ak^{\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}k^{\rho+1}$

9^0. $\sigma = \left(\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1} = \dfrac{1-a}{a}(\rho+1)k^{\rho}\dfrac{k}{\frac{1-a}{a}k^{\rho+1}} = \dfrac{1}{\rho+1}$.

Shunday qilib, $\sigma = \frac{1}{\rho+1}$, $\rho > -1$

Neoklassik (1^0– 5^0) shartlardan $y=f(k)$ uchun chiqadigan xulosalar va (K-D) hamda Solou IChF lari uchun asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarning ifodalari 10.1– va 10.2-jadvallarda keltirilgan.

10.1-jadval

Kobb-Duglas IChF uchun turli munosabatlar

$\dfrac{\partial F}{\partial L} > 0,$	$\dfrac{\partial F}{\partial L} = f(k) - k\cdot f'(k)$	$\Rightarrow$	$0 < \dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)} < 1$
$\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0,$	$\dfrac{\partial F}{\partial K} = f'(k)$	$\Rightarrow$	$f'(k) > 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \frac{1}{L} k^2 f''(k) \quad \Rightarrow \quad f''(k) < 0$	
$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{1}{L} f''(k) \Rightarrow f''(k) < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = -\frac{k \cdot f''(k)}{L} > 0$	

10.2-jadval

Solou IChF ning turli ko'rinishlari

$F(L,K) = a_0 \left[a K^{-\rho} + (1-a) L^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < a < 1, \quad \rho > -1$
$\lim\limits_{\rho \to 0} F(L,K) = a_0 K^a L^{1-a}$ (Kobb-Duglas)
$\lim\limits_{\rho \to +\infty} F(L,K) = a_0 \min\{L, K\}$ (tayinlangan koeffitsientli IChF)
$\lim\limits_{\rho \to -1} F(L,K) = a_0 a K + a_0 (1-a) L$ (chiziqli IChF)

10.5-§. Neoklassik IChF larning izokvantalari, izoklinallari va izokostalari

Aytaylik, $Y=F(L,K)$ – ikki faktorli neoklassik IChF bo'lsin. Ushbu

$$F(L,K)=C, \quad C=const > 0 \tag{10.12}$$

tenglama bilan berilgan bir parametrli chiziqlar oilasini ko'raylik. $F(L,K)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgani uchun (10.12) chiziqlar silliq. Shu (10.12) chiziqlar oilasining har bir chizig'i *izokvanta* deyiladi. Ko'rinadiki, har bir IChF uchun izokvantalar cheksiz ko'p bo'ladi. Ravshanki, izokvantalar grafigi tekislikdagi koordinatalar sistemasining I choragida joylashgan bo'ladi. Ular qator xossalarga ega. Bu xossalarga alohida to'xtalamiz.

10.4-*ta'rif*. *Grafigi koordinata boshidan chiqadigan va barcha izokvantalarni o'zgarmas burchak ostida kesib o'tadigan, shu bilan birga, kesishish nuqtasida izokvantalarga o'tkazilgan urinmalar o'zaro parallel bo'lgan har bir chiziq izoklinal deyiladi. Tegishli urinmalar izokostalar deyiladi* (10.3-, 10.4-chizmalar).

10.3-jadval

№	Asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalar (IMT)	IMTlarning k, $f(k)$, $f'(k)$, $f''(k)$ orqali ifodasi	Kobb-Duglas ICHF uchun	Solou ICHF uchun
1^0	$K/L = k$	–	–	–
2^0	$y = F/L$	$f(k)$	$a_0 k^{\alpha}$	$a_0\left[ak^{-\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$
3^0	$z = F/K$	$f(k)/k$	$a_0 k^{\alpha-1}$	$a_0\left[a + (1-a)k^{\rho}\right]$
4^0	$v = \dfrac{\partial F}{\partial L}$	$f(k) - k \cdot f'(k)$	$a_0(1-\alpha) \cdot k^{\alpha}$	$a_0(1+a)\left[ak^{-\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}$
5^0	$r = \dfrac{\partial F}{\partial K}$	$f'(k)$	$a_0\alpha \cdot k^{\alpha-1}$	$a_0 a\left[a + (1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}$
6^0	$\alpha = \dfrac{\partial F}{\partial K} \cdot \dfrac{K}{F}$	$\dfrac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$	α	$\dfrac{a}{a + (1-a)k^{\rho}}$
7^0	$\beta = \dfrac{\partial F}{\partial L} \cdot \dfrac{L}{F}$	$\dfrac{f(k) - k \cdot f'(k)}{f(k)}$	$1-\alpha$	$\dfrac{1-a}{ak^{-\rho} + (1-a)}$
8^0	$S = \dfrac{\partial F}{\partial L} : \dfrac{\partial F}{\partial K}$	$\dfrac{f(k) - k \cdot f'(k)}{f'(k)}$	$\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \cdot k$	$\dfrac{1-a}{a} k^{\rho+1}$
9^0	$\sigma = \left(\dfrac{dS}{dk} \cdot \dfrac{k}{S}\right)^{-1}$	$\dfrac{f'(k) \cdot \left[k \cdot f'(k) - f(k)\right]}{k \cdot f(k) \cdot f''(k)}$	1	$\dfrac{1}{\rho+1}$

Ta'rifga ko'ra izoklinallar ham, izokostalar ham cheksiz ko'p; izokvantalar (10.12) oilasining sath chiziqlaridan iborat.

Endi izokvantalarning differensial tenglamasini chiqaramiz. Uning uchun (10.12) ning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$dF(L,K)=\frac{\partial F}{\partial L}dL+\frac{\partial F}{\partial K}dK=0,$$

bunda

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}\bigg/\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}. \qquad (10.13)$$

(10.13) – birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama.

Misol sifatida Kobb-Duglas va Solou IChF larning differensial tenglamasini chiqaraylik.

1. $F(L,K)=a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$. Bundan

$$\frac{\partial F}{\partial L}=a_0(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}, \qquad \frac{\partial F}{\partial K}=a_0\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$$

Enki izokvantalarning differensial tenglamasini yozamiz:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{K}{L} \qquad (10.14)$$

2. $F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$, $\rho>-1$.

Xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

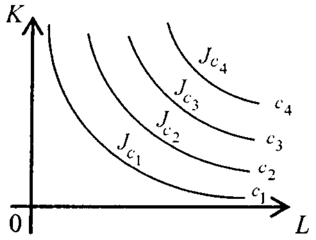
$$\frac{\partial F}{\partial L}=a_0(1-a)L^{-\rho-1}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial K}=a_0a\cdot K^{-\rho-1}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}.$$

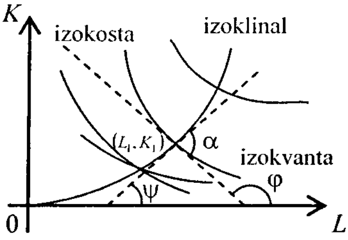
Soddalashtirilgandan keyin differensial tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{1-a}{a}\cdot\frac{K^{\rho+1}}{L^{\rho+1}} \qquad (10.15)$$

Har ikki (10.14) va (10.15) tenglamalar birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamadir. Ular osongina integrallanadi.



10.3-chizma



10.4-chizma

Ma'lumki, izokvantalarning differensial tenglamasi osongina topiladi (10.13 ga qarang). Endi iqtisodiyot uchun muhim bo'lgan *izoklinal* differensial tenglamasi, shu bilan birga izoklinal tenglamasini topish masalasi bilan shug'ullanaylik. Ta'rif bo'yicha izoklinal grafigi koordinata boshidan chiqadi va I chorakda joylashgan. Izoklinal chizig'idagi o'zgaruvchilarni L_1 va K_1 deylik. (L_1, K_1) nuqtadagi burchak koeffitsienti dK_1/dL_1 bo'ladi. Izokvantalar differensial tenglamasiga ko'ra kesishish nuqtasida ularning burchak koeffitsienti quyidagicha aniqlanadi:

$$\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)} = -\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L_1} : \frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K_1}.$$

Izoklinalga (L_1, K_1) da o'tkazilgan urinma L o'qi bilan ψ burchakni, izokvantaga shu nuqtada o'tkazilgan urinma L o'qi bilan φ burchak tashkil qilsin deylik (10.4-chizma). Unda $\alpha=180^0-\varphi+\psi$ va $tg\,\alpha=tg(\psi-\varphi)$ bo'ladi. $tg\,\alpha=\rho$ deb belgilaymiz, bu holda, $\alpha\neq 90^0$ bo'lganda

$$\rho=\frac{-tg\varphi+tg\psi}{1+tg\varphi\cdot tg\psi}=\frac{-\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)}+\frac{dK_1}{dL_1}}{1+\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)}\cdot\frac{dK_1}{dL_1}}. \qquad (10.16)$$

(10.16) ni yana ushbu

$$\rho=\frac{\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L_1}+\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K_1}\cdot\frac{dK_1}{dL_1}}{-\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L_1}\cdot\frac{dK_1}{dL_1}+\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K_1}} \qquad (10.17)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Ma’lumki, (L_1, K_1) nuqta $F(L,K)=C$ izokvantada yotadi. $tg\alpha=\rho$ ekanini e’tiborga olsak, (10.17) soddalashtirilgandan keyin quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{dK_1}{dL_1}=\frac{\rho\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K}-\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L}}{\rho\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L}+\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K}}\ . \qquad (10.18)$$

Topilgan tenglama izoklinallarning differensial tenglamasi. U birinchi tartibli bo‘lgani bilan osongina integrallanmaydi. Masalan, IChF $Y=F(L,K)=\sqrt{K\cdot L}$ bo‘lsin, hosilalarni (L_1, K_1) da hisoblab, (10.18) ga qo‘yamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}},\quad \frac{\partial F}{\partial K}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}},\quad \frac{dK_1}{dL_1}=\frac{\rho L_1-K_1}{\rho K_1+L_1}\quad \text{yoki}$$

$$K_1\to K,\quad L_1\to L\quad \text{da}\quad \frac{dK}{dL}=\frac{\rho L-K}{\rho K+L}$$

Oxirgi tenglama birinchi tartibli bir jinsli. Uni integrallash uchun $\frac{K}{L}=y$ almashtirish bajarish kerak. Hisob-kitoblarni talabaga qoldiramiz.

Agar $\alpha=90^0$ bo‘lsa, $\frac{dK_1}{dL_1}\cdot\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)}=-1$ bo‘ladi. Shuning uchun bu holda izoklinal tenglamasi

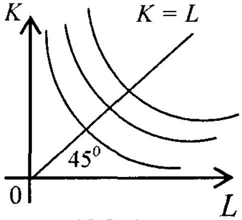
$$\frac{dK_1}{dL_1}=\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K}\bigg/\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Yuqorida ko‘rilgan misolda differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $\frac{dK_1}{dL_1}=\frac{L_1}{K_1}$.

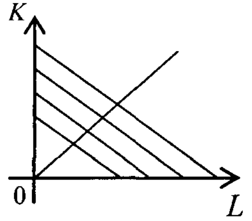
Bundan $K_1\cdot dK_1=L_1\cdot dL_1$, bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama. Uni integrallaymiz:

$$\frac{K_1^2}{2}=\frac{L_1^2}{2}+C\ .$$

Ammo izoklinal (0; 0) dan o'tadigani uchun $C=0$ bo'ladi. Shunday qilib, ko'rilayotgan holda izoklinal tenglamasi $K_1^2 - L_1^2 = 0$ bo'ladi. Izoklinal ta'rifiga ko'ra $K_1=L_1$ (bissektrisa) to'g'ri keladi (10.5-chizma).



10.5-chizma



10.6-chizma

Oxirida $K_1 > K$, $L_1 > L$ desak, $K=L$ – bissektrisa bo'ladi.

Izoklinal tenglamasi IChF chiziqli bo'lganda osongina topiladi. Haqiqatan, $Y=F(L,K)= aK+bL$, $a>0$, $b>0$ bo'lsin.

Unda $\dfrac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L} = b$, $\dfrac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K} = a$ va $\alpha \neq 90^0$.

Izoklinal tenglamasini yozamiz:

$$\frac{dK_1}{dL_1} = \frac{\rho \cdot a - b}{\rho \cdot a + b}, \qquad \rho \cdot a + b \neq 0.$$

Undan ($K_1 > K$, $L_1 > L$)

$$K = \frac{\rho \cdot a - b}{\rho \cdot a + b} \cdot L, \qquad \rho \cdot a + b \neq 0. \text{ kelib chiqadi.}$$

Agar $\alpha = 90^0$ bo'lsa,

$$\frac{dK_1}{dL_1} = -\left(\frac{dK}{dL}\right)^{-1}_{(L_1,K_1)} \text{ bo'ladi.}$$

Demak, izoklinal tenglamasi bu holda ushbu $K = \dfrac{a}{b} \cdot L$ ko'rinishda bo'ladi (10.6-chizma).

Chiziqsiz IChF uchun izoklinal tenglamasini topishning ratsional usuli mavjud. Buni chiziqlilashtirish usuli deyiladi. Uning g'oyasi quyidagicha: avvalo bu g'oya chiziqlilashtirish mumkin bo'lgan IChF uchun aytiladi.

Chiziqsiz IChF avvalo chiziqlilashtiriladi. Yangi $\overline{K}$, $\overline{L}$ larga nisbatan chiziqli IChF uchun izoklinal topiladi, so‘ngra $\overline{K}$ va $\overline{L}$ o‘rniga ularning K va L orqali ifodasi qo‘yiladi. Misol sifatida yuqorida ko‘rilgan $Y=F(L,K)=\sqrt{K\cdot L}$ IChF ni olaylik. Uning izokvantalari tenglamasi $\sqrt{K\cdot L}=S$. Uning ikki tomonini logarifmlaymiz:

$$\frac{1}{2}\ln K+\frac{1}{2}\ln L=\ln C$$

Endi $\ln K=\overline{K}$, $\ln L=\overline{L}$ deb, yangi $\overline{K}$, $\overline{L}$ larni kiritamiz. Unda $\frac{1}{2}\overline{K}+\frac{1}{2}\overline{L}=\ln C$ ga ega bo‘lamiz. Bu $F(\overline{L},\overline{K})=\frac{1}{2}\overline{K}+\frac{1}{2}\overline{L}$ – chiziqli IChFning izokvantalari tenglamasi. Endi izoklinal tenglamasini yozamiz:

$$\overline{K}=\frac{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}}\cdot\overline{L} \quad \text{yoki} \quad \overline{K}=\frac{p-1}{p+1}\cdot\overline{L}.$$

So‘ngra K va L ga o‘tamiz.

$$\ln K=\frac{p-1}{p+1}\cdot\ln L \ \text{yoki} \ K=L^{\frac{p-1}{p+1}}$$

Shu usul Kobb-Duglas hamda Solou IChF ga qo‘llanishi mumkin.

Izoklinallar ishlab chiqarishni uzoq vaqt davomida kengaytirib borish yo‘lini ko‘rsatadi. Agar (L_i, K_i) nuqta izokvantada yotsa, unga o‘tkazilgan urinma (izokosta) tenglamasi

$$K-K_i=\left.\frac{dK}{dL}\right|_{(L_i,K_i)}\cdot(L-L_i)$$

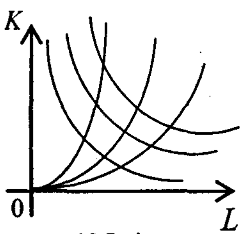
ko‘rinishda bo‘ladi. Izokostalar parallel bo‘lgani uchun ixtiyoriy izokvanta uchun $\left.\frac{dK}{dL}\right|_{(L_i,K_i)}=\gamma$, $\gamma=const$ bo‘ladi. Shu sababli izokosta tenglamasi $K-\gamma L=K_i-\gamma L_i$ ko‘rinishni oladi. Uni umumiyroq, $\omega_1 K+\omega_2 L=\omega_3$ ko‘rinishda yozsak, $\omega_1 K+\omega_2 L$ miqdor ishlab chiqarish resurslari sarfini anglatadi. Bu esa izokostalar ishlab chiqarish xarajatlari o'zgarmas bo'lgan nuqtalar geometrik o'rni ekanini anglatadi.

10.6-§. IChFning magistrallari. Chiziqlilashtirish usuli

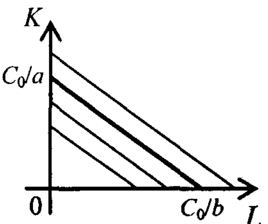
Faraz etaylik, $Y=F(L,K)$ chiziqli va neoklassik statik IChF bo'lsin. Eslatib o'tamizki, IChFning izokvantalari $F(L,K)=C$ tenglama bilan tavsiflanadigan chiziqlardan iborat. Izoklinal esa koordinata boshidan chiqadigan va barcha izokvantalarni o'zgarmas burchak ostida kesib o'tadigan chiziqdir. Izoklinallar soni cheksiz ko'p. Ular ichida *magistral* deb ataladigan va iqtisodiyotda muhim ahamiyatli chiziq bor.

Minimal sarflar bilan uzoq muddatga ishlab chiqarishni kengaytirish sharoitida ishlab chiqariladigan mahsulot (milliy daromad) hajmini maksimallashtirish masalasi yechimini ifodalaydigan izoklinal chizig'i *magistral* deyiladi. Shunday qilib, cheksiz ko'p izoklinallar orasidan uzoq davrga iqtisodiy o'sishni ta'minlaydiganini ajratib olish lozim (10.7-chizma). Quyida bu masalani yechish uchun optimallik belgisi bayon etiladi. Chiziqsiz IChF uchun esa *chiziqlilashtirish* usuli keltiriladi.

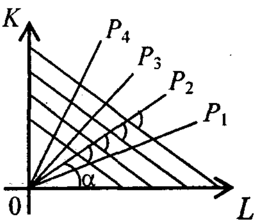
1. Chiziqli IChF uchun magistrallarni qurish usulini bayon etamiz. Faraz etaylik, ushbu $F(L,K)=aK+bL$, $a>0$, $b>0$ chiziqli IChF berilgan bo'lsin. Unda mos izokvantalar $aK+bL=c$ tenglama bilan beriladi. Tenglamada $c-$*ixtiyoriy* musbat o'zgarmas son. Shuning uchun $aK+bL=c$ tenglama bilan parallel to'g'ri chiziqlar oilasi berilgan, aniqrog'i, shu to'g'ri chiziqlarning I chorakda joylashgan kesmalari ifodalangan. Masalan, $c=c_0$ da $aK+bL=c_0$ to'g'ri chiziq absissa o'qidan c_0/b, ordinata o'qidan c_0/a kesmani kesadigan, $(c_0/b;\ 0)$ va $(c_0/a;\ 0)$ nuqtalarni tutashtiradigan kesmani tasviflaydi (10.8-chizma). Shu kesma izokvanta ekani ravshan.



10.7-chizma



10.8-chizma



10.9-chizma

Koordinata boshidan chiqib, I chorakda joylashgan nurlar cheksiz ko'p. Ular to'g'ri chiziq kesmalaridan iborat bo'lgan izokvantalarni albatta kesib o'tadi. (10.9-chizma).

Ushbu $K=\rho L$, $0<\rho<+\infty$ ko'rinishda berilgan ixtiyoriy nur koordinata boshidan chiqadi, I chorakda joylashgan hamda barcha kesma−izokvantalarni o'zgarmas burchak ostida kesib o'tadi: $tg\alpha=\dfrac{a\rho+b}{b\rho-a}$. Ravshanki, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Masala $K=\rho L$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p izoklinallar (nurlar) ichidan *optimal* izoklinalni topishdan iborat. Quyida optimallik belgisi keltiriladi va masala yechiladi.

Quyidagi sistemani ko'ramiz:

$$\begin{cases} aK+bL=c_0\,, \\ K=\rho L\,. \end{cases}$$

Bu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi. Elementar hisoblashlar yordamida yechimni topamiz:

$$L_0=\frac{c_0}{a\rho+b}\,,\quad K_0=\frac{\rho\cdot c_0}{a\rho+b}\,.$$

Ushbu

$$Q=\left\{(L,K):\quad 0\le L\le\frac{c_0}{a\rho+b},\quad 0\le K\le\frac{\rho\cdot c_0}{a\rho+b}\right\}$$

to'g'ri to'rtburchakni olamiz. Uning yuzi quyidagi formula bilan hisoblanadi (10.16-chizma):

$$S(\rho)=\frac{\rho\cdot c_0^2}{(a\rho+b)^2}>0\,,\quad 0<\rho<+\infty\,.$$

Shu $S(\rho)$ funksiya uchun ushbu

$$S(\rho)>0\,,\quad 0<\rho<+\infty\,,\quad \lim_{\rho\to+0}S(\rho)=\lim_{\rho\to+\infty}S(\rho)=0\,.$$

munosabatlar o'rinli. Bu $S(\rho)$ funksiya $(0;+\infty)$ intervalda biror $c_0\in(0;+\infty)$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini anglatadi. Shunday qilib, izoklinalning optimallik belgisi sifatida Q to'g'ri to'rtburchak yuzini maksimallashtirish masalasini olish mumkin, ya'ni

$$S(\rho)=\frac{\rho\cdot c_0^2}{(a\rho+b)^2}\to\max\,,\quad 0<\rho<+\infty\,.$$

Shu masalaning yechimi ρ_0 optimal izoklinalni, ya'ni $K=c_0L$ nurni aniqlaydi. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra bu masala yechimi mavjud. Endi shu yechimni (ya'ni ρ_0 ni) topishga kirishamiz.

$S(\rho)$ funksiyaning hosilasini topib, nolga tenglashtiramiz:

$$S'(\rho)=c_0^2\cdot\frac{1\cdot(a\rho+b)^2-\rho\cdot 2\cdot(a\rho+b)\cdot a}{(a\rho+b)^4}=c_0^2\frac{b-a\rho}{(a\rho+b)^3}\,;$$

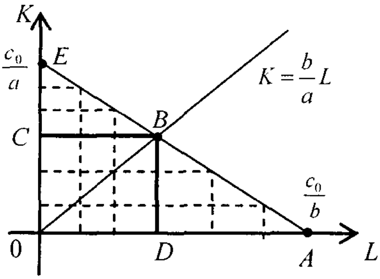
$$S'(\rho)=0\,;\quad b-a\rho=0\,;\quad \rho_0=b/a\,.$$

Shunday qilib, masalaning yechimi mavjud va $S(\rho)$ funksiya yagona statsionar nuqtaga ega. Demak, shu $\rho_0=b/a$ nuqtada $S(\rho)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Shunday qilib, $K=(b/a)\cdot L$ magistral tenglamasidir (10.10-chizma).

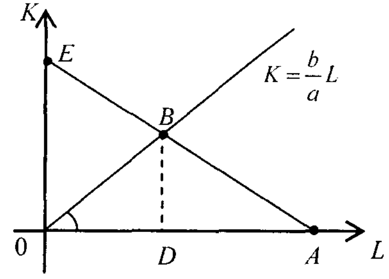
Chiziqli IChF izokvantalarining magistrali qiziq xossaga ega. OAB uchburchak tengyonli, ya'ni $OD=AD$ ($BD\perp OA$). Haqiqatan, B nuqta koordinatalarini topamiz. Uning uchun $aK+bL=c_0$, $K=(b/a)\cdot L$ tenglamalar sistemasini yechamiz. Ravshanki, $L_0=c_0/(2b)$, $K_0=c_0/(2a)$. A nuqtaning absissasi esa c_0/b edi. Bundan $OD=OA$ va, demak, ΔOAB tengyonli ekani kelib chiqadi. Shuning uchun $\angle BOD=\angle BAD$. Endi magistralni geometrik usul bilan topish mumkin bo'ladi. Uning uchun PPA burchakni o'lchaymiz va koordinata boshida shu burchakka teng burchak yasaymiz. Shu burchakning og'ma tomonini davom ettiramiz, u AE izokvantani B nuqtada kesib o'tadi. OB chiziq magistral bo'ladi (10.11-chizma).

Biz chiziqli IChF uchun uning izokvantalariga mos magistralni qurish usulini bayon etdik. Ammo bu usulni chiziqsiz IChFlar uchun bevosita qo'llanib bo'lmaydi. Ba'zi hollarda chiziqlilashtirish usuli yordamida masalani yechish mumkin.

2. Endi $Y=a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ Kobb-Duglas funksiyasi uchun magistralni topamiz va grafigini chizamiz. Bu funksiya chiziqsiz, uni chiziqlilashtirish mumkin. Chiziqlilashtirish usulining mohiyati quyidagidan iborat: Kobb-Duglas funksiyasi izokvantasi $a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}=c_0$ tenglamasining ikki tomonini logarifmlaymiz:



10.10-chizma



10.11-chizma

$$\ln c_0 = \ln a_0 + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L \text{ yoki } \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L = \ln \frac{c_0}{a_0}.$$

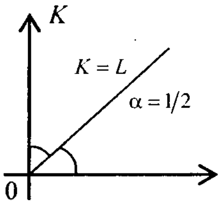
Ushbu $K_1=\ln K$, $L_1=\ln L$ belgilashlarni kiritamiz. Natijada $\alpha K_1 + (1-\alpha)L_1 = \ln(c_0/a_0)$ munosabat hosil bo‘ladi. U $\alpha K_1 + (1-\alpha)L_1$ ko‘rinishdagi chiziqli IChFning izokvantalari tenglamasi. Shu L_1, K_1 o‘zgaruvchilar bo‘yicha magistral tenglamasini yozish mumkin: $K_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot L_1$. Eski o‘zgaruvchilarga qaytamiz: $\ln K = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot \ln L$. Bundan $K = L^{(1-\alpha)/\alpha}$ magistral tenglamasi kelib chiqadi. Bunda α – parametr. Shu parametrning $0<\alpha<1$dagi turli qiymatlariga qarab magistral turli chiziqlardan iborat bo‘ladi:

1) $0<\alpha<1/2$; 2) $\alpha=1/2$; 3) $1/2<\alpha<1$.

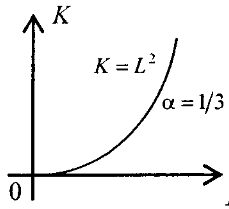
Agar $\alpha=1/2$ bo‘lsa, $K=L$. Magistral I chorak bissektrisasidan iborat (10.12-chizma). Agar, masalan, $\alpha=1/3$ bo‘lsa, $K=L^2$ bo‘ladi. Bu holda magistral $K=L^2$ parabolaning $L\geq 0$ bo‘lgandagi yarim shohchasi (10.13-chizma). Nihoyat, $\alpha=2/3$ bo‘lganda magistral tenglamasi $K=\sqrt{L}$ bo‘ladi. Bu $K=L^2$ ga teskari bo‘lgan $K=\sqrt{L}$ chiziqning I chorakdagi qismi (10.14-chizma).

Misollardan chiqadigan natija shuki, ko‘rilayotgan holda magistrallar grafiklari asosan uch turli bo‘ladi (10.12-, 10.13-, 10.14-chizmalar).

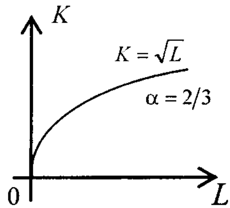
3. Chiziqlilashtirish usuli bilan Solou IChF uchun magistralni topish mumkin. Ma’lumki,



10.12-chizma



10.13-chizma



10.14-chizma

$$F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},\ a_0>0,\ 0<a<1,\ \rho>-1.$$

Izokvantalar tenglamasini yozamiz:

$$a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=c_0,\ c_0>0.$$

Bu tenglikning ikki tomonini (—c)— darajaga ko'taramiz:

$$aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}=\left(\frac{c_0}{a_0}\right)^{-\rho}.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$K^{-\rho}=K_1,\ L^{-\rho}=L_1.$$

Natijada yangi L_1, K_1 o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli ifodaga kelamiz:

$$aK_1+(1-a)L_1=\left(\frac{c_0}{a_0}\right)^{-\rho}.$$

Bu tenglama $aK_1+(1-a)L_1$ chiziqli IChF izokvantalari tenglamasidir. Endi magistral tenglamasini yozish mumkin:

$$K_1=\frac{1-a}{a}\cdot L_1.$$

Eski o'zgaruvchilarga qaytamiz: $K^{-\rho}=(1-a)/a\cdot L^{-\rho}$ yoki $K=[a/(1-a)]^{1/\rho}\cdot L$. Oxirgi munosabat koordinata boshidan chiqadigan, burchak koeffitsienti $[a/(1-a)]^{1/\rho}>0$ ga teng bo'lgan nurni anglatadi. Agar $a=1/2$ bo'lsa, $K=L$ — I chorak bissektrisasi, $\rho=1$ bo'lsa,

$K=[a/(1-a)]\cdot L$ – burchak koeffitsienti $a/(1-a)$ga teng bo'lgan nur bo'ladi. Ixtiyoriy a, $0<a<1$ uchun $\rho\Rightarrow+\infty$ da magistral $K=L$ holatga intiladi, $c\Rightarrow-1$da magistral $K=[(1-a)/a]\cdot L$ holatga intiladi.

Yuqorida Kobb-Duglas va Solou IChFga chiziqlilashtirish usulini qo'llab, mos magistral tenglamalarini topdik. Bu usulni ixtiyoriy chiziqlilashtirish mumkin bo'lgan IChFga qo'llash mumkin.

4. Ma'lumki, izoklinal differensial tenglamasi bor. Shu bilan birga ko'rdikki, magistral chizig'i – izoklinal. (10.18) differensial tenglamaning integral egri chiziqlari ichida magistral bo'lishi kerak. Ammo magistralni topishning maxsus usuli bilan tanishdik. Endi quyidagi muhim teoremani keltiramiz.

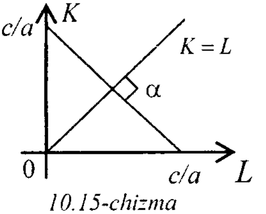
10.3-teorema. (10.18) differensial tenglama integral egri chiziqlari (izoklinallari) ichida izlangan magistral mavjud.

*Isbot*ni (10.18) ni bevosita integrallash va integral egri chiziqlar ichida magistralni izlash usuli bilan olib bormaymiz. Avval IChFni chiziqlilashtiramiz, keyin yangi o'zgaruvchilarga nisbatan qurilgan chiziqli IChF uchun izoklinallarning differensial tenglamasini yozamiz va integrallaymiz. Nihoyasida parametrlarning qanday qiymatlarda avvaldan topilgan magistral topilgan integral egri chiziqlardan biri bilan ustma-ust tushishini aniqlaymiz. Shu bilan *teorema isbot bo'ladi.*

Misollar ko'ramiz.

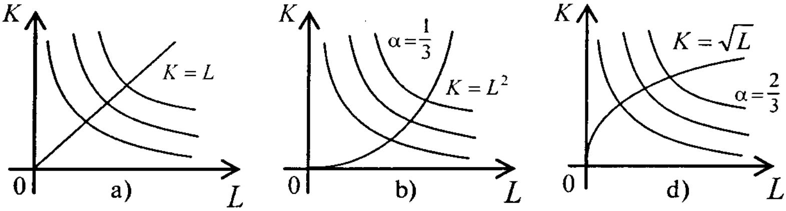
1) **IChF chiziqli** bo'lsin. $F(L,K)=aK+bL$ $a>0$, $b>0$, izokvantalar tenglamasi $aK+bL=C$. Magistral tenglamasini oldindan bilamiz: $K=\frac{b}{a}\cdot L$. Agar $a=b$ bo'lsa, izokvantlar tenglamasi soddalashadi: $K+L=\frac{C}{a}$ va magistral $K=L$ (bissiktrisa) bo'ladi (10.15-chizma).

Bu bir tomondan. Ikkinchi tomondan, izoklinallarning differensial tenglamasi $\frac{dK_1}{dL_1}=\rho$, $0<\rho<+\infty$.



10.15-chizma

Izokvantalarga (L_1,K_1) nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)}=-1$. Shuning uchun $\rho(-1)=-1$ yoki $\rho=1$.



10.16-chizma

Demak, $K_1=L_1 \Rightarrow K=L$ – bu I chorak bissiktrisi.

Endi $a \neq b$, $\frac{b}{a} \neq 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1, K_1)} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{dK_1}{dL_1} = \rho, \quad tg\,\alpha = q\,.$$

Izoklinallarning differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$q = \frac{\frac{b}{a} + \frac{dK_1}{dL_1}}{1 - \frac{b}{a} \cdot \frac{dK_1}{dL_1}} \quad \text{yoki} \quad q = \frac{b + a \cdot \rho}{a - b \cdot \rho}. \quad \text{Bundan} \quad \rho = \frac{a \cdot q - b}{a + b \cdot q}.$$

Endi izoklinallar tenglamasini yozamiz:

$$K = \frac{a \cdot q - b}{a + b \cdot q} \cdot L\,.$$

Shu izoklinallar ichida $K = \frac{b}{a} \cdot L$ magistral mavjud, buning uchun $q = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ bo'lishi kerak. Demak, $\alpha = arctg\frac{2ab}{a^2 - b^2}$. Misol uchun $b = \sqrt{3} \cdot a$ bo'lsa, $q = -\sqrt{3}$ bo'ladi. Bundan $\alpha = 120^0$ kelib chiqadi.

2) Endi **Kobb-Duglas IChF** ni ko'ramiz: $Y = a_0 K^{\tilde{\alpha}} L^{1-\tilde{\alpha}}$ (bunda α o'rniga $\tilde{\alpha}$ deb olish sababi, $tg\alpha=q$ dagi α bilan chalkashtirmaslik uchun). Izokvantalar tenglamasi $a_0 K^{\tilde{\alpha}} L^{1-\tilde{\alpha}} = C$. Biror $C=C_0$ uchun ikki to-

monini logarifmlash natijasida yangi $\overline{K}$, $\overline{L}$ larga nisbatan ($\overline{K} = \ln K$, $\overline{L} = \ln L$) izokvantalar tenglamasini yozamiz:

$\widetilde{\alpha} \cdot \overline{K} + (1-\widetilde{\alpha}) \cdot \overline{L} = \widetilde{C}$, $\widetilde{C} = \ln(C_0 / a)$. Magistral tenglamasi: $\overline{K} = \frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}} \overline{L}$. Eski o'zgaruvchilar bo'yicha $K = L \cdot \frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}}$. Agar $\widetilde{\alpha} = 1/2$ bo'lsa, $\alpha = 90^0$ va $\rho = 1$ bo'ladi.

Endi $\widetilde{\alpha} \neq 1/2$ bo'lsin. Unda izoklinallar differensial tenglamasini ($\overline{L}$ va $\overline{K}$ o'zgaruvchilar bo'yicha) yozish mumkin:

$$q = \frac{\frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}} + \frac{d\overline{K_1}}{d\overline{L_1}}}{1 - \frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}} \cdot \frac{d\overline{K_1}}{d\overline{L_1}}} \quad \text{yoki} \quad q = \frac{(1-\widetilde{\alpha}) + \widetilde{\alpha} \cdot \rho}{\widetilde{\alpha} - (1-\widetilde{\alpha}) \cdot \rho}.$$ Bundan

$$\rho = \frac{2q - (1-\widetilde{\alpha})}{\widetilde{\alpha} + (1-\widetilde{\alpha})q}.$$

Endi izoklinallar tenglamasini yozamiz:

$$\overline{K} = \frac{2q - (1-\widetilde{\alpha})}{\widetilde{\alpha} + (1-\widetilde{\alpha})q} \cdot \overline{L}.$$

Eski o'zgaruvchilarga qaytsak, izoklinallar tenglamasi ushbu

$$K = \frac{2q - (1-\widetilde{\alpha})}{\widetilde{\alpha} + (1-\widetilde{\alpha})q} \cdot L. \qquad (10.19)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Shu izoklinallar ichida $\overline{K} = \frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}} \cdot \overline{L}$ yoki $K = L^{\frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}}}$ magistral bor. Agar $q = \frac{2\widetilde{\alpha} \cdot (\widetilde{\alpha} - 1)}{1 - 2\widetilde{\alpha}}$ bo'lsa, (10.19) izoklinal $K = L^{\frac{1-\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\alpha}}}$ magistral bilan ustma-ust tushadi. Misol uchun $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ bo'lsa, $q = 1$ yoki tg $\alpha = 1$ bo'ladi. Bundan $\langle = 45^0$ kelib chiqadi.

3) Shunga o'xshash mulohazalarni **Solou IChF** uchun ham olib

borish mumkin:

$$F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_0>0, \quad 0<a<1, \quad \rho>-1.$$

Bu holda magistral tenglamasi ushbu

$$\overline{K}=\frac{1-a}{a}\cdot\overline{L} \quad \text{yoki} \quad K=\left(\frac{1-a}{a}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\cdot L \qquad (10.20)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar a=1/2 bo‘lsa, $\alpha=90^0$ va K=L bo‘ladi. Endi $a\neq1/2$ bo‘lsin. Unda $\overline{K}$, $\overline{L}$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha ($\overline{K}=K^{-\rho}$, $\overline{L}=L^{-\rho}$) izoklinallar tenglamasini yozaylik:

$$q=\frac{\dfrac{1-a}{a}+\dfrac{d\overline{K_1}}{d\overline{L_1}}}{1-\dfrac{1-a}{a}\cdot\dfrac{d\overline{K_1}}{d\overline{L_1}}} \quad \text{yoki} \quad q=\frac{(1-a)+a\cdot\rho}{a-(1-a)\cdot\rho}. \quad \text{Bundan}$$

$$\rho=\frac{aq-(1-a)}{a+(1-a)q}.$$

Izoklinallar tenglamasi:

$$\overline{K}=\frac{aq-(1-a)}{a+(1-a)q}\cdot\overline{L} \quad \text{yoki} \quad K=\left(\frac{aq-(1-a)}{a+(1-a)q}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\cdot L \qquad (10.21)$$

Agar $q=\dfrac{2a(a-1)}{1-2a}$ bo‘lsa, (10.20) magistral (10.21) izoklinal bilan ustma-ust tushadi. Misol uchun $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lsa, q=1 bo‘ladi. Bundan $\alpha=45^0$ kelib chiqadi.

10.7-§. Statistik ma’lumotlar bo‘yicha IChF ning ko‘rinishini aniqlash

Agar biror mamlakat iqtisodiyoti uchun ma’lum davrda yig‘ilgan makroiqtisodiy ko‘rsatkichlarning qiymatlari bo‘yicha IChF qurilgan bo'lsa, iqtisodiy o'sishga oid juda ko'p savollarga javob berish mumkin. Jumladan, kelasi yil uchun iqtisodiy ko'rsatkichlar darajasini bashorat qilish mumkin.

Ko'pincha IChF ni u yoki bu ko'rinishda izlashgan. Masalan, K.Kobb va P. Duglaslar IChF ni (1928 y.)

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < a < 1$$

ko'rinishda, R.Solou va boshqalar IChF ni (1961)

$$F(L,K) = a_0 \left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < a < 1, \quad \rho > -1$$

ko'rinishda izlashgan. Bu funksiyalar neoklassik shartlarni qanoatlantiradi.

Agar statistik ma'lumotlardan foydalanib, avvaldan shu ma'lumotlarga mos IChF ko'rinishini aniqlash mumkin bo'lganda, shu IChF yordamida olib boriladigan mulohazalar qat'iyligi ortgan bo'lar edi.

Ba'zi hollarda asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalar IChF ko'rinishini aniqlash imkoniyatini beradi. Biz quyida shunday hollarga to'xtalamiz.

1. Iqtisodiy ko'rsatkichlar o'zgarmas bo'lgan hollar

1-hol. Fondlar bo'yicha limit unumdorlik o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\frac{\partial F(L,K)}{\partial K} = f'(k) = a, \ a = const > 0$. Bundan $f(k) = ak + c$ kelib chiqadi. Ikki tomonini Lga ko'paytiramiz: $L \cdot f(k) = = L \cdot a \cdot \frac{K}{L} + c \cdot L = aK + cL$, ya'ni $F(L,K) = aK + cL$ – chiziqli IChF.

2-hol. Endi mehnat bo'yicha limit unumdorlik o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\frac{\partial F(L,K)}{\partial L} = f(k) - k\,f'(k) = a, \ a = const > 0$. Bu holda $f(k)$ ni topish uchun $f(k) - k\,f'(k) = a$ birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yechishga to'g'ri keladi. Uni ushbu $f'(k) = \frac{1}{k} f(k) - \frac{a}{k}$ standart ko'rinishda yozamiz va integrallaymiz:

$$f(k)=\left[c+\int\left(-\frac{a}{k}\right)\cdot e^{-\int\frac{1}{k}dk}dk\right]\cdot e^{\int\frac{1}{k}dk}=\left(c-\int\frac{a}{k}e^{-\ln k}dk\right)\cdot e^{\ln k}=$$

$$=\left(c-\int\frac{a}{k^2}dk\right)\cdot k=\left(c+\frac{a}{k}\right)\cdot k=ck+a$$

Demak, $f(k)=ck+a$. Ikki tomonini L ga ko‘paytiramiz: $F(L,K)=cK+aL$. Yana chiziqli IChF hosil bo‘ldi.

3-hol. L resursni K resursga almashtirish limit normasi S o‘zgarmas bo‘lsin, ya’ni $\dfrac{f(k)-k\,f'(k)}{f'(k)}=S,\quad S=const>0$. Bu holda ham $f(k)$ ni topish uchun birinchi tartibli differensial tenglamani integrallash lozim bo‘ladi. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{1}{S+k}$$

o‘zgaruvchilari almashadigan birinchi tartibli differensial tenglama ko‘rinishida yozish mumkin. Integrallash natijasida $\ln f(k)=\ln(S+k)+\ln c$ yoki $f(k)=c\cdot(S+k)$ funksiya hosil bo‘ladi. Uning ikki tomonini L ga ko‘paytirish natijasida yana $F(L,K)=c\,S\,L+c\,K$ chiziqli IChF ga kelamiz.

4-hol. Endi L resursni K resurs bilan almashtirish elastikligi σ o‘zgarmas bo‘lgan holni ko‘raylik, ya’ni

$$\sigma=\left(\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}\right)^{-1},\text{ bunda }\sigma=const>0.$$

Bundan ushbu $\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}=\dfrac{1}{\sigma}$ o‘zgaruvchilari ajraladigan (S ga nisbatan) differensial tenglama hosil bo‘ladi. Uni $\dfrac{dS}{S}=\dfrac{1}{\sigma}\cdot\dfrac{dk}{k}$ ko‘rinishda yozib integrallaymiz: $S(k)=c_1k^{1/\sigma}$, $c_1>0$. $S(k)$ o‘rniga o‘z ifodasini qo‘yamiz:

$$\frac{f(k)-k\,f'(k)}{f'(k)}=c_1 k^{1/\sigma}.$$

Bundan ushbu

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{1}{k+c_1 k^{1/\sigma}} \tag{10.22}$$

ko‘rinishdagi o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil bo‘ladi. Uni integrallash uchun avval

$$J=\int\frac{dk}{k+c_1 k^{1/\sigma}}$$

noaniq integralni hisoblab olaylik. Quyidagi $k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}=\tau$ almashtirish bajaramiz. Unda, ravshanki, $\frac{\sigma-1}{\sigma}k^{-1/\sigma}dk=d\tau$.

$$J=\int\frac{dk}{k^{1/\sigma}\left(k^{(\sigma-1)/\sigma}+c_1\right)}=\int\frac{k^{-1/\sigma}dk}{k^{(\sigma-1)/\sigma}+c_1}=\frac{\sigma}{\sigma-1}\int\frac{d\tau}{\tau+c_1}=$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma-1}(\ln\tau+\ln c_2)=\frac{\sigma_0}{\sigma-1}\left[\ln\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)+\ln c_2\right]=\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left[c_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)\right].$$

Shunday qilib, $J=\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left[c_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)\right]$.

Endi (10.22) tenglamani integrallasa bo‘ladi:

$$\ln f(k)=\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left[c_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)\right].$$

Bundan $f(k)=c_2^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$.

Shu tenglikning ikki tomonini L ga ko‘paytiramiz. Sodda almashtirish natijasida $F(L,K)$ uchun quyidagi

$$F(L,K) = a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi, unda

$$a_0 = \left[(1+c_1)\cdot c_2\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad a = \frac{1}{1+c_1}, \quad 1-a = \frac{c_1}{1+c_1}, \quad -\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$$

Demak, $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$ bo'lganda biz Solou IChFga ega bo'ldik.

Agar $\sigma = 1$ bo'lsa, tenglama $\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S} = 1$ yoki $\frac{dS}{S} = \frac{dk}{k}$ ko'rinishga keladi. Undan $\ln S = \ln k + \ln c$ yoki $S = c\cdot k$ kelib chiqadi. Endi $f(k)$ ga nisbatan differensial tenglama

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{1}{(1+c_1)\cdot k}$$

ko'rinishda bo'ladi. Uni integrallaymiz: $\ln f(k) = \frac{1}{1+c_1}\ln k + \ln c_2$ yoki $f(k) = c_2 k^{1/(1+c_1)}$, $c_1>0$, $c_2>0$. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz:

$$f(L,K) = c_2 K^{\frac{1}{1+c_1}} \cdot L^{\frac{c_1}{1+c_1}}.$$

Bunda $c_1>0$, $c_2>0$ bo'lgani uchun $\alpha = \frac{1}{1+c_1} < 1$, $1-\alpha = \frac{c_1}{1+c_1} < 1$, $\frac{1}{1+c_1} + \frac{c_1}{1+c_1} = 1$. Shunday qilib, bu holda Kobb-Duglas IChF hosil bo'ladi.

Agar $\sigma \to +0$ bo'lsa, $\rho \to +\infty$. Haqiqatan, $\lim\limits_{\sigma\to+0}(1-\sigma)/\sigma = \lim\limits_{\sigma\to+0}\left(1/\sigma - 1\right) = +\infty$. Ma'lumki, $\rho \to +\infty$ da biz tayinlangan proporsiyali IChF ga egamiz.

5-hol. Fondlar bo'yicha elastiklik koeffitsienti o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\alpha=\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F}$, $\alpha=const>0$. Bu holda ham $\alpha=\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga kelamiz. Uni $\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{\alpha}{k}$ deb yozamiz va integrallaymiz:

$\ln f(k)=\alpha\ln k+\ln c$ yoki $f(k)=c\cdot k^{\alpha}$. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz: $F(L,K)=c\cdot L\cdot(K/L)^{\alpha}=c\cdot K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Biz yana Kobb-Duglas IChFga keldik.

6-hol. Endi mehnat bo'yicha elastiklik koeffitsienti o'zgarmas deylik, ya'ni $\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{F}=\beta=const>0$. Bu holda $\frac{f(k)-k\,f'(k)}{f(k)}=\beta$ ko'rinishdagi differensial tenglama hosil bo'ladi. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{1-\beta}{k}$$

kabi yozamiz. Uni integrallab topamiz:

$\ln f(k)=(1-\beta)\ln k+\ln c$, $c>0$ yoki $f(k)=c\cdot k^{1-\beta}$.

Ikki tomonini L ga ko'paytirish natijasida yana $F(L,K)=c\cdot k^{1-\beta}L^{\beta}$, $c>0$, $0<\beta<1$ ko'rinishdagi Kobb-Duglas IChFni hosil qilamiz.

Ko'rilgan hollardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Fondlar va mehnat bo'yicha limit unumdorlik o'zgarmas bo'lganda mos IChF chiziqli bo'ladi.
2. L resursni K resursga almashtirishning limit normasi o'zgarmas bo'lganda mos IChF chiziqli bo'ladi.
3. L resursni K resursga almashtirishning elastikligi o'zgarmas bo'lganda mos IChF Solou funksiyasi ko'rinishida bo'ladi.
4. Fondlar va mehnat elastikligi o'zgarmas bo'lganda mos IChF Kobb-Duglas funksiyasi bo'ladi.

2. Funksional iqtisodiy ko'rsatkichlar holi

1-hol. Fondlar bo'yicha elastiklik ushbu

$$\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F}=\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}=\frac{ak}{ak+b},\ a>0,\ b>0$$

ko'rinishdagi kasr-chiziqli funksiya bo'lsin. Ravshanki,

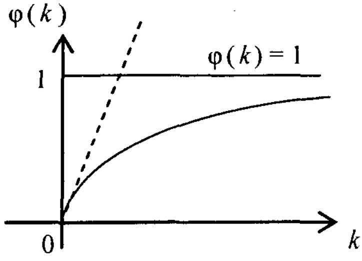
$0<\dfrac{ak}{ak+b}<1$, $\forall k>0$. Agar $\varphi(k)=\dfrac{ak}{ak+b}$ belgilashni kiritsak, $\varphi(k)$ funksiya quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi'(k)=\frac{ab}{(ak+b)^2}>0,\quad \varphi''(k)=-\frac{2a^2b}{(ak+b)^3}<0,\quad \forall k>0.$$

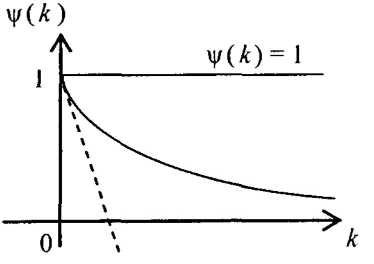
Bundan $\varphi(k)$ funksiya monoton o'suvchi va yuqoridan 1 bilan chegaralangan botiq ekani kelib chiqadi (10.17-chizma). Shu bilan birga $\varphi(k)\equiv 1$ gorizontal to'g'ri chiziq asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(k)=\lim_{k\to+\infty}\frac{ak}{ak+b}=\lim_{k\to+\infty}\frac{a}{a+b/k}=1;\quad \lim_{k\to+\infty}\frac{a}{ak+b}=0.$$

Shu funksiyaning grafigi koordinata boshidan $\varphi'(0)=a/b$ ga teng bo'lgan burchak koeffitsienti bilan chiqadi (10.17-chizma).



10.17-chizma



10.18-chizma

IChF ko'rinishini aniqlash uchun quyidagi

$$\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}=\frac{ak}{ak+b}\ \text{yoki}\ \frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{a}{ak+b}$$

o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani integrallaymiz:

$\ln f'(k) = \ln(ak + b) + \ln c$ yoki $f(k) = c(ak + b)$, $s>0$.

Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz, natijada $F(L,K)=caK+cbL$ ko'rinishidagi *chiziqli* IChF hosil bo'ladi.

2-hol. Endi mehnat bo'yicha elastiklik kasr-chiziqli funksiya bo'lsin, ya'ni

$$\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{F} = 1 - \frac{k\cdot f'(k)}{f(k)} = \frac{ak}{ak+b},\ a>0,\ b>0.$$

Bundan

$$\frac{k\,f'(k)}{f(k)} = \frac{b}{ak+b} \text{ yoki } \frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{b}{k\,(ak+b)}$$

ko'rinishdagi yana o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi. $\psi(k) = \dfrac{b}{ak+b}$ deylik. Ravshanki, $0 < \dfrac{b}{ak+b} < 1$ va quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\psi(0) = 1,\ \psi'(k) = -\frac{ab}{(ak+b)^2} < 0,\ \psi''(k) = \frac{2a^2b}{(ak+b)^3} > 0,\ \forall k > 0.$$

Demak, $\psi(k)$ funksiya monoton kamayuvchi va qavariq. Uning grafigi $\psi'(0) = -a/b$ burchak koeffitsient bilan (1; 0) nuqtadan chiqadi (10.22-chizma). Abssissa o'qi shu funksiya uchun asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{k\to+\infty}\psi(k) = 0,\ \lim_{k\to+\infty}\frac{\psi(k)}{k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{b}{k(ak+b)} = 0$$

tengliklar o'rinli.

Endi yuqorida hosil bo'lgan differensial tenglamani integrallaymiz. Uni ushbu

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{1}{k} - \frac{a}{ak+b}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Undan

$$\ln f(k) = \ln(k) - \ln(ak+b) + \ln c\,,\ c>0 \text{ yoki } f(k) = \frac{ck}{ak+b}$$

kelib chiqadi. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz:

$$F(L,K) = \frac{Lc \cdot K/L}{a \cdot K/L + b} = \frac{c \cdot KL}{aK + bL}.$$

Topilgan funksiya Solou IChFdan iborat. Haqiqatdan, sodda o'zgartirishlar bajaramiz:

$$\frac{c \cdot KL}{aK+bL} = c \cdot \left[K^{-1}L^{-1}(aK+bL)\right]^{-1} = \frac{c}{a+b}\left[\frac{b}{a+b}K^{-1} + \frac{a}{a+b}L^{-1}\right]^{-1},$$

bunda

$$a_0 = \frac{c}{a+b} > 0, \qquad \frac{b}{a+b} < 1, \qquad \frac{a}{a+b} < 1, \qquad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Ravshanki, $\rho = 1$. Shunday qilib, mehnat bo'yicha elastiklik kasr-chiziqli funksiya bo'lsa, mos IChF Solou funksiyasidan iborat bo'lar ekan.

Demak, statistik ma'lumotlar jadvalida yuqorida ko'rsatilgan hollardan birortasi kuzatilsa, IChF ko'rinishini avvaldan aniqlab olish mumkin.

10-bobga oid masalalar

I. Quyidagi Kobb-Duglas IChF uchun 1^0—5^0 neoklassik shartlarning bajarilishi tekshirilsin:

1. $F(L,K) = \sqrt{KL}$ 4. $F(L,K) = \sqrt[4]{K^3L}$ 2. $F(L,K) = \sqrt[3]{KL^2}$

5. $F(L,K) = \sqrt[4]{KL^3}$ 3. $F(L,K) = \sqrt[3]{K^2L}$ 6. $F(L,K) = \sqrt[5]{KL^4}$

II. Quyidagi Solou IChF uchun 1^0—5^0 neoklassik shartlar tekshirilsin:

1. $F(L,K) = \dfrac{2KL}{K+L}$ 4. $F(L,K) = \dfrac{\sqrt{2}KL}{\sqrt{K^2+L^2}}$

2. $F(L,K) = \dfrac{1}{4}(\sqrt{K}+\sqrt{L})^2$ 5. $F(L,K) = \dfrac{4KL}{(\sqrt{K}+\sqrt{L})^2}$

3. $F(L,K)=\dfrac{\sqrt[3]{4}KL}{\sqrt[3]{(K^{3/2}+L^{3/2})^{2}}}$ 6. $F(L,K)=\dfrac{2\sqrt[3]{2}KL}{\sqrt[3]{(K^{3/4}+L^{3/4})^{4}}}$

III. I va II bo'limlardagi IChF uchun asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalar hisoblansin.

IV. I va II bo'limlardagi IChF ning magistrallari topilsin va grafigi chizilsin.

V. I va II bo'limlardagi IChF larni chiziqlilashtirib, avval yangi o'zgaruvchilarga nisbatan izoklinallar, so'ngra eski o'zgaruvchilarga nisbatan ularning tenglamalari topilsin. Topilgan izoklinallar grafigi chizilsin.

10-bobga oid nazorat savollari

1. Bir va ko'p o'zgaruvchili IChF ta'riflarini bering.

2. Neoklassik shartlarni keltiring.

3. Kobb-Duglas va Solou IChF ni yozib bering.

4. Kobb-Duglas va Solou IChF uchun 1^0–5^0 neoklassik shartlarni tekshiring.

5. Solou IChF uchun qanday xususiy hollar mavjud?

6. Ikki faktorli neoklassik IChF uchun asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarni yozib bering.

7. Asosiy iqtisodiy-matematik tushunchalarning k, $f(k)$, $f'(k)$ va $f''(k)$ orqali ifodalarini keltiring.

8. Kobb-Duglas va Solou IChF uchun asosiy tushunchalarni hisoblang.

9. Ba'zi asosiy tushunchalar o'zgarmas yoki funksional ko'rinishda bo'lsa, IChF haqida nima deyish mumkin?

10. Izokvantalarning qanday xossalari bor?

11. Chiziqli IChF magistralini topish usulini so'zlab bering.

12. Chiziqlilashtirish usuli va Kobb-Duglas, Solou IChFning magistralini topish qanday amalga oshiriladi?

13. Izoklinallar nima? Ularning differensial tenglamasini yozing.

14. Muayyan misollarda izoklinallar differensial tenglamasi integral egri chiziqlari orasida berilgan IChF magistrali borligi ko'rsatilsin.

11-BOB. IQTISODIY DINAMIKANING MATEMATIK MODELLARI

Avvalgi boblarda ko'rilgan modellarda iqtisodiy ko'rsatkichlar vaqt bo'yicha o'zgarmas edi. Ularni statik modellar deb yuritiladi. Jumladan, L, K va $Y=F(L,K)$ kabi makroiqtisodiy ko'rsatkichlar vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi va biror $[0,T]$ vaqt davrida o'zgarmas bo'lib qoladi. Aslida barcha makroiqtisodiy ko'rsatkichlar vaqt t ga bog'liq bo'ladi. Agar modellarda bunday ko'rsatkichlar vaqt t ga bog'liq deb qaralsa, iqtisodiy jarayon haqida to'laroq tasavvurga ega bo'linadi.

Iqtisodiy ko'rsatkichlarning t vaqtdagi qiymati iqtisodiy sistemaning (iqtisodiyotning) *holatini* aniqlaydi. Hozirgi vaqtda iqtisodiy dinamikaning mavjud matematik modellari iqtisodiy sistema rivojlanishining ba'zi talablarini qondiradigan variantlari majmuasini tavsiflaydi. Keyingi mulohazalarda *traektoriya* deyilganda shunday *akslantirishni* tushunamizki, unda o'zgaruvchi t ning har bir qiymatiga iqtisodiy sistemaning xuddi shu vaqt t dagi holatini mos qo'yadi. Agar o'zgaruvchi t biror intervaldan olingan ixtiyoriy qiymatlar qabul qilsa, unda mos model *uzluksiz model* deyiladi. Agar o'zgaruvchi t faqat butun qiymatlar qabul qilsa, model *diskret model* deyiladi. Odatda iqtisodiy jarayonni o'rganishga boshlangan vaqt sifatida odatda 0 son olinadi. Shu $t_0=0$ vaqtdagi iqtisodiy sistemaning holati *boshlang'ich holat* deyiladi. Odatda boshlang'ich holat berilgan bo'ladi. Agar jarayon $[0,T]$ vaqt oralig'ida o'rganilayotgan bo'lsa, *T—rejalashtirish ufqi* deyiladi. Ko'pincha jarayonning qanday qonuniyat bilan kechishi o'rganiladi va $(T+1)$ vaqtda iqtisodiy sistemaning holati bashorat qilinadi. Bu iqtisodiyotni optimal boshqaruvda muhim ahamiyat kasb etadi.

11.1-§. Iqtisodiy jarayonning sodda dinamik modeli

Avval ba'zi zarur tushunchalarni keltiraylik.

11.1-*ta'rif.* *Faraz etaylik, ishlab chiqarish faktorlari n ta bo'lib, ular vaqt t ning funksiyalari:* $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$, *Y esa ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori bo'lsin. Unda ushbu*

$$Y(t) = F(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t);\ t) \qquad (11.1)$$

munosabat dinamik ishlab chiqarish funksiyasi (DIChF) deyiladi.

(11.1) dagi F funksiya $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ lar bo'yicha neoklassik shartlarni qanoatlantiradi deb qaraladi. Agar (11.1) ning t ga oshkor bog'liqligi sodir bo'lsa, unda iqtisodiy jarayonning kechishini o'rganilayotganda ilmiy-texnik progress (ITP) natijalari e'tiborga olinadi. Turgan gap, ITP dan foydalanish o'sishga olib kelishi kerak, bu esa $Y(t)$ funksiyaning monoton o'sishini anglatadi. Agar (11.1) funksiya $R_+^n \times [0;T]$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, uning o'suvchi bo'lishi uchun t bo'yicha to'liq hosilasi nomanfiy: $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ (iqtisodiy jarayonlar uchun musbat: $\frac{dY(t)}{dt} > 0$), ya'ni

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y(t)}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{(yoki } >0)$$

bo'lishi zaruriy shartdir.

11.1-teorema. Iqtisodiy o'sish bo'lishi uchun

$$\frac{dY(t)}{dt} > 0, \quad \forall\, t \in [0;T] \tag{11.2}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur.

11.2-teorema. Iqtisodiy o'sish bo'lishi uchun

$$\frac{dY(t)}{dt} > 0, \qquad \frac{Y(t)}{L(t)} > \frac{Y(t-1)}{L(t-1)}, \quad t \geq 1 \tag{11.3}$$

tengsizliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $n=2$ bo'lsa, $x_1=L(t)$, $x_2=K(t)$. Deylik, $L(t)$ aholi soni bo'lsin, unda $Y(t)/L(t)$ – jon boshiga ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini anglatadi. Qayd qilib o'tamizki, (11.2) tengsizlik bajarilsa ham, aholi soni shunday ko'payishi mumkinki, (11.3) ning ikkinchi tengsizligi bajarilmasligi mumkin. Aksincha, (11.3) ning ikkinchi tengsizligi bajarilsa ham, (11.2) bajarilmasligi mumkin. Bu iqtisodiy o'sish sodir bo'lmaganda, ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori kamayganda aholi soni yanada tezroq kamayganda sodir bo'ladi.

11.2-ta'rif. *Agar F funksiya t ga oshkor bog'liq bo'lmasa, unda ushbu*

$$Y(t) = F(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \tag{11.4}$$

ko'rinishdagi DIChF <u>*avtonom*</u> *DIChF deyiladi.*

(11.4) da ITP natijalari e'tiborga olinmaydi, ammo har bir ishlab chiqarish faktorining t ga bog'liqda o'zgarishi hisobga olinadi. Barcha masalalar $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ lar orasidagi optimal munosabatlarni topish bilan bog'langan bo'ladi. IChF ikki faktorli bo'lganda IChF ushbu

$$Y(t) = F(L(t), K(t)) \tag{11.5}$$

ko'rinishda yoziladi.

Keyingi mulohazalarimizda soddalik uchun (11.5) ko'rinishdagi avtonom DIChF lardan foydalanamiz. Quyida avtonom DIChF ga misollar keltiramiz:

1. $Y(t) = a_0 K^{\alpha}(t)\, L^{1-\alpha}(t)$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, $t \in [0,T]$ – (K-D).

2. $Y(t) = a_0\left[aK^{-\rho}(t) + (1-a)L^{-\rho}(t)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_0 > 0$, $0 < a < 1$, $\rho > -1$, $t \in [0;T]$ – (Solou).

3. $Y(t) = a\,K(t) + b\,L(t)$, $a > 0$, $b > 0$.

Iqtisodiy dinamika modellarida mablag'ni optimal sarflash (optimal kapital qo'yish) masalalarini o'rganish muhim ahamiyatga ega. Bunday ishlarni R.Solou (1956) boshlab bergan*. Solou milliy daromad Y ni (ishlab chiqarilgan mahsulotni) kapital qo'yishga (investitsiyaga) va iste'molga optimal ajratish masalasi bilan shug'ullangan. Aniqrog'i,

$$Y = I + C = \bar{\bar{S}} \cdot Y + (1-s) \cdot Y \tag{11.6}$$

tenglikda s ni topish masalasini qo'ygan. Bunda I–kapital hajmi, C–iste'mol hajmi. Optimallik jon boshiga iste'molni, ya'ni

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad s = const, \quad 0 < s < 1, \tag{11.7}$$

funksiyani, yoki iste'molning integral fondini ($s=s(t)$, $t \in [0;T]$)

$$J[s] = \int_0^T \frac{C(t)}{L(t)}\,dt = \int_0^T (1 - s(t)) \cdot f(k(t))\,dt \tag{11.8}$$

** R. Solou 1987-yilda Nobel mukofotini olgan.*

maksimum qilish ma'nosida tushuniladi.

Endi

$$I = s \cdot Y, \quad C = (1-s) \cdot Y$$

ekanini e'tiborga olsak, $s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)}$ – jamg'arish normasi deyiladi va $0 \le s(t) \le 1$.

Jag'arish normasi uchun ikki holni alohida-alohida o'rganishgan.

1-hol. $s(t) \equiv s$, s=const, $0<s<1$ – jamg'arish normasi o'zgarmas. Bu holni 1956-yilda R.Solou ko'rgan. Unga 1987-yilda Nobel mukofoti berilgan.

2-hol. $0<s(t)<1$ – jamg'arish normasi o'zgaruvchi. Bunda $s(t) \in [0;1]$, «»$t \in [0;T]$. Bu holni, ya'ni aniqrog'i, $s(t)$funksiya bo'lakli-uzluksiz bo'lganda K. Shell o'rgangan (1967). U ma'lum ma'noda, 2-holni 1-holga keltirgan.

Har ikki R.Solou va K. Shell olim ham dinamik IChF dan foydalangan. Mehnat resurslari hajmi $L(t)$ eksponensial funksiya $L(t) = L_0 e^{\eta t}$, $L_0>0$, $\eta>0$ ko'rinishda deb faraz etishgan.

Iqtisodiy dinamikaning sodda dinamik modeli ushbu

$$\begin{cases} Y(t) = F(L(t), K(t)), \\ I(t) = s \cdot Y(t), \quad 0<s<1, \\ C(t) = (1-s) \cdot Y(t), \\ \dot{K}(t) = I(t), \\ \dot{L}(t) = L_0 e^{\eta t}, \quad L_0 > 0, \quad \eta > 0, \\ K(0) = K_0 > 0 \end{cases} \tag{11.8}$$

munosabatlar bilan tavsiflanadi. Bunda $\eta>0$ aholi sonining o'sish sur'ati deyiladi va

$$\eta = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}. \tag{11.9}$$

Agar aholi soni eksponensial qonun bo'yicha ko'paysa, aholini *stabil* (barqaror), aholi o'sishi bo'lmasa, aholini *statsionar aholi* deb yuritiladi. (11.8)da $\eta=0$ bo'lsa, $L(t) \equiv L_0$, $t \in [0;T]$ bo'ladi. Keyingi mulohazalar $\eta \neq 0$ uchun olib boriladi.

Yuqorida keltirilgan (11.8) munosabatlar tavsiflanadigan iqtisodiy sistemani ko‘raylik. Mamlakat iqtisodiyoti $[0,T]$ kesmada (davrda) 5 ta funksiya bilan aniqlanadi:

$$L(t),\ K(t),\ I(t),\ C(t),\ Y(t). \tag{11.10}$$

Agar shu funksiyalar topilgan bo‘lsa, iqtisodiy sistemaning traektoriyasi aniqlangan bo‘ladi. Bundan keyin (11.10) ni *traektoriya* deb yuritamiz. Ravshanki, qurollanganlik $k(t)$ ushbu $k(t)=\dfrac{K(t)}{L(t)}$ formula yordamida aniqlanadi.

Endi jon boshiga iste’mol funksiyasi (11.7)ning ko‘rinishini o‘zgartiramiz (qisqalik uchun argument t ni yozmaymiz):

$$c=\frac{C}{L}=\frac{(1-s)\cdot Y}{L}=\frac{(1-s)LF(1,K/L)}{L}=(1-s)\cdot F\left(1,\frac{K}{L}\right)=(1-s)f(k),$$

bunda $f(k)=F(1,k)$.

Shunday qilib,

$$C=(1-s)\cdot f(k). \tag{11.11}$$

Bunda $f(k)$—o‘rtacha mehnat unumdorligi, $k=\dfrac{K}{L}$ — qurollanganlik.

Sodda dinamik modelda $\dot{K}(t)=I(t)$ bo‘lib, unda asosiy fondlarning yaroqsizlanishi e’tiborga olinsa, $\dot{K}(t)=I(t)-\mu K(t)$ deb yozish mumkin, bunda $\mu=const$, $(0{,}02\le\mu\le 0{,}04)$. Shu holda modelni o‘rganilsa, sodda modeldagi mulohazalardan katta farq qilmaydi. Shuning uchun quyidagi modelni to‘liq o‘rganamiz:

$$\begin{cases} Y(t)=F(L(t),K(t)),\\ I(t)=s(t)\cdot Y(t), \qquad 0<s<1,\\ C(t)=(1-s)\cdot Y(t),\\ \dot{K}(t)=I(t)-\mu K(t), \quad K(0)=K_0,\\ \dot{L}(t)=\eta L(t) \quad (L(t)=L_0e^{\eta t}), \quad L_0>0, \quad \eta>0. \end{cases} \tag{11.12}$$

Mazkur modelni o'rganish uchun kerakli munosabatlarda $k(t)$, $\dot{k}(t)$, $f(k)$ belgilashlarga o'tamiz:

$$\dot{k}(t)=\frac{dk}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{\dot{K}L-K\dot{L}}{L^2}=\frac{(I-\mu K)L-K\dot{L}}{L^2}=$$

$$=\frac{1}{L^2}=\left\{\left[s\,F(L,K)-\mu\,K\right]\cdot L-K\,\dot{L}\right\}=s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k\,.$$

Shunday qilib, (11.12) o'rniga ushbu

$$\dot{k}(t)=s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k \tag{11.13}$$

differensial tenglamaga ega bo'ldik. Shu (11.10) tenglama uchun

$$k(0)=k_0>0 \tag{11.14}$$

boshlang'ich shart bajariladi.

(11.13) tenglama iqtisodiy dinamika modelining *asosiy differensial tenglamasi* deyiladi. U hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli chiziqsiz tenglama, o'ng tomoni erkli o'zgaruvchi t ga oshkor bog'lanmagan. Shu sababli (11.13) avtonom differensial tenglamadan iborat, uning (11.14) boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yagona yechimi mavjud. (11.13) tenglamaning o'ng tomoni $\varphi(k)=s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k$ differensiallanuvchi (k bo'yicha). Koshi teoremasining shartlari bajariladi: $\varphi'(k)=s\,f'(k)-(\mu+\eta)$.

(11.12) munosabatlar bilan tavsiflanadigan model o'zgaruvchilarining vaqt bo'yicha o'zgarishini tekshirish uchun qurollanganlik k ning vaqt bo'yicha o'zgarishini (11.13) munosabatlar bo'yicha tekshirish yetarli.

(11.13) tenglama avtonom bo'lgani uchun uning statsionar yechimlari (muvozanat holatlari) quyidagi tenglamadan topiladi:

$$s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k=0\,. \tag{11.15}$$

Statsionar yechimlarning mavjudligi haqidagi teoremani bayon etish uchun quyidagi

$$\lim_{k\to+0} f'(k)=f'(+0)$$

miqdor haqida gapiraylik. $f'(+0)$ miqdor chekli bo'lishi ham ($\rho>0$da Solou funksiyasi uchun), cheksiz bo'lishi ham mumkin (Kobb-Duglas funksiyasi uchun).

11.1-teorema. *Agar* (11.13) *asosiy differensial tenglama uchun* (11.14) *boshlang'ich shart berilgan bo'lib, ushbu*

$$\mu+\eta<s\,f'(+0) \tag{11.16}$$

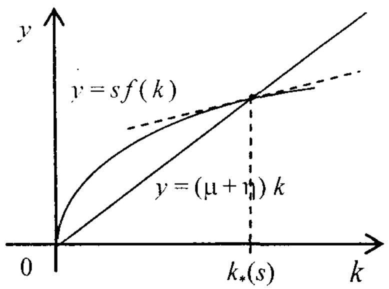
tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda (11.13) *tenglama yagona* (*sodda yechimdan tashqari*) *musbat va asimptotik turg'un* (*Lyapunov bo'yicha*) $[0;T]$*vaqt oralig'ida aniqlangan statsionar yechim* $k(t)\equiv k_*>0$ ga ega.

Isbot. Statsionar yechimlar (11.15) tenglamadan topiladi. Bu tenglama yagona musbat yechimga ega. Haqiqatan, ikkita $y=sf(k)$ va $y=(\mu+\eta)k$ funksiyani ko'ramiz. Ularning grafiklari kesishgan nuqtalar statsionar yechimni aniqlaydi. Ma'lumki, $f(0)=0$, shuning uchun $k(t)\equiv0$ sodda yechimga egamiz. Ammo bizni $k>0$ bo'lgan hol qiziqtiradi. Musbat statsionar yechimni izlaymiz. Har ikki funksiyaning grafigi koordinata boshidan chiqadi va I chorakda joylashgan. Ammo (11.13)ga ko'ra $y=sf(k)$ funksiya grafigi urinmasining burchak koeffitsienti koordinata boshida $y=(\mu+\eta)k$ nurning burchak koeffitsientidan katta. Undan tashqari, $f(k)$ funksiya neoklassik shartlarni qanoatlantiradi (ya'ni $f'(k)>0$, $f''(k)<0$, $\forall\, k>0$), shuning uchun $y=sf(k)$ funksiya botiq. Bu $y=sf(k)$ va $y=(\mu+\eta)k$ funksiyalar grafiklari absissasi $k_*>0$ bo'lgan nuqtada kesishishini tasdiqlaydi. Shu k_* son izlangan statsionar yechim $k(t)\equiv k_*$ bo'ladi. Demak, musbat statsionar yechim yagona ekan. Endi uning asimptotik turg'un ekanligini isbotlash qoldi (11.1-chizma).

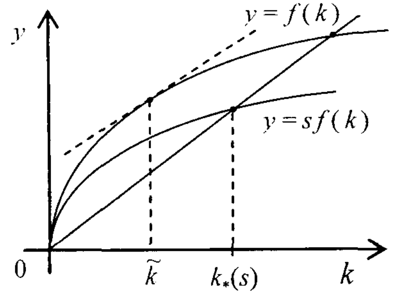
Agar (11.13) tenglamaning o'ng tomoni $y=sf(k)-(\mu+\eta)k$ uchun $\omega'(k_*)<0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, bundan skalyar differensial tenglama uchun Lyapunov-Puankare teoremasiga ko'ra (M.S.Salohitdinov, G'.Nasritdinov. "Oddiy differensial tenglamalar". Darslik. O'zbekiston nashriyoti, Toshkent, 1994-y., 11-bob, 11.3-§, 314-bet) $k(t)\equiv k^*_*$ statsionar yechim asimptotik turg'un bo'ladi. Haqiqatan, $\omega'(k_*)=sf'(k_*)-(\mu+\eta)<0$. Shuni isbot etish talab etilgan edi. 11.1-*teorema to'liq isbotlandi.*

11.2-*ta'rif*. *Iqtisodiy o'sishning qurollanganlikning o'zgarmas* k_* *qiymatiga mos rejimi balanslangan o'sish deyiladi.*

Makroiqtisodiy sistemaning parametrlari s, μ, η berilgan bo'lsa, k^*_* miqdor bir qiymatli aniqlanadi. Amalda mehnat resurslari hajmining o'sish sur'ati η $(0{,}005\le\eta\le0{,}01)$ va yaroqsizlanish koeffitsienti μ $(0{,}02\le\mu\le0{,}04)$ avvaldan ma'lum bo'ladi. Shuning uchun k_* ni jamg'arish



11.1-chizma



11.2-chizma

normasining funksiyasi deb qarash mumkin: $k_* = k_*(s)$.

11.1-lemma. Balanslangan o'sish rejimi $k_*(s)$ funksiya (0;1) intervalda aniqlangan, differensiallanuvchi va monoton o'suvchi.

Isbot. Ushbu $\frac{dk_*(s)}{ds} > 0, \forall s \in (0;1)$ tengsizlikni isbotlaymiz. Uning uchun $sf'(k_*(s)) - (\mu+\eta)k_*(s) = 0$ sonli tenglikni ko'ramiz. Ikki tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$f(k_*(s)) + s\,f'(k_*(s)) \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} - (\mu+\eta) \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} = 0 .$$

Bundan

$$\frac{dk_*(s)}{ds} = \frac{f(k_*(s))}{(\mu+\eta) - s\,f'(k_*(s))}$$

formula kelib chiqadi, unda kasrning maxraji va surati musbat. Shuning uchun $\frac{dk_*(s)}{ds} > 0$, $\forall s \in (0;1)$ tengsizlik o'rinli.

Shunday qilib, balanslangan o'sish $k_*(s)$, $0<s<1$ funksiya bilan aniqlanadi. Har bir s ($0<s<1$) uchun balanslangan o'sishning bitta rejimini hosil qilamiz. Bunday rejimlar cheksiz ko'p. Ularning ichidan (11.11) funksiyaga eng katta qiymat beradiganini topish lozim. Boshqacha aytganda, jamg'arish normasining ushbu

$$c(s) = (1-s) \cdot f(k_*(s)) \to \max , \quad 0<s<1 \tag{11.17}$$

masalaning yechimi bo‘ladigan qiymatini topish kerak. $c(s)$ funksiya $(0;1)$ intervalda aniqlangan va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi hamda $c(s)>0,\ \forall s\in(0;1)$.

Ravshanki, quyidagi munosabatlar bajariladi:

$$\lim_{s\to+0} c(s)=\lim_{s\to+1-0} c(s)=0,\quad \lim_{s\to+0} k_*(s)=0,\quad c(s)>0,\quad \Delta s\in(0;1).$$

Bundan $c(s)>0$ funksiyaning eng katta qiymati mavjud ekani kelib chiqadi. Endi shu funksiyaga eng katta qiymat beruvchi $\tilde{s}\in(0,1)$ ni topamiz. Buning uchun avval (11.17)dagi $c(s)$ funksiyani o‘zgartirib yozamiz ($sf(k_*(s))-(\mu+\eta)k_*(s)=0$ tenglikka ko‘ra):

$$c(s)=f\left(k_*(s)\right)-(\mu+\eta)\cdot k_*(s)=0\,. \tag{11.18}$$

Endi $c'(s)$ ni hisoblab, nolga tenglashtiramiz:

$$f'\left(k_*(s)\right)\cdot\frac{dk_*(s)}{ds}-(\mu+\eta)\cdot\frac{dk_*(s)}{ds}=0$$

yoki

$$\left[\,f'\left(k_*(s)\right)-(\mu+\eta)\,\right]\cdot\frac{dk_*(s)}{ds}=0\,.$$

Bundan $\dfrac{dk_*(s)}{ds}>0$ ga ko‘ra

$$f'\left(k_*(s)\right)-(\mu+\eta)=0 \tag{11.19}$$

tenglama kelib chiqadi. Bundan statsionar nuqtani topib bo‘lmaydi, chunki unda s oshkormas qatnashgan. Aslida k ga nisbatan (11.19) tenglamani

$$f'(k)=\mu+\eta \tag{11.20}$$

ko‘rinishda yozamiz. (11.13) ga ko‘ra $s=1$ da $\mu+\eta<f'(+0)$ tengsizlik o‘rinli. Ma’lumki, $k>0$ uchun $y=f(k)$ botiq. Shuning uchun biror $\tilde{k}$ da $f(\tilde{k})=\mu+\eta$ tenglik o‘rinli. Shunday qilib, tenglama yagona musbat $\tilde{k}$ yechimga ega.

Endi (11.12) tenglamaga $k=\tilde{k}$ ni qo‘yamiz:

$$c\,f(\tilde{k})-(\mu+\eta)\,\tilde{k}=0\,.$$

Bundan yagona statsionar nuqta $\tilde{s}$ ni topamiz:

$$\tilde{s} = \frac{(\mu+\eta)\tilde{k}}{f(\tilde{k})}.$$

Endi $f'(\tilde{k}) = (\mu+\eta)$ tenglikdan foydalanib, $\tilde{s}$ ni uzil-kesil aniqlaymiz:

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{k}\, f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})}. \tag{11.21}$$

Avvaldan ma'lum ediki, neoklassik IChFlar uchun $0 < \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)} < 1$,

$\forall$ k>0 tengsizlik o'rinli. Bundan $0 < \tilde{s} < 1$ ekani kelib chiqadi. Statsionar nuqta yagona va $c(s)$ funksiyaning (0; 1)da eng katta qiymati mavjud bo'lgani uchun shu $s = \tilde{s}$ nuqtada $c(s)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Shu bilan quyidagi teorema isbotlandi, desak bo'ladi.

11.2-teorema. Agar $\tilde{k}$ chekli (11.20) tenglamaning yechimi bo'lsa, optimal jamg'arish normasi $\tilde{s}$ (11.21) formula yordamida topiladi.

Shunday qilib, iqtisodiy sistema traektoriyasini $\tilde{s}$ va $\tilde{k}$ lar orqali hisoblash mumkin:

$$K(t) = L(t)\cdot\tilde{k} = L_0 e^{\eta t}\tilde{k}\,,\ \ L(t) = L_0 e^{\eta t},\ \ Y(t) = L(t)\cdot f(\tilde{k}) = L_0 e^{\eta t} f(\tilde{k})\,,$$

$$I(t) = \tilde{s}\,Y(t) = L_0\,\tilde{s}\,f(\tilde{k})\cdot e^{\eta t},\ \ c(t) = (1-\tilde{s})\,Y(t) = (1-\tilde{s})\,L_0 f(\tilde{k})\cdot e^{\eta t}.$$

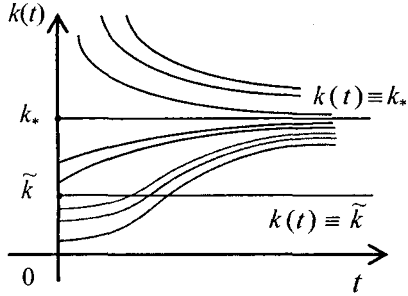
Oxirgi munosabatlar ko'rsatadiki, qurollanganlikning statsionar traektoriyasi $k(t) \equiv \tilde{k}$ bo'ylab modelning barcha asosiy o'zgaruvchilari vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'lgan holda mehnat resurslarining o'sish sur'atiga teng bo'lgan sur'at bilan o'sadi.

Endi statsionar yechimdan farq qiladigan yechimlar qanday bo'lishini tekshiramiz. 11.1-teoremaga ko'ra statsionar yechim asimptotik turg'un. Buning ma'nosi shuki, (11.13) differensial tenglamaning ixtiyoriy boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan $k(t)$ yechimi ($k(0)=k_0$, $k_0 \neq k_*$) t ning yetarli katta qiymatlarida $k(t) = k_*$ – statsionar yechimga intiladi.

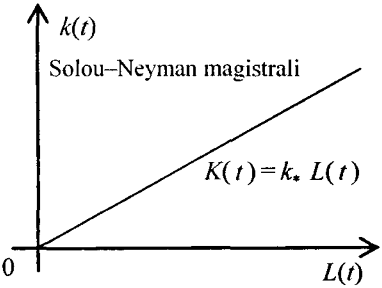
Avval $k_0 > k_*$ bo‘lsin. Bu holda $s\,f(k_0)-(\mu+\eta)\,k_0 < 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan $\dot{k}(t)$, $t>0$ tengsizlik kelib chiqadi. Endi $\ddot{k}$ ni tekshiramiz:

$$\ddot{k} = s\,f'(k)\,\dot{k} - (\mu+\eta)\,\dot{k} = [\,s\,f'(k)-(\mu+\eta)\,]\,\dot{k}\,.$$

$k_0 > k_*$ ga ko‘ra $s\,f'(k)-(\mu+\eta)<0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lgani uchun $\ddot{k}>0$. Demak, $k_0 > k_*$ bo‘lganda $k(t)$ traektoriya qavariq (11.3-chizma).



11.3-chizma



11.4-chizma

Endi $k_0 < k_*$ holni ko‘ramiz. Uch hol yuz berishi mumkin:

1) $k_0 = \tilde{k} < k_*$; 2) $0 < k_0 < \tilde{k}$; 3) $\tilde{k} < k_0 < k_*$.

1) $k_0 = \tilde{k} < k_*$ bo‘lsin. Bunda $k(t) \equiv \tilde{k}$ chiziq (nur) $k(t)$ funksiyaning burilish nuqtalaridan tashkil topgan bo‘ladi. 2) va 3) hollarni ko‘rganda bunga ishonchimiz komil bo‘ladi. Agar 2) $0 < k_0 < \tilde{k}$ bo‘lsa, unda, ravshanki, $\dot{k} = \tilde{s}\;f(k)-(\mu+\eta)\,k>0$, $\ddot{k} = \left[\tilde{s}\;f(\tilde{k})-(\mu+\eta)\right]k>0$ bo‘ladi. Bu $0<k_0<\tilde{k}$ da $k(t)$ funksiyaning qavariqligini anglatadi. Agar 3) $\tilde{k} < k_0 < k_*$ bo‘lsa, yana $\dot{k}>0$, ammo $\ddot{k}<0$ bo‘ladi. Bundan $k(t)$ funksiyaning botiqligi kelib chiqadi. Demak, $k=\tilde{k}$ dan o‘tishda qavariqlik botiqlikka o‘tadi, ya’ni $k_0=\tilde{k}$ da $k(t)=\tilde{k}$ chiziq $k(t)$ funksiyaning burilish nuqtalaridan tashkil topgan bo‘ladi.

L va K o'zgaruvchilar tekisligida $K(t)=k_* \; L(t)$ nur Solou–Neyman magistrali deyiladi (11.4-chizma).

1966-yilda E.Felps "oltin qoida"ni taklif qildi (ba'zida "oltin qoida" deganda optimal jamg'arish normasi $\tilde{s}$ ni topish usulini tushunishadi). Ko'rilayotgan holda quyidagicha aytiladi: *asosiy fondlarga qo'yilgan kapital-mablag' kapitaldan olingan daromadga teng.*

Bu quyidagi munosabatlardan ko'rinadi:

$$\tilde{s}\,\tilde{L}\,f(\tilde{k})=\tilde{L}\,\tilde{k}\,f'(\tilde{k}), \quad \tilde{s}\,F(\tilde{L},\tilde{K})=\tilde{K}\frac{\partial F(\tilde{L},\tilde{K})}{\partial K},$$

bunda $I=\tilde{s}\,F(\tilde{L},\tilde{K})$–asosiy fondlarga qo'yilgan mablag', $\tilde{K}\dfrac{\partial F(\tilde{L},\tilde{K})}{\partial K}$ – kapitaldan olingan daromad.

Misollar.

1-misol. $F(L,K)=a_0\,K^{\alpha}\,L^{1-\alpha}, \quad a_0>0, \quad 0<\alpha<1\,.$

Ravshanki, bu holda $f(k)=a_0\,k^{\alpha}$, $f'(k)=\alpha\,a_0\,k^{\alpha-1}$; $\tilde{k}$ ni $\alpha\,a_0\,k^{\alpha-1}=\mu+\eta$ tenglamadan topamiz: $\tilde{k}=\left(\dfrac{a_0\alpha}{\mu+\eta}\right)^{1/(1-\alpha)}$, $\quad \tilde{s}=\alpha\,.$

2-misol. $F(L,K)=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},$

$$a_0>0, \quad 0<a<1, \quad \rho>-1\,.$$

Bunda $f(k)=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},$

$$f'(k)=aa_0\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}.$$

Endi $\tilde{k}$ ushbu

$$aa_0\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}=\mu+\eta$$

tenglamadan topiladi:

$$\tilde{k} = (1-\alpha)^{-\frac{1}{\rho}} \left[\left(\frac{a_0 \alpha}{\mu+\eta} \right)^{(1+\rho)/\rho} - a \right]^{1/\rho}, \qquad \frac{a_0}{\mu+\eta} > a^{1/(1+\rho)}.$$

Oxirida optimal jamg'arish normasi $\tilde{s}$ ni topamiz:

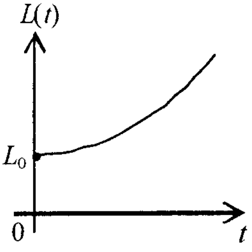
$$\tilde{s} = \frac{\tilde{k} \cdot f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})} = a \left(\frac{\mu+\eta}{a_0 \alpha} \right)^{\rho/(1+\rho)}$$

Ma'lumki, $0 < \tilde{s} < 1$ tengsizlik o'rinli. Oxirgi formuladan iqtisodiy sistemaning parametrlari a, a_0, μ, η, ρ orasidagi bog'lanish kelib chiqadi: $\mu + \eta < a_0 \alpha^{-1/\rho}$.

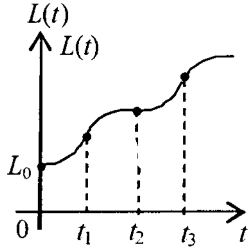
11.2-§. Mehnat resurslari (aholi soni) o'sishining botiq qonuni haqida

Iqtisodiyotda, asosan, mehnat resurslarining o'sishi haqida gap boradi. Ish bilan bandlar soni aholi soniga bog'liq. Ish bilan bandlar sonining ko'payishi (o'sishi) esa faqat aholi soniga bog'liq emas. Ko'pgina ilmiy risolalarda mehnat resurslari (aholi soni) eksponensial qonun bo'yicha o'sadi deb qaraladi. Bu $L(t)$ funksiyaning hosilasi $\dot{L}(t)$ shu $L(t)$ ga chiziqli bog'liq deb qaraladi degan so'z, ya'ni $\dot{L}(t) = \eta \cdot L(t)$, bunda η — o'sish sur'ati. Bundan $L(t) = L_0 \cdot e^{\eta t}$, $L_0 > 0$ kelib chiqadi (11.5-chizma).

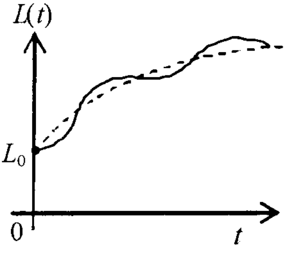
Shuning uchun $\ddot{L}(t) = \eta^2 \dot{L}(t) > 0$, ya'ni $L = L(t)$ funksiya qavariq



11.5-chizma



11.6-chizma



11.7-chizma

(11.5-chizma). Demak, t ning biror qiymatidan boshlab $L(t)$ning qiymati yetarli katta bo'lib ketishi mumkin. Tug'ilishlar soni haqida L.Eyler quyidagi gipotezani aytgan: "tug'ilishlar soni yildan yilga geometrik progressiya bo'yicha ortib boradi". Ingliz ruhoniysi Maltus iqtisodiyot bilan, aniqrog'i, demografiya bilan shug'ullangan. U Eyler gipotezasiga qo'shimcha qilib, "oziq-ovqat mahsulotlari arifmetik progressiya bo'yicha ortib boradi" degan. Eslatib o'tamizki, aholi sonining (umumiy holda mehnat resurslari hajmining) eksponensial o'sish qonuni vaqti-vaqti bilan va qisqa vaqt oralig'ida rivojlangan mamlakatlarda sodir bo'ladi hamda o'sish tezligi vaqt o'tishi bilan barqarorlashadi. Bunda ma'lum vaqt oralig'ida egri chiziqning qavariq qismi botiq, aksincha, botiq qismi qavariq qismga o'tadi (11.6-chizma). Umuman, o'sish biror botiq egri chiziq yaqinida S-simon egri chiziq bo'ylab sodir bo'ladi. Tegishli botiq egri chiziq o'sish tezligining barqarorlashishini anglatadi (qarang: Р.Фостер. Обновление производства: атакующие выигрывают. М., Прогресс, 1978, г 1.4, с.78–94) (11.5– 11.7-chizmalar).

Mehnat resurslari hajmining (aholi sonining) o'sish tezligiga qanday parametrlar ta'sir qiladi? – degan savol tug'iladi. Umuman, o'sish tezligi ko'pgina parametrlarga bog'liq. Eyler gipotezasi bo'yicha $\dot{L}(t)$ (o'sish tezligi) shu $L(t)$ning hajmiga bog'liq: $\dot{L}=\eta L$. Ba'zi mamlakatlarda aholining yashash sharoitining yaxshilanib borishi, iqtisodiy rivojlanish sodir bo'layotganiga sabab ishlab chiqarishga qo'yilayotgan mablag'larning (kapitalning) ortib borishidir, bunday sharoitda ishlab chiqariladigan mahsulot (milliy daromad) hajmi ortib boradi. Demak, $\dot{L}(t)$ miqdor faqat $L(t)$gagina bog'liq bo'lib qolmasdan, yana $K(t)$ga – kapital sarfga ham bog'liq. Agar bu bog'lanish $L(t)$ va $K(t)$ga nisbatan chiziqli bo'lsa, $\dot{L}(t)$ uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

$$\dot{L}(t)=\eta L(t)+\nu K(t), \quad \eta>0, \ \nu>0. \tag{11.23}$$

Ravshanki, $\ddot{L}(t)=\eta \dot{L}(t)+\nu \dot{K}(t)$, t>0. Qanday shartlar bajarilganda $\ddot{L}(t)<0$, ya'ni $L(t)$ funksiyaning grafigi botiq bo'ladi?

Ushbu

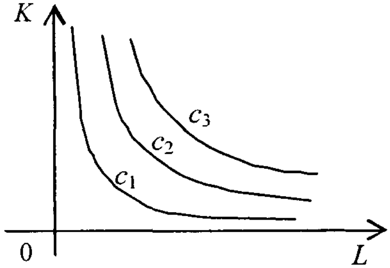
$$\ddot{L}(t) < 0 \qquad (11.23)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan botiq $L(t)$funksiyani *chiziqli-botiq* deb ataymiz. Chiziqlilik $\dot{L}(t)$ ning $L(t)$ va $K(t)$ ga chiziqli bog'liqligini, botiqlik esa $L(t)$ funksiyaning botiqligini anglatadi.

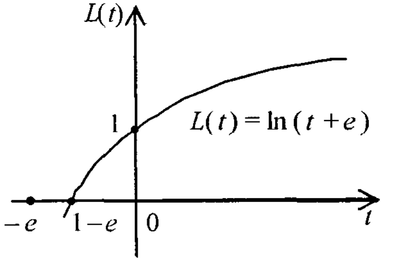
Izokvantalar $F(L,K)=CS$, C> 0 tenglama bilan beriladi. Undan, ma'lumki,

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\partial F}{\partial L} \Big/ \frac{\partial F}{\partial K} < 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Har bir izokvanta IChFning sath chiziqlaridan iborat bo'lib, qavariq egri chiziqdir (11.8-chizma).



11.8-chizma



11.9-chizma

Endi (11.19) ning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$\ddot{L}(t) = \eta\,\dot{L}(t) + \nu\,\dot{K}(t) = \dot{L}(t)\left(\eta + \nu\frac{\dot{K}}{\dot{L}}\right) = \dot{L}\left(\eta + \nu\frac{dK}{dL}\right). \qquad (11.24)$$

11.3-teorema. $L(t)$ *funksiya botiq bo'lishi uchun har bir izokvanta bo'ylab ushbu*

$$\frac{dK}{dL} < -\frac{\eta}{\nu} < 0 \qquad (11.25)$$

tengsizlik bajarilishi yetarli.

Isboti $\dot{L} > 0$ va (11.25) tengsizliklardan kelib chiqadi. Haqiqatan, (11.21)ga ko'ra

$$\ddot{L}(t)=\dot{L}\cdot\left(\eta+\nu\cdot\frac{dK}{dL}\right)<\dot{L}\cdot\left(\eta+\nu\cdot\left(-\frac{\eta}{\nu}\right)\right)=0.$$

Misollar.

1-misol. $L(t)=\ln(t+e)$, $t\geq 0$ (11.9-chizma) deylik. Unda $\dot{L}(t)=\frac{1}{t+e}>0$, $\ddot{L}(t)=-\frac{1}{(t+e)^2}<0$, $t>0$. Quyidagi $L=\eta L+\nu K$, $\ddot{L}=\eta\dot{L}+\nu\dot{K}$ munosabatlarni ko'raylik. $\dot{L}(t)$ va $\ddot{L}(t)$ larning ifodalaridan foydalansak,

$$-\frac{1}{(t+e)^2}=\eta\cdot\frac{1}{t+e}+\nu\cdot\dot{K}$$

kelib chiqadi. Biz birinchi tartibli differensial tenglamaga keldik. Uni integrallaymiz:

$$K(t)=\frac{1}{\nu(t+e)}+\frac{\eta}{\nu}\cdot\ln(t+e).$$

Endi dK/dL ni hisoblaymiz:

$$\frac{dK}{dL}=\frac{\dot{K}}{\dot{L}}=\left[-\frac{1}{\nu(t+e)}-\frac{\eta}{\nu}\cdot\ln(t+e)\right]:\frac{1}{t+e}=-\frac{1}{\nu(t+e)}-\frac{\eta}{\nu}<-\frac{\eta}{\nu}.$$

Shunday qilib, IChF izokvantalarida (11.25) tengsizlik bajariladi. Kobb-Duglas IChF uchun (11.25) tengsizlik ushbu

$$\frac{K}{L}>\frac{\eta}{\nu}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

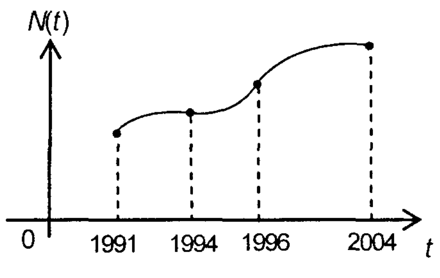
tengsizlik uchun bajariladi.

2-misol. Ikkinchi misol o'rnida 1991–2004-yillar davomida O'zbekiston Respublikasi aholisining o'sish dinamikasini ko'raylik. Avval shu yillardagi aholi soni jadvalini keltiramiz:

i	Yillar	Aholi soni (mln) N_i	$\Delta_i = N_{i+1} - N_i$
1	1991	20,862	
2	1992	21,360	0,498
3	1993	21,852	0,498
4	1994	22,828	0,430
5	1995	23,002	0,720
6	1996	23,444	0,442
7	1997	23,867	0,423
8	1998	24,231	0,364
9	1999	24,583	0,352
10	2000	24,908	0,325
11	2001	25,211	0,303
12	2002	25,523	0,312
13	2003	25,803	0,280
14	2004	26,116	0,313

(Ma'lumotlar "O'zbekiston Respublikasi Davlat statistika qo'mitasi, 2005"dan olingan).

Jadvaldan ko'rinadiki, $N(t)$ funksiya o'suvchi, ammo o'sish tezligi ($Д_i$ miqdorlar) asosan kamayib borayapti. Faqat 1995 va 1996-yillarda o'sish tezroq bo'lgan. $N(t)$ funksiya 1991—1994-yillarda botiq, 1994—1996-yillarda qavariq va 1996—2004-yillarda yana botiq. Demak, $N(t)$ chiziq S-simon ko'rinishda (11.9 a-chizma).



11.9 a-chizma

11.3-§. Iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normali modeli: ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlangan modeli

Avvalgi 11.2-§da iqtisodiy dinamikaning faqat asosiy fondlar chiziqli yaroqsizlangan modellari ko'rildi. Amalda asosiy fondlar ham, mehnat resurslari ham yaroqsizlanishi kuzatiladi. Asosiy fondlar (masalan, stanoklar) eskirishi mumkin, mehnat resurslari esa (ish bilan band bo'lganlar) ishga yaroqsiz holga kelishi (pensiyaga chiqishi, vaqtincha kasal bo'lishi, vafot etishi) tabiiy. Bunday hollarda mehnat resurslari va asosiy fondlarning majmuasi yaroqsizlanishini e'tiborga olish zarur. Ishlab chiqarish resurslarining yaroqsizlanishini hisobga olganda iqtisodiy sistemani va uning traektoriyasini chuqurroq o'rganish imkoniyati tug'iladi. Mazkur bobda iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlangan modellarini ko'ramiz.

Faraz etamiz, vaqtning t momentida ishlab chiqarish resurslarining ushbu

$$\mu \cdot L(t) \cdot \chi\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)$$

formula bilan berilgan qismini almashtirish kerak bo'lsin, unda $\chi\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \chi(k)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\chi(0)=0,\ \ \chi(k)>0,\ \chi'(+0)\geq 0,\ \chi'(k)>0,\ \chi''(k)\geq 0,\ \forall k>0\,. \quad (11.36')$$

Shu (11.36')ga ko'ra $\chi(k)$ funksiya monoton o'suvchi va qavariqdir. $\chi(k)\equiv k$ bo'lgan hol chiqarib tashlanmaydi. Bunda $\chi(0)=0$, $\chi'(+0)=1$, $\chi'(k)=1$, $\chi''(k)=0$ bo'ladi. Shunda ham $\chi(k)$ funksiyani, odatda, qavariq deb hisoblashadi. (11.36')ga ko'ra $\chi(k)-k\cdot\chi'(k)<0$, $\forall k>0$ tengsizlik o'rinli. Bundan $\frac{k\cdot\chi'(k)}{\chi(k)}>1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Iqtisodiy sistema quyidagi munosabatlar bilan tavsiflansin, deylik:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{K}=I-\mu\cdot L\cdot\chi\left(\dfrac{K}{L}\right),\quad 0\le\mu<1,\\ \dot{L}=L\cdot\eta,\quad \eta>0,\\ Y=sY+(1-s)\cdot Y=I+C,\quad 0<s<1,\quad s=const>0,\\ c=\dfrac{C}{L}=(1-s)f(k)\to\max,\quad 0<s<1.\end{array}\right\}\qquad(11.26)$$

Ravshanki, agar $\chi\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{K}{L}$ bo‘lsa, 11.1-§da ko‘rilgan iqtisodiy dinamika modelini hosil qilamiz.

(11.26) modelni o‘rganish uchun avvalgi bobdagi kabi asosiy differensial tenglamani chiqaramiz:

$$\dot{k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{\dot{K}L-K\dot{L}}{L^2}=\frac{1}{L^2}\cdot\left[\left(I-\mu\dot{L}\chi\left(\frac{K}{L}\right)\right)\cdot L-K\dot{L}\right]=$$

$$=\frac{1}{L^2}\cdot\left[\left(sLf(k)-\mu L\chi(k)\right)\cdot L-K\dot{L}\right]=sf(k)-\eta k-\mu\chi(k).$$

Shunday qilib, (11.26) model uchun asosiy differensial tenglama

$$\dot{k}=sf(k)-\eta k-\mu\chi(k),\quad k(0)=k_0>0\qquad(11.27)$$

ko‘rinishga ega. Uning o‘ng tomoni $\phi(k)=sf(k)-\eta k-\mu\chi(k)$ differensiallanuvchi (k bo‘yicha). Shu sababli, Koshi teoremasiga ko‘ra, (11.27) tenglama ixtiyoriy boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega.

Optimal jamg‘arish normasini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz, bunda optimallik jon boshiga iste’molning maksimumi ma’nosida tushuniladi. Bu masalani yechishda, avvalgi bobdagiga o‘xshash, (11.27) avtonom differensial tenglamaning statsionar yechimi muhim ahamiyatga ega.

11.4.-teorema. Agar (11.27) asosiy differensial tenglama uchun ushbu

$$\mu\chi'(+0)+\eta<sf'(+0)\qquad(11.28)$$

tengsizlik bajarilsa, unda (11.27) tenglama yagona musbat (sodda yechimdan tashqari) va (Lyapunov bo‘yicha) asimptotik turg‘un statsionar yechimga ega, ya'ni $k(t)\equiv k_*$ $t\in[0;T]$.

Isbot.(11.37) tenglama avtonom, uning statsionar yechimlari ushbu

$$s\,f(k)-\eta\,k-\mu\,\chi(k)=0 \tag{11.29}$$

chekli tenglamadan topiladi. $k(t)\equiv 0$ – (11.37) tenglamaning sodda yechimi. $y_1=sf(k)$ va $y_2=\eta k+\eta\chi(k)$ funksiyalarning grafiklari koordinata boshidan mos ravishda $sf'(+0)$ va $\eta+\eta\chi'(+0)$ burchak koeffitsientlar bilan chiqadi. (11.28)ga ko'ra $\eta+\eta\chi'(+0)<sf'(+0)$. Demak, k ning nolga yaqin qiymatlarida $y_2(k)$ning grafigi $y_1(k)$ning grafigidan pastroqda bo'ladi. Shu grafiklar $k>0$da kesishishini ko'rsatish mumkin. Bu $y_1=sf(k)$ning botiqligi va $y_2=\eta k+\eta\chi(k)$ning qavariqligidan kelib chiqadi. $y_2(k)$ ning qavariqligi ushbu

$$y_2(0)=0,\ \ y_2'(k)=\eta+\mu\,\chi'(k)>0,\ \ y_2''(k)=\mu\,\chi''(k)>0,\ \forall k>0$$

munosabatlardan ko'rinadi.

Grafiklar kesishish nuqtasini $(k_*,\ y_*)$ deb belgilaymiz, bunda k_* – (11.29) tenglamaning musbat yechimi. Shunday qilib, (11.37) differensial tenglama yagona musbat statsionar yechim $k(t)\equiv k_*$ ga ega. Shu yechimning asimptotik turg'unligi ham osongina isbotlanadi. (11.37)ning o'ng tomoni $\phi(k)$ uchun $\phi'(k_*)<0$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatish kerak. Ravshanki,

$$\begin{aligned}\phi'(k_*)&=\frac{d}{dk}\left[s\,f(k)-\eta k-\mu\,\chi(k)\right]\Big|_{k=k_*}=\\&=s\,f'(k_*)-\eta-\mu\,\chi'(k_*)<0.\end{aligned} \tag{11.30}$$

Lyapunov–Puankare teoremasiga ko'ra, (11.30) tengsizlik $k(t)\equiv k_*$ yechimning asimptotik turg'unligini anglatadi.

11.4-*teorema isbot etildi.*

(11.26) iqtisodiy sistema uchun qurollanganlik k_* qiymati balanslangan o'sish deyiladi. Ravshanki, avvalgi bobdagi kabi balanslangan o'sish rejimi k_* jamg'arish normasi s ning funksiyasi bo'ladi: $k_*=k_*(s)$, $0<s<1$.

11.3-lemma.(11.26) *iqtisodiy sistema uchun topilgan balanslangan o'sish rejimi* $k_*(s)$, (0; 1) *intervalda aniqlangan, differensiallanuvchi va monoton o'suvchi funksiyadir.*

Isbot. $k_*(s)$ning (0; 1) da aniqlangan, differensiallanuvchi ekani ravshan. Monoton o'suvchiligini isbotlash uchun $\frac{dk_*(s)}{ds} > 0$, $\forall s \in (0;1)$ tengsizlikning o'rinli ekanini ko'rsatish kerak. Uning uchun ushbu $s\,f(k_*(s)) - \eta\, k_*(s) - \mu\,\chi\,(k_*(s)) = 0$ sonli tenglikning ikki tomonini differensiallab topamiz ((11.6) ga qarang):

$$\frac{dk_*(s)}{ds} = -\frac{f(k_*(s))}{\phi'(k_*(s))} > 0 .$$

Bundan $k_*(s)$ ning monoton o'suvchiligi kelib chiqadi.

Endi optimal jamg'arish normasi va balanslangan o'sish rejimini topish bilan shug'ullanamiz. Jon boshiga iste'mol funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$c(s) = (1-s)\,f(k_*(s)) = f(k_*(s)) - \eta\, k_*(s) - \mu\,\chi\,(k_*(s)),\quad 0<s<1. \quad (11.31)$$

Shu funksiyaning eng katta qiymati mavjud, chunki $c(s)$ uchun ushbu $\lim\limits_{s\to+0} c(s) = \lim\limits_{s\to 1-0} c(s) = 0$, $c(s)>0$, $\forall s \in (0;1)$ munosabatlar o'rinli. Demak, biror $\tilde{s} \in (0;1)$ uchun $\max\limits_{s\in(0;1)} c(s) = c(\tilde{s})$ tenglik bajariladi. Shu $\tilde{s}$ ni topish uchun $c'(s)$ ni topib, $c'(s) = 0$ tenglamani yechish lozim. Ravshanki

$$c'(s) = [\, f'(k_*(s)) - \eta - \mu\,\chi'\,(k_*(s))\,]\,\frac{dk_*(s)}{ds}.$$

11.3-lemmaga ko'ra $c'(s) = 0$ tenglama $f'(k_*(s)) - \eta - \mu\,\chi'\,(k_*(s)) = 0$ tenglamaga teng kuchli. Ammo undan bevosita s ni topib bo'lmaydi, chunki s tenglamada oshkormas qatnashayapti. Aslida biz k ga nisbatan

$$f'(k) - \eta - \mu\,\chi'\,(k) = 0 \qquad (11.32)$$

tenglamaga egamiz. (11.32)ning chap tomoni hosilasi ($k$ga nisbatan) noldan farqli, ya'ni $f''(k) - \mu\,\chi''(k) = 0 < 0$ $\forall k > 0$. Shu sababli oshkormas tenglamaning bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremaga ko'ra (11.32)ning yagona $\tilde{k}$ yechimi mavjud. Ikkinchi tomondan, bu tasdiq $y_1 = sf(k)$ va $y_2 = \eta k + \eta\chi(k)$ funksiya grafiklari biror $\bar{k} > 0$ da kesishishidan kelib chiqadi. (11.28) tengsizlik $s=1$ da ham bajariladi:

$\mu\chi'(+0)+\eta < f'(+0)$. Ammo $\tilde{k}$ da unga teskari $\mu\chi'(\tilde{k})+\eta > s\,f'(\tilde{k})$ tengsizlik o'rinli. Shu sababli biror $\tilde{k}$, $0<\tilde{k}<\bar{k}$ qiymatda $y_1'(\tilde{k})=y_2'(\tilde{k})$ tenglik bajariladi. Topilgan $\tilde{k}$ ni $\phi(k(s))=0$ ga qo'yamiz. Undan $\tilde{s}$ ni topamiz:

$$\tilde{s}=\frac{\mu\chi(\tilde{k})+\eta\tilde{k}}{f(\tilde{k})}>0.$$

Endi (11.8)ga ko'ra $\tilde{s}$ uchun formulani uzil-kesil ushbu

$$\tilde{s}=\frac{\tilde{k}\,f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})}-\mu\cdot\frac{\tilde{k}\,\chi'(\tilde{k})+\chi(\tilde{k})}{f(\tilde{k})} \qquad (11.33)$$

ko'rinishda yozamiz. Ravshanki, $\tilde{s}<\dfrac{\tilde{k}\,f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})}$, chunki $k\chi'(k)-\chi(k)>0\ \ \forall k>0$. Demak, $0<\tilde{s}<1$ tengsizlik o'rinli.

Ko'rinib turibdiki, ishlab chiqarish resurslarining chiziqsiz yaroqsizlanishi hisobga olinsa, optimal jamg'arish normasi uchun

$$\mu\cdot\frac{\tilde{k}\,\chi'(\tilde{k})+\chi(\tilde{k})}{f(\tilde{k})} \qquad (11.34)$$

miqdorga teng "yutuqqa" egamiz.

Yuqoridagi hisob-kitoblar quyidagi teoremani isbot etadi, desa bo'ladi:

11.5-teorema. (11.26) munosabatlar bilan tavsiflanadigan iqtisodiy sistema (iqtisodiy jarayon) uchun optimal jamg'arish normasi $\tilde{s}$ (11.34) formulaga teng yutuq bilan (11.33) formula yordamida topiladi, balanslangan o'sishning optimal rejimi $\tilde{k}$ (11.32) chekli tenglamaning yechimi sifatida aniqlanadi.

Endi "oltin qoida" ni chiqarish qiyin emas. (11.33) formuladan uning ikki tomonini $\tilde{L}$ ga ko'paytirib, ushbu

$$\tilde{s}F(\tilde{L},\tilde{K})=\tilde{K}\frac{\partial F(\tilde{K},\tilde{L})}{\partial K}-\mu\tilde{L}\left(k\chi'(\tilde{k})+\chi(\tilde{k})\right) \qquad (11.35)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bunda, bilamizki, $\tilde{s}F(\tilde{L},\tilde{K})$ – asosiy fondlarga ajratilgan kapital miqdori, $\tilde{K}\frac{\partial F(\tilde{K},\tilde{L})}{\partial K}$ esa kapitaldan olingan daromad. (11.35)dan quyidagi "oltin qoida" kelib chiqadi:

asosiy fondlarga qo'yilgan kapital miqdori kapitaldan olingan daromad hajmidan $\mu\tilde{L}\left(k\chi'(\tilde{k})+\chi(\tilde{k})\right)$ *miqdorga kam.*

Shu miqdor ishlab chiqarish resurslarining chiziqsiz yaroqsizlanishi hisobga olingan *samaradorlikni* anglatadi. Bu holda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining (milliy daromadning) iste'molga ajratilgan qismi Solouning sodda dinamik modelidagiga qaraganda (11.34) miqdorga ko'p bo'ladi. Xulosa shuki, qo'shimcha parametrlarni hisobga olish natijasida iste'molga ajratiladigan ulushni orttirish va buning uchun ishlab chiqarish hajmini qisqartirmaslik mumkin ekan.

11-bobga oid masalalar

I. Quyidagi berilgan IChFga mos iqtisodiy dinamika modellari uchun optimal jamg'arish normasi $\bar{s}$ va balanslangan o'sishning optimal rejimi $\bar{k}$ topilsin:

1. $F(L,K)=\sqrt{KL}$.
2. $F(L,K)=\sqrt[3]{KL^2}$.
3. $F(L,K)=\sqrt[3]{K^2L}$.
4. $F(L,K)=\sqrt[4]{KL^3}$.
5. $F(L,K)=\dfrac{2KL}{K+L}$.
6. $F(L,K)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$.
7. $F(L,K)=\dfrac{4KL}{(\sqrt{K}+\sqrt{L})^2}$.
8. $F(L,K)=\dfrac{\sqrt{2}KL}{\sqrt{K^2+L^2}}$.

II. Solou IChFning turli xususiy hollarida asosiy differensial tenglama yozilsin va o'rganilsin.

III. (11.37) tenglamada $\dot{L}=\eta\cdot L$, $\chi\left(\frac{K}{L}\right)=\left(\frac{K}{L}\right)^2$ bo'lganda uning ko'rinishini yozing.

IV. Ushbu $\dot{k} = s\,a_0\,k^{\alpha} - (\mu + \eta)k, \quad 0 < s < 1, \quad a_0 > 0, \quad 0 < \alpha < 1$
Bernulli differensial tenglamasi integrallansin.

V. (11.27) tenglama uchun $\tilde{k}$ va $\tilde{s}$ larni topishga oid tenglama yozilsin hamda $\tilde{k}$ aniqlansin; so'ngra $\tilde{s}$ topilsin.

11-bobga oid nazorat savollari

1. Dinamik IChF ta'rifini bering.

2. Avtonom dinamik IChF nima?

3. Iqtisodiy dinamikaning modellari nima?

4. Solouning sodda dinamik modeli uchun asosiy differensial tenglamani yozing.

5. Asosiy differensial tenglamaning statsionar yechimi haqidagi teoremani ayting.

6. Statsionar yechim yaqinida integral egri chiziqlar qanday joylashgan?

7. Mehnat resurslari hajmining chiziqli-botiq bo'lishi shartini keltiring.

8. Shu holda asosiy differensial tenglama yozilsin.

9. Ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlanishi qanday ifodalanadi?

10. Shu holda asosiy differensial tenglama yozilsin va $\tilde{k}$, $\tilde{s}$ *lar hisoblansin.*

11. Hamma ko'rilgan iqtisodiy dinamika modellarini chiziqli IChF uchun to'liq o'rganib chiqing.

12-BOB. IQTISODIY DINAMIKANING IKKI SEKTORLI MODELLARI

Avvalgi ikki bobda ko'rilgan iqtisodiy sistema bitta sektordan iborat bo'lib, unga mos IChF ham berilgan bo'lar va bittagina tur mahsulot (milliy daromad) ishlab chiqarilar edi. Aslida makroiqtisodiy sistemada ishlab chiqarish ikki va undan ortiq o'zaro hamkorlik qiladigan sektorlarda amalga oshirilishi mumkin. Xususan, hatto K.Marks ikki sektorli modellarni ko'rgan. Unda I sektor ishlab chiqarish qurollarini (asosiy fondlarni), II sektor esa, iste'mol buyumlarini ishlab chiqargan. Bu sodda va kengaytirilgan takror ishlab chiqarish bilan bog'langan edi. Quyida biz hozirgi zamonda keng qo'llaniladigan ikki sektorli modellarni ko'ramiz.

12.1-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi o'zgarmas bo'lgan ikki sektorli model

Makroiqtisodiy sistema ikki sektordan iborat bo'lib, ular mos ravishda ushbu

$$Y_1 = F_1(L_1, K_1)\,, \quad Y_2 = F_2(L_2, K_2)\,.$$

neoklassik dinamik IChFlar bilan xarakterlansin, deylik. Bunda L_1, L_2 – mehnat resurslari hajmi, K_1, K_2 – asosiy fondlar hajmi, Y_1, Y_2 – ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi. Faraz etaylik, birinchi sektor ishlab chiqarish vositalarini, ikkinchi sektor esa iste'mol buyumlarini ishlab chiqarsin. I va II sektordagi asosiy fondlarga mablag'lar birinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y_1 hisobiga amalga oshiriladi, iste'mol C esa ikkinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y_2 bilan ustma-ust tushadi. Undan tashqari, mehnat resurslari yig'indisi $L=L_1(t)+L_2(t)$ o'zgarmas deb faraz etiladi, ya'ni $\dot{L}=\dot{L}_1(t)+\dot{L}_2(t)=0$ va $L_1(t)=q(t)L$, $L_2(t)=(1-q(t))L$, bunda $L=const$, $0\le q(t)\le 1$. Biz $q(t)\equiv const$, $t\in[0;T]$ holni ko'ramiz. Ravshanki, bu holda $0<q<1$.

Yuqorida qilingan farazlar bajarilgan deb qarab, iqtisodiy dinamikaning quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan ikki sektorli modelini ko'ramiz:

$$\begin{cases} \dot{K}_1 = s\cdot F_1(L_1,K_1)-\mu_1 K_1, \quad 0<\mu_1<1, \quad 0<s<1, & (12.1)\\ \dot{K}_2 = (1-s)F_1(L_1,K_1)-\mu_2 K_2, \quad 0<\mu_2<1, & (12.2)\\ L_1 = qL, \quad L_2=(1-q)L, \quad 0<q<1, \quad q=const, & (12.3)\\ C=F_2(L_2,K_2), \quad L_1+L_2=L, \quad L=const. & (12.4)\end{cases}$$

(12.1)–(12.4) modelni o'rganish uchun belgilashlar kiritamiz:

$$k_1=\frac{K_1}{L_1}, \quad k_2=\frac{K_2}{L_2}, \quad F_1(L_1,K_1)=L_1 f_1(k_1), \quad F_2(L_2,K_2)=L_2 f_2(k_2).$$

Shu belgilashlar yordamida (12.1) va (12.2) tenglamalar ushbu

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}_1 &= s\, f_1(k_1)-\mu_1 k_1, \\ \dot{k}_2 &= \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1)-\mu_2 k_2 \end{aligned}\right\} \qquad (12.5)$$

ko'rinishda yoziladi, (12.4) esa

$$C=L_2 f_2(k_2)=(1-q)\,L\, f_2(k_2), \quad 0<q<1 \qquad (12.6)$$

ko'rinishga keladi.

12.1-teorema. *Agar iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli* (12.5) *modeli uchun ushbu*

$$\mu_1 < s\, f_1'(+0) \qquad (12.7)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda normal avtonom sistema (12.5) *yagona musbat* (*sodda yechimdan tashqari*) *va asimptotik turg'un*

$$k_1(t)\equiv k_1^* = k_1(s), \quad k_2(t)\equiv k_2^*=k_2(s,q)$$

statsionar yechimga ega.

Isbot. (12.5) sistemaning birinchi tenglamasiga ko'ra ixtiyoriy $k_1(t)$ yechim faqat s parametrga, shu sistemaning ikkinchi tenglamasiga ko'ra $k_2(t)$ yechim ikkita s va q parametrlarga bog'liq bo'ladi. (12.5) sistemaning o'ng tomonidagi funksiyalar k_1 va k_2 lar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi. Shuning uchun bu sistema ixtiyoriy boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega.

(12.5) sistemaning statsionar yechimlari ushbu

$$\left.\begin{aligned} & s\,f_1(k_1)-\mu_1 k_1=0, \\ & \frac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1(k_1)-\mu_2 k_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

chekli tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. (12.8) sistemaning birinchi tenglamasi faqat bitta k_1 noma'lumni o'z ichiga oladi. U yagona musbat (sodda $k_1(t)\equiv 0$ yechimdan tashqari) $k_1^*(s)>0$ yechimga ega. Endi $k_1=k_1^*(s)$ bo'lganda (12.8)ning ikkinchi tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1(k_1^*(s))-\mu_2 k_2=0.$$

Undan $\mu_2\neq 0$ da $k_2^*(s,q)$ ni topamiz:

$$k_2^*(s,q)=\frac{q\,(1-s)}{\mu_2(1-q)}\,f_1(k_1^*(s))>0. \tag{12.9}$$

Shunday qilib, (12.5) sistemaning yagona musbat statsionar yechimi $(k_1(t);k_2(t))\equiv(k_1^*(s);k_2^*(s,q))$ mavjudligi isbotlandi.

Endi bu yechimning (Lyapunov bo'yicha) asimptotik turg'un ekanini isbotlaymiz. Buning uchun statsionar yechimning asimptotik turg'unligi haqida Lyapunov-Puankare teoremasini qo'llaymiz. Quyidagi

$$P(k_1,k_2)=s\,f_1(k_1)-\mu_1 k_1, \qquad Q(k_1,k_2)=\frac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1(k_1)-\mu_2 k_2$$

belgilashlarni kiritamiz. Barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial P}{\partial k_1}=s\,f_1'(k_1)-\mu_1, \qquad \frac{\partial P}{\partial k_2}=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_1}=\frac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1'(k_1), \qquad \frac{\partial Q}{\partial k_2}=-\mu_2.$$

Endi ushbu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial k_1} & \dfrac{\partial P}{\partial k_2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial k_1} & \dfrac{\partial Q}{\partial k_2} \end{pmatrix}$$

matritsani tuzamiz.

Agar shu matritsaning $k_1 = k_1^*(s)$, $k_2 = k_2^*(s,q)$ bo'lganda xos sonlari manfiy haqiqiy qismlarga ega bo'lsa, unda statsionar yechimning asimptotik turg'un ekani isbot etilgan bo'ladi. Haqiqatan, mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} s\, f_1'(k_1^*) - \mu_1 - \lambda & 0 \\ \dfrac{q\,(1-s)}{1-q} f_1'(k_1^*) & -\mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Uning yechimlari: $\lambda_1 = s\, f_1'(k_1^*) - \mu_1 < 0$, $\lambda_2 = -\mu_2 < 0$, $0 < \mu_2 < 1$.

Shunday qilib, 14.1-teorema isbotlandi.

Topilgan $(k_1^*; k_2^*)$ statsionar yechim mos ravishda birinchi va ikkinchi sektorlar balanslangan o'sish rejimlarini anglatadi, ular cheksiz ko'p, chunki $s \in (0;1)$, $q \in (0;1)$. Har bir $(s;q)$ juftlikka bitta balanslangan o'sish rejimi $(k_1^*; k_2^*)$ mos keladi. Har bir sektor uchun optimal balanslangan o'sish rejimini topish masalasini qo'yamiz. Optimallik jon boshiga iste'molni maksimallashtirish ma'nosida tushuniladi. Shunday qilib, quyidagi masalani ko'ramiz:

$$c(s,q) = \frac{C}{L} = (1-q)\, f_2(k_2^*(s,q)) \to \max, \quad 0<s<1, \quad 0<q<1. \qquad (12.10)$$

Avval (12.10) masala yechimininig mavjudligini ko'rsatamiz. P_2 deb ochiq kvadratni belgilaymiz, ya'ni

$$P_2 = \{(s;q): \ 0<s<1, \quad 0<q<1\}.$$

P_2 kvadratning tomonlarini G_1, G_2, G_3 va G_4 deb belgilaymiz:

$G_1 = \{(s;q): \ 0<s<1, \quad q=0\}$, $G_2 = \{(s;q): \ s=1, \quad 0<q<1\}$,

$G_3=\{(s;q):\ 0<s<1,\quad q=1\ \},\qquad G_4=\{(s;q):\ s=0,\quad 0<q<1\ \}.$

Kvadratning chegarasini $\partial P_2=\overline{G_1}+\overline{G_2}+\overline{G_3}+\overline{G_4}$ deb belgilasak, $\overline{P_2}=P_2\cup\ \partial P_2$ bo'ladi, bunda $\overline{P_2}$ – yopiq kvadrat. Ravshanki, (12.9) ga ko'ra ushbu

$$\lim_{s\to+0}k_2^*(s,q)=\lim_{q\to+0}k_2^*(s,q)=0$$

tengliklar o'rinli. Shuning uchun quyidagi tengliklarni yozamiz:

$$\lim_{\substack{s\to+0\\0<q<1}}c(s,q)=\lim_{\substack{q\to+0\\0<s<1}}c(s,q)=\lim_{\substack{q\to1-0\\0<s<1}}c(s,q)=\lim_{\substack{s\to1-0\\0<q<1}}c(s,q)=0\ ,$$

ya'ni $\lim\limits_{(s,q)\to\partial\Pi_2}c(s,q)=0$. Undan tashqari $c(s,q)>0,\ \forall\,(s,q)$. Demak, (12.10) masalaning yechimi mavjud, ya'ni $c(s,q)$ funksiya $(\bar{s},\bar{q})\in P_2$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Endi shu $(\bar{s},\bar{q})$ nuqtani topamiz.

Avval statsionar nuqtalarni aniqlaymiz. Uning uchun ushbu $\dfrac{\partial c}{\partial s}$, $\dfrac{\partial c}{\partial q}$ hosilalarni $k_1=k_1^*(s)$, $k_2=k_2^*(s,q)$ da hisoblab, nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial c}{\partial s}=(1-q)\,f_2'(k_2^*)\cdot\frac{\partial k_2^*}{\partial s}$$

$\partial k_2/\partial s$ uchun ifoda topamiz:

$$\frac{\partial k_2}{\partial s}=\frac{q}{(1-q)\,\mu_2}\Big[\,f_1'(k_1^*)-\mu_1\,\Big]\cdot\frac{\partial k_1^*}{\partial s}\ .$$

O'z navbatida $\partial k_2/\partial s$ uchun ifoda chiqaramiz:

$$\frac{\partial k_1^*}{\partial s}=\frac{f_1(k_1^*)}{\mu_1-s\,f_1'(k_1^*)}>0\ .$$

Endi $\partial k_2/\partial s$ uchun uzil-kesil formulani yozamiz:

$$\frac{\partial k_1^*}{\partial s}=\frac{q}{(1-q)\,\mu_2}\left[f_1'(k_1^*)-\mu_1\right]\cdot\frac{f_1(k_1^*)}{\mu_1-s\,f_1'(k_1^*)}\,.$$

Bundan keyin $\frac{\partial c}{\partial s}=0$ tenglamaga ko‘ra k_1 ga nisbatan tenglama hosil bo‘ladi (unga s oshkormas kiradi):

$$f_1'(k_1)-\mu_1=0\,. \tag{12.11}$$

Bundan yagona musbat $\bar{k}_1$ yechimni topamiz. Shu $\bar{k}_1$ qiymatni (12.8) sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘yib, optimal jamg‘arish normasi $\bar{s}$ ni topamiz:

$$\bar{s}=\frac{\mu_1\cdot\bar{k}_1}{f_1(\bar{k}_1)}=\frac{k_1 f_1'(\bar{k}_1)}{f_1(\bar{k}_1)}\,. \tag{12.12}$$

$F(L_1,K_1)$ IChFning neoklassikligidan $f_1(k_1)$ uchun ushbu

$$0<\frac{\bar{k}_1 f_1'(\bar{k}_1)}{f_1(\bar{k}_1)}<1$$

tengsizlikni yozish mumkin.

Endi $\frac{\partial c}{\partial q}$ ni $k_1=k_1^*(s)$, $k_2=k_2^*(s,q)$ nuqtada hisoblaymiz:

$$\frac{\partial c}{\partial q}=-\,f_2(k_2^*)+(1-q)f_2'(k_2^*)\frac{\partial k_2^*}{\partial q}\,. \tag{12.13}$$

Bundagi $\frac{\partial k_2^*}{\partial q}$ ni hisoblash uchun (12.8) sistemaning ikkinchi tenglamasini q bo‘yicha differensiallaymiz:

$$(1-s)\left[\frac{1}{(1-q)^2}f_1(\bar{k}_1)+\frac{q}{1-q}f_1'(\bar{k}_1)\frac{\partial k_2^*}{\partial q}\right]-\mu_2\frac{\partial k_2^*}{\partial q}=0\,.$$

Bundan $\partial k_1/\partial q=0$ bo‘lgani uchun

$$\frac{\partial k_2^*}{\partial q}=\frac{1-s}{\mu_2(1-q)^2}f_1(\bar{k}_1) \tag{12.14}$$

formula kelib chiqadi. Endi (12.14)ni (12.13)ga qo‘yamiz:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2^*) + (1-q) f_2'(k_2^*) \cdot \frac{1-s}{\mu_2 (1-q)^2} f_1(\bar{k}_1).$$

(12.8) sistemaning ikkinchi tenglamasiga ko‘ra

$$\frac{1-s}{1-q} = \frac{\mu_2}{q} \cdot \frac{k_2^*}{f_1(\bar{k}_1)}$$

tenglik o‘rinli. Shuni e’tiborga olgan holda $\partial c / \partial q$ ni uzil-kesil topish mumkin:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2^*) + \frac{f_2'(k_2^*) f_1(\bar{k}_1)}{\mu_2} \cdot \frac{\mu_2 k_2^*}{q f_1(\bar{k}_1)} = \frac{k_2^* f_2'(k_2^*)}{q} - f_2(k_2^*).$$

Shunday qilib,

$$\frac{\partial c}{\partial q} = \frac{k_2^* f_2'(k_2^*)}{q} - f_2(k_2^*). \qquad (12.15)$$

Bundan $\frac{\partial c}{\partial q}=0$ tenglamani q ga nisbatan yechib topamiz:

$$q = \frac{k_2^* f_2'(k_2^*)}{f_2(k_2^*)}, \quad 0<q<1. \qquad (12.16)$$

(12.16) va (12.8)ning ikkinchi tenglamasiga ko‘ra $s=\bar{s}$, $k_1 = \bar{k}_1$ (bunda $\bar{k}_1$ – (12.11) tenglamaning yechimi) bo‘lganda $k_2$ga nisbatan quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{(1-\bar{s}) f_1(\bar{k}_1)}{\mu_2} = k_2 \left[-1 + \frac{f_2(k_2)}{k_2 f_2'(k_2)} \right]. \qquad (12.17)$$

Bu tenglamaning o‘ng tomoni ixtiyoriy $k_2>0$ uchun musbat, chunki neoklassik shartga asosan

$$\frac{f_2(k_2)}{k_2 f_2'(k_2)} > 1.$$

Tenglamaning chap tomoni esa musbat son. Endi (12.17) tenglama yagona musbat yechimga ega ekanini isbotlash qiyin emas. Avvalo (12.17)ni k_2 ga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin, chunki (12.17) o'ng tomonining k_2 bo'yicha hosilasi noldan farqli, aniqrog'i

$$\frac{d}{dk_2}\left[-k_2+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\right]=-\frac{f_2(k_2)f_2''(k_2)}{\left[f_2'(k_2)\right]^2}>0.$$

Shu bilan birga

$$\lim_{k_2\to+0}\left[-k_2+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\right]=0 \qquad (f_2(+0)=0,\ f_2'(+0)>0).$$

Yuqoridagi munosabatlardan (12.17)ning o'ng tomoni monoton o'suvchi va uning qiymati 0dan boshlab o'sib borib, biror $\bar{k}_2$ da chap tomonga teng bo'ladi.

Endi topilgan $\bar{k}_2$ ni (12.16)ga qo'yamiz:

$$\bar{q}=\frac{\bar{k}_2 f_2'(\bar{k}_2)}{f_2(\bar{k}_2)}, \qquad 0<\bar{q}<1. \tag{12.18}$$

Shunday qilib, (12.10) masala uchun $c(s,q)$ funksiyaning yagona statsionar nuqtasi $(\bar{s},\bar{q})\in P_2$ topildi. Shu nuqtada (12.10) masalaning yechimi mavjudligi sababli $c(s,q)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

Topilgan natijalarni teorema shaklida bayon qilamiz:

12.2-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* (12.1)–(12.4), (12.10) *modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\bar{s}$ *va mehnat resurslari optimal taqsimoti koeffitsienti* $\bar{q}$ mos ravishda (12.12) *va* (12.18) *formulalar yordamida hisoblanadi,* $\bar{k}_1$ – (12.11) *tenglamaning,* $\bar{k}_2$ *esa* (12.17) *tenglamaning musbat yechimlari.*

Endi "oltin qoida"ni chiqaramiz, (12.11)ga ko'ra:

$$\bar{s}\cdot F_1(\bar{L}_1,\bar{K}_1)=\frac{\partial F_1(\bar{L}_1,\bar{K}_1)}{\partial K_1}\cdot\bar{K}_1. \tag{12.19}$$

$F_1(L_1, K_1)$ IChFning chiziqli–bir jinsligiga ko'ra

$$\frac{\partial F_1}{\partial L_1} \cdot \bar{L}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial K_1} \cdot \bar{K}_1 = F_1 .$$

Bundan

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_1} \cdot \bar{K}_1 = F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial L_1} \cdot \bar{L}_1 .$$

Bu ifodani (12.19)ga qo'yamiz:

$$(1-\bar{s}) \cdot F_1(\bar{L}_1, \bar{K}_1) = \frac{\partial F_1(\bar{L}_1, \bar{K}_1)}{\partial L_1} \cdot \bar{L}_1 . \quad (12.20)$$

Endi (12.18)dan foydalanib, ushbu

$$\frac{\partial F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2)}{\partial K_2} \cdot \bar{K}_2 = \bar{q} \cdot F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2) \quad (12.21)$$

tenglikni hosil qilamiz. Nihoyat, $F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2)$ IChFning neoklassikligidan foydalanib, yana bir muhim

$$\frac{\partial F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2)}{\partial L_2} \cdot \bar{L}_2 = (1-\bar{q}) \cdot F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2) \quad (12.22)$$

tenglikni chiqaramiz.

Endi "oltin qoida"ni bayon qilish mumkin:

a) (12.19)ga ko'ra birinchi sektorga ajratiladigan mablag' shu sektorning kapitaldan oladigan daromadiga teng; ikkinchi sektorga ajratiladigan mablag' (12.20)ga ko'ra birinchi sektorning mehnatdan olgan daromadiga teng;

b) mehnat resurslari birinchi va ikkinchi sektorlar orasida ikkinchi sektorning kapitaldan hamda mehnatdan olgan daromadlariga proporsional qilib taqsimlanadi. Bu tasdiq (12.21) va (12.22) munosabatlardan kelib chiqadi.

Misol. IChFlar o'rnida ushbu $F_1 = a_1 K_1^{\alpha_1} L_1^{\beta_1}$, $F_2 = a_2 K_2^{\alpha_2} L_2^{\beta_2}$, $\alpha_i + \beta_i = 1$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ Kobb-Duglas funksiyalarini olaylik. Quyidagilarga egamiz:

$$f_1(k_1)=a_1 k_1^{\alpha_1}, \qquad f_1'(k_1)=a_1\alpha_1 k_1^{\alpha_1-1},$$

$$f_2(k_2)=a_2 k_2^{\alpha_2}, \qquad f_2'(k_2)=a_2\alpha_2 k_2^{\alpha_2-1}.$$

(12.11) tenglamani yozamiz: $a_1\alpha_1 k_1^{\alpha_1-1}=\mu_1$. Bundan $\bar{k}_1$ ni topamiz:

$$\bar{k}_1=\left(\frac{a_1\alpha_1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

(12.12) formula bo'yicha $\bar{s}=\alpha_1$. (12.17) tenglamani yozamiz:

$$\frac{1}{\mu_2}(1-\alpha_1)\frac{a_1\alpha_1}{\mu_1}=k_2\left[-1+\frac{k_2^{\alpha_2}}{k_2\alpha_2 k_2^{\alpha_2-1}}\right].$$

Bundan $\bar{k}_2$ ni topamiz:

$$\bar{k}_2=\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\mu_2(1-\alpha_2)}\cdot a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\mu_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}.$$

Endi (12.18) formula bo'yicha $\bar{q}$ ni hisoblaymiz

$$\bar{q}=\frac{\bar{k}_2\cdot f_2'(\bar{k}_2)}{f_2(\bar{k}_2)}=\frac{\bar{k}_2\cdot a_2\cdot\alpha_2\cdot\bar{k}_2^{\alpha_2-1}}{a_2\cdot\bar{k}_2^{\alpha_2}}=\alpha_2.$$

Shunday qilib, $\bar{s}=\alpha_1$, $\bar{q}=\alpha_2$. Kobb–Duglas funksiyasi uchun ko'rilgan misol quyidagi ancha aniqlashtirilgan "oltin qoida"ni chiqarishga imkon beradi:

a) birinchi sektorga ajratilgan mablag'lar birinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulotning α_1-qismini, ikkinchi sektorga ajratilgan mablag'lar birinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulotning β_1-qismini tashkil etadi;

b) birinchi sektorning mehnat resurslari hamma mehnat resurslarining α_2-qismini, ikkinchi sektorlar mehnat resurslari hamma mehnat resurslarining β_2-qismini tashkil etadi.

12.2-§. Mehnat resurslari hajmlari yig‘indisi eksponensial funksiya bo‘lgan ikki sektorli model

Iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modellarini mehnat resurslari hajmlari yig‘indisi *o‘zgarmas bo‘lmagan* holda o‘rganish shu yig‘indi *o‘zgarmas bo‘lgan* holidagiga qaraganda anchagina muhim hisoblanadi. Mazkur paragrafda mehnat resurslari hajmlari yig‘indisi eksponensial, ya’ni qavariq funksiya bo‘lgan holni ko‘ramiz. Faraz etaylik,

$$L_1(t)+L_2(t)=L(t) \text{ va } \dot{L}(t)=\eta\, L(t), \; \eta>0 \text{ (ya'ni } L(t)=L_0e^{\eta t}).$$

Bu mehnat resurslari hajmlari yig‘indisining o‘sish sur’ati o‘zgarmas ekanini anglatadi. Shunday qilib, iqtisodiy dinamikaning quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan ikki sektorli modelini ko‘ramiz:

$$\begin{cases} \dot{K}_1=s\cdot F_1(L_1,K_1)-\mu_1K_1, \quad 0<s<1, \quad 0<\mu_1<1, & (12.23)\\ \dot{K}_2=(1-s)F_1(L_1,K_1)-\mu_2K_2, \quad 0<\mu_2<1, & (12.24)\\ \dot{L}_1=\eta L, \quad L_1=q\,L, \quad L_2=(1-q)L, \quad 0<q<1, \quad q=const, & (12.25)\\ C=F_2(L_2,K_2), & (12.26)\\ c=\dfrac{C}{L}\to \max, \quad 0<s<1, \quad 0<q<1. & (12.27)\end{cases}$$

Mehnat resurslarining sektorlarga taqsimot koeffitsienti q o‘zgarmas va $0<q<1$ bo‘lgani uchun ushbu $\dot{L}_1=q\,\dot{L}$, $\dot{L}_2=(1-q)\,\dot{L}$ tengliklar o‘rinli. Endi differensial tenglamalarning asosiy sistemasini chiqaramiz. Uning uchun $\dot{k}_1$ va $\dot{k}_2$ larni hisoblaymiz:

$$\dot{k}_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{L_1}\right)=\frac{\dot{K}_1L_1-K_1\dot{L}_1}{L_1^2}=\frac{(sL_1f_1(k_1)-\mu_1K_1)L_1-K_1\dot{L}_1}{L_1^2}=$$

$$=s\,f_1(k_1)-(\mu_1+\eta)\,k_1,$$

$$\dot{k}_2=\frac{d}{dt}\left(\frac{K_2}{L_2}\right)=\frac{\dot{K}_2L_2-K_2\dot{L}_2}{L_2^2}=\frac{\left[(1-s)F_1-\mu_2K_2\right]L_2-K_2\dot{L}_2}{L_2^2}=$$

$$=\frac{(1-s)L_1 f_1(k_1)L_2}{L_2^2}-\mu_2 k_2-k_2\frac{\dot{L}_2}{L_2}=\frac{(1-s)qL}{(1-q)L}f_1(k_1)-$$

$$-\mu_2 k_2-k_2\frac{(1-q)\,q\dot{L}}{(1-q)L}=\frac{q(1-s)}{1-q}f_1(k_1)-(\mu_2+\eta)k_2.$$

Shunday qilib, differensial tenglamalarning asosiy sistemasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases}\dot{k}_1=s\,f_1(k_1)-(\mu_1+\eta)\,k_1\,,\\ \dot{k}_2=\dfrac{q(1-s)}{1-q}f_1(k_1)-(\mu_2+\eta)k_2\,.\end{cases}\qquad(12.28)$$

Biz ikkita differensial tenglamaning normal avtonom sistemasini hosil qildik. Bu sistema ixtiyoriy $k_1(0)=k_1^0>0$, $k_2(0)=k_2^0>0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega, chunki (12.28) sistemaning o'ng tomoni Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Aniqroq aytganda, (12.28) sistemaning o'ng tomoni k_1 va k_2 lar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi va bu Koshi teoremasining asosiy sharti edi.

12.3-teorema. *Agar iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modeli* (12.28) *uchun ushbu*

$$\mu_1+\eta<s\,f_1'(+0)\qquad(12.29)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (12.28) *sistema yagona musbat* (*sodda yechimdan boshqa*) *va asimptotik turg'un* (*muvozanat holatiga*) *statsionar yechimga ega bo'ladi* (12.1*-teoremaga taqqoslang*), *ya'ni* $k_1(t)\equiv k_1^*=k_1(s)$, $k_2(t)\equiv k_2^*=k_2(s,q)$, $0<q<1$, $0<s<1$.

Isbot. Mazkur teoremaning isboti 14.1-teoremaning isbotiga o'xshash. Shuning uchun mulohazalarni qisqacha olib boramiz. (12.28) sistemaning statsionar yechimlari ushbu

$$\begin{cases}s\,f_1(k_1)-(\mu_1+\eta)\,k_1=0\,,\\ \dfrac{q(1-s)}{1-q}f_1(k_1)-(\mu_2+\eta)k_2=0\end{cases}\qquad(12.30)$$

chekli sistemaning yechimi sifatida topiladi. Shu yechimni quyidagi $k_1(t) \equiv k_1^*(s)$, $k_2(t) \equiv k_2^*(s,q)$ ko'rinishda yozamiz. Statsionar yechim $0<s<1$, $0<q<1$ intervallarda har ikki sektorning balanslangan o'sish rejimlaridan iborat. Bunday rejimlar cheksiz ko'p. Ularning ichidan (12.27) belgi bo'yicha optimal rejimni ajratib olish lozim. Boshqacha aytganda, quyidagi masalani yechish kerak:

$$\begin{cases} c(s,q) = \dfrac{C}{L} = (1-q) f_2(k_2^*(s,q)) \to \max, \\ 0 < s < 1, \quad 0 < q < 1. \end{cases} \tag{12.31}$$

Avvalgi paragrafdan ma'lumki, $c(s,q)$ funksiya $P_2 .= \{(s,q): 0<s<1, 0<q<1\}$ ochiq kvadratda aniqlangan, uzluksiz differensiallanuvchi va $(\tilde{s}, \tilde{q}) \in P_2$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

12.4-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* ((12.23)– (12.27)) *modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\tilde{s}$ *va mehnat resurslarining optimal taqsimoti koeffitsienti* $\tilde{q}$ *quyidagi formulalar yordamida topiladi:*

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{k}_1 f_1'(\tilde{k}_1)}{f_1(\tilde{k}_1)}, \qquad \tilde{q} = \frac{\tilde{k}_2 f_2'(\tilde{k}_2)}{f_2(\tilde{k}_2)},$$

bunda $\tilde{k}_1$ *ushbu*

$$f_1'(k_1) - (\mu_1 + \eta) = 0$$

tenglamaning, $\tilde{k}_2$ *esa ushbu* ((12.17) *bilan taqqoslang*)

$$\frac{(1-\tilde{s}) f_1(\tilde{k}_1)}{\mu_2} = k_2 \left[-1 + \frac{f_2(k_2)}{k_2 f_2'(k_2)} \right]$$

tenglamaning yechimi.

"Oltin qoida" avvalgi paragrafdagi mazmunga ega.

12.3-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi chiziqli-botiq bo'lgan ikki sektorli model

Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi vaqt t, $t \in [0;T]$ ning chiziqli-botiq funksiyasi bo'lsin. Chiziqlilik $\dot{L}(t)$ ning $L(t)$ va $K(t)$ ga chiziqli bog'liqlini, ya'ni $\dot{L}(t)=\eta\, L(t)+\nu\, K(t)>0$, $\eta>0$, $\nu>0$ ni anglatadi. Botiqlik esa, $\dot{L}(t)$ funksiyaning botiqligini, ya'ni $\ddot{L}(t)<0$, $t\in[0;\mathrm{T}]$ ni anglatadi. Ravshanki

$$\ddot{L}(t)=\eta\,\dot{L}(t)+\nu\,\dot{K}(t)=\dot{L}(t)\left[\eta+\nu\frac{dK}{dL}\right].$$

12.1-lemma. *Agar $F_1(L_1, K_1)$ va $F_2(L_2,K_2)$ IChFlar izokvantalarida*

$$\frac{dK_1}{dL_1}<-\frac{\eta}{\nu}<0, \qquad \frac{dK_2}{dL_2}<-\frac{\eta}{\nu}<0 \tag{12.32}$$

tengsizliklar bajarilsa, unda $L(t)$ funksiya botiq bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, $L(t)=L_1(t)+L_2(t)$, $K(t)=K_1(t)+K_2(t)$, $\dot{L}(t)=\dot{L}_1(t)+\dot{L}_2(t)$, $\dot{K}(t)=\dot{K}_1(t)+\dot{K}_2(t)$. Shuning uchun

$$\ddot{L}(t)=\dot{L}_1(t)\left[\eta+\nu\frac{dK_1}{dL_1}\right]+\dot{L}_2(t)\left[\eta+\nu\frac{dK_2}{dL_2}\right].$$

Bundan (12.32)ga ko'ra, $\ddot{L}(t)<0$ tengsizlik kelib chiqadi.

Agar (12.32) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $L_1(t)$ va $L_2(t)$ funksiyalar ham botiq bo'lishi ravshan.

Endi iqtisodiy dinamikaning quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan ikki sektorli modelini ko'ramiz:

$$\begin{cases} \dot{K}_1=s\,F_1(L_1,K_1)-\mu_1K_1, \quad 0<s<1, \quad 0<\mu_1<1, & (12.33)\\ \dot{K}_2=(1-s)F_1(L_1,K_1)-\mu_2K_2, \quad 0<\mu_2<1, & (12.34)\\ \dot{L}_j=\eta L_j+\nu K_j, \quad j=1,2, \quad \dot{L}_1=q\dot{L}, \quad \dot{L}_2=(1-q)\dot{L}, & \\ \qquad L_1=qL, \quad L_2=(1-q)L, \quad 0<q<1, \quad q=const, & (12.35)\\ c=\dfrac{C}{L}\to\max, \quad 0<s<1, \quad 0<q<1. & (12.36) \end{cases}$$

Avvalgi paragrafdagiga o'xshash $\dot{k}_1$ va $\dot{k}_2$ larni hisoblab, quyidagi differensial tenglamalarning asosiy sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\, k_1 - \nu k_1^2, \\ \dot{k}_2 = \dfrac{q\,(1-s)}{1-q} \cdot f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\, k_2 - \nu\, k_2^2. \end{cases} \tag{12.37}$$

Bu sistema ixtiyoriy boshlang'ich shartlarni: $k_1(0) = k_1^0 > 0$, $k_2(0) = k_2^0 > 0$ qanoatlantiradigan yagona yechimga ega, chunki (12.37)-ning o'ng tomoni k_1, k_2 larga nisbatan uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgani uchun yagonalik haqidagi Koshi teoremasining shartlari bajariladi.

Keyingi mulohazalarda qulaylik bo'lishi uchun ushbu

$$\chi_1(k_1) = k_1 + \frac{\nu}{\mu_1 + \eta} k_1^2, \qquad \chi_2(k_2) = k_2 + \frac{\nu}{\mu_2 + \eta} k_2^2, \tag{12.38}$$

belgilashlarni kiritamiz. Natijada (12.37) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\, \chi_1(k_1), \\ \dot{k}_2 = \dfrac{q\,(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\, \chi_2(k_2). \end{cases} \tag{12.39}$$

Har ikki $\chi_1(k_1)$, $\chi_2(k_2)$ funksiya ham quyidagi shartlarni qanoatlantiradi (j=1, 2, «»k_j>0):

$$\chi_j(0) = 0, \quad \chi_j'(0) = 1, \quad \chi_j'(k_j) = 1 + \frac{2\nu\, k_j}{\mu_j + \eta} > 0, \quad \chi_j''(k_j) = \frac{2\nu}{\mu_j + \eta} > 0.$$

Bundan ko'rinadiki, $y = (\mu_1 + \eta)\, \chi_1(k_1)$, $y = (\mu_2 + \eta)\, \chi_2(k_2)$ funksiyalar monoton o'suvchi va qavariq. Grafiklari koordinata boshidan $\mu_1+\eta$ va $\mu_2+\eta$ burchak koeffitsientlar bilan chiqadi va I chorakda joylashgan.

Endi (12.39) asosiy sistemaning statsionar yechimlarini o'rganamiz.

12.5-teorema. *Agar* (12.39) *sistema uchun ushbu* ((12.29)*ga qarang*)

$$\mu_1 + \eta < s\, f_1'(+0) \tag{12.40}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda shu sistema yagona musbat va asimptotik turg‘un statsionar yechimga ega bo‘ladi, ya’ni

$$k_1(t) \equiv k_1(s)\,, \quad k_2(t) \equiv k_2(s,q)\,, \quad t \in [0;T]\,.$$

Isbot. Quyidagi chekli sistemani ko‘ramiz;

$$\begin{cases} s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1) = 0\,, \\ \dfrac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2) = 0\,. \end{cases} \tag{12.41}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasi (12.40)ga ko‘ra, $s\, f_1(k_1)$ ning neoklassikligi va $(\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1)$ funksiyaning qavariqligi uchun yagona musbat $k_1 = k_1(s)$ yechimga ega. (12.41)ning ikkinchi tenglamasi $k_1 = k_1(s)$ bo‘lganda ushbu

$$\frac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1(k_1(s)) = (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2)$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglamaning chap tomoni o‘zgarmas va musbat, o‘ng tomoni esa monoton o‘suvchi va $(\mu_2 + \eta)\,\chi_2(0) = 0$. Shu sababli oxirgi tenglama k_2 ga nisbatan yagona musbat $k_2 = k_2(s,q)$ yechimga ega. Shunday qilib, (12.41) chekli tenglamalar sistemasi yagona musbat (sodda k_2=0, k_2=0 yechimdan boshqa) yechimga ega. Bu esa, (12.39) asosiy sistema yagona musbat $k_1(t) \equiv k_1(s)$, $k_2(t) \equiv k_2(s,q)$, $t \in [0;T]$ statsionar yechimga ega ekanini anglatadi.

Endi shu yechim asimptotik turg‘un ekanini isbotlaylik. Qulaylik uchun ushbu

$$P(k_1,k_2) = s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1)\,,$$

$$Q(k_1,k_2) = \frac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2)\,,$$

belgilashlarni kiritamiz. $P(k_1,k_2)$ va $Q(k_1,k_2)$ funksiyalarning birinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial P}{\partial k_1} = s\, f_1'(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,\chi_1'(k_1)\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial k_2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_1}=\frac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1'(k_1)\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial k_2}=-(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2)\,.$$

Endi $k_1=k_1(s)$, $k_2=k_2(s,q)$ bo'lganda birinchi tartibli hosilalardan matritsa tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} s\,f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1) & 0 \\ \dfrac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1'(k_1) & -(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2) \end{pmatrix}.$$

A matritsaning xos sonlari manfiy va mos ravishda ushbu

$$\lambda_1=s\,f_1'(k_1(s))-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1(s))<0\,,$$

$$\lambda_2=-(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2(s,q))<0$$

sonlarga teng. Bu esa, Lyapunov-Puankare teoremasiga ko'ra $k_1(t)\equiv k_1(s)$, $k_2(t)\equiv k_2(s,q)$, $t\in[0;T]$ statsionar yechimning asimptotik turg'unligini anglatadi. 14.5-teorema isbot bo'ldi.

Ta'kidlab o'tamizki, statsionar yechim $P_2.=\{(s;q)\colon 0<s<1,\ 0<q<1\}$ ochiq kvadratda aniqlangan. Har bir $(s;q)\in P_2$ juftlikka bitta balanslangan o'sish rejimi mos keladi. Har bir sektor uchun bunday rejimlar cheksiz ko'p. Masala optimal rejimni topishdan iborat. Shu munosabat bilan ushbu

$$c(s,q)=\frac{C}{L}=(1-q)\,f_2(k_2(s,q))\rightarrow \max\,, \quad (s,q)\in P_2 \qquad (12.42)$$

masalani ko'ramiz. Bu masalaning yechimi mavjudligi avvalgi paragrafdagi shunga o'xshash masalaning yechimi mavjudligi isboti kabi olib boriladi. Biz P_2 ochiq kvadratning $c(s,q)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadigan nuqtasini topish bilan shug'ullanamiz. $c(s,q)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topish uchun yana barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz va nolga tenglashtiramiz, ya'ni $\partial c/\partial s=0$, $\partial c/\partial q=0$ sistemani yechamiz. $\partial c/\partial s$ hosila osongina topiladi:

$$\frac{\partial c}{\partial s}=(1-q)\,f_2'(k_2)\,\frac{\partial k_2}{\partial s}\,.$$

Endi (12.41) sistemaning ikkinchi tenglamasining ikkala tomonini

s bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{q}{1-q}\left[(1-s)\,f_1'(k_1)\,\frac{\partial k_1}{\partial s}-f_1(k_1)\right]-(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2)\,\frac{\partial k_2}{\partial s}=0\,.$$

Bu tenglamada $\partial k_1/\partial s$ va $\partial k_2/\partial s$ hosilalar ishtirok etgan. Ularning ifodasini topish kerak. Avvalo $\partial k_1/\partial s$ ni topish uchun (12.41) sistemaning birinchi tenglamasining ikkala tomonini s bo‘yicha differensiallaymiz:

$$f_1(k_1)+s\,f_1'(k_1)\,\frac{\partial k_1}{\partial s}-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)\,\frac{\partial k_1}{\partial s}=0\,.$$

Bundan $\partial k_1/\partial s$ uchun quyidagi ifodani chiqaramiz:

$$\frac{\partial k_1}{\partial s}=\frac{f_1(k_1)}{(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)-s\,f_1'(k_1)}>0\,,\qquad k_1=k_1(s)\,,\qquad k_2=k_2(s,q)\,.$$

Endi $\partial k_2/\partial s$ ni topsa bo‘ladi:

$$\frac{\partial k_2}{\partial s}=\frac{q\left(f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)\right)}{(1-q)(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2)}\,\frac{\partial k_1}{\partial s}\,,\qquad \frac{\partial k_1}{\partial s}=\frac{dk_1}{ds}\,.$$

$\partial k_2/\partial s$ uchun shu ifodani e’tiborga olgan holda $\partial c/\partial s=0$ tenglamaga ko‘ra k_1 ga nisbatan (s ga nisbatan emas) tenglama hosil qilamiz:

$$f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)=0\,. \tag{12.43}$$

Bu tenglama $f_1(k_1)$ va $\chi_1(k_1)$ funksiyalarning xossalariga ko‘ra yagona musbat $\tilde{\tilde{k}}_1>0$ yechimga ega. Endi $k_1=\tilde{\tilde{k}}_1$ ni (12.41) sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘yib, $\tilde{\tilde{s}}$ ni topamiz:

$$\tilde{\tilde{s}}=\frac{(\mu_1+\eta)\,\chi_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}{f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}\,.$$

Endi (12.43) tenglikdan foydalanib, $k_1=\tilde{\tilde{k}}_1$ bo‘lganda $\tilde{\tilde{s}}$ (jamg‘arish normasi) uchun chiroyli formula chiqaramiz:

$$\tilde{\tilde{s}}=\frac{f_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}{f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}\cdot\frac{\chi_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}{\chi_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}. \tag{12.44}$$

Shu $\tilde{\tilde{s}}$ miqdor $0<\tilde{\tilde{s}}<1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Haqiqatan, $f_1(k_1)>k_1 f_1'(k_1)$, $\chi_1(k_1)<k_1\chi_1'(k_1)$ tengsizliklarga ko'ra

$$0<\frac{k_1\, f_1'(k_1)}{f_1(k_1)}<1, \qquad 0<\frac{\chi_1(k_1)}{k_1\,\chi_1'(k_1)}<1$$

tengsizliklar o'rinli. Agar $\tilde{\tilde{s}}$ ni

$$\tilde{\tilde{s}}=\frac{\tilde{\tilde{k}}_1 f_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}{f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}\cdot\frac{\chi_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}{\tilde{\tilde{k}}_1\,\chi_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}$$

ko'rinishda yozsak, $0<\tilde{\tilde{s}}<1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Mulohazalarni davom ettiramiz. $\partial c/\partial q$ hosilani hisoblaymiz:

$$\frac{\partial c}{\partial q}=-f_2(k_2)+(1-q)\, f_2'(k_2)\frac{\partial k_2}{\partial q},$$

bunda

$$\frac{\partial k_2}{\partial q}=\frac{1}{q(1-q)}\cdot\frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{\partial c}{\partial q}=-f_2(k_2)+\frac{1}{q}\, f_2'(k_2)\cdot\frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}.$$

Endi $\partial c/\partial q=0$ tenglama q ni aniqlash uchun formulaga olib keladi:

$$q=\frac{f_2'(k_2)}{f_2(k_2)}\cdot\frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}.$$

Bu formulada hozircha k_2 noma'lum. (12.41) sistemaning ikkinchi tenglamasiga $s=\tilde{\tilde{s}}_1$, $k=\tilde{\tilde{k}}_1$ bo'lganda q ning ifodasini qo'yamiz. Natijada k_2 ga nisbatan tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{1-\tilde{\tilde{s}}}{\mu_2+\eta}f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)=\chi_2(k_2)\cdot\left[-1+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\cdot\frac{\chi_2'(k_2)}{\chi_2(k_2)}\right]. \tag{12.45}$$

(12.45) tenglama yagona musbat $\tilde{\tilde{k}}_2$ yechimga ega. Haqiqatan, shu tenglama chap tomonida musbat son turibdi. O'ng tomoni esa, $k_2\to+0$ da nolga intiladi va monoton o'suvchi funksiya. Monoton o'suvchiligi quyidagi tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$\frac{d}{dk_2}\chi_2(k_2)\cdot\left[-1+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\cdot\frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}\right]=\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\chi_2''(k_2)-\frac{f_2(k_2)\chi_2'(k_2)}{[f_2'(k_2)]^2}f_2''(k_2)>0.$$

Shuning uchun (12.45)ning o'ng tomoni 0 dan boshlab monoton o'sib borib, biror $\tilde{\tilde{k}}_2>0$ da chap tomoniga tenglashadi. Endi $k_2=\tilde{\tilde{k}}_2$ bo'lganda q uchun uzil-kesil formulaga ega bo'lamiz:

$$\tilde{\tilde{q}}=\frac{f_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}{f_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}\cdot\frac{\chi_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}{\chi_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}. \tag{12.46}$$

Ravshanki, $0<\tilde{\tilde{q}}<1$. Bunga ishonch hosil qilish uchun (12.46)ni

$$\frac{\tilde{\tilde{k}}_2 f_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}{f_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}\cdot\frac{\chi_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}{\tilde{\tilde{k}}_2\chi_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}$$

ko'rinishda yozish kerak. Shunday qilib, qo'yilgan masala uchun yagona $(\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{q}})$, $0<\tilde{\tilde{s}}<1$, $0<\tilde{\tilde{q}}<1$ statsionar nuqta topildi. Shu sababli jon boshiga iste'mol funksiyasi $c(s,q)$ xuddi shu $(\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{q}})\in P_2$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Shunday qilib, yuqoridagi mulohazalar quyidagi teoremani isbot etadi.

12.6-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* (12.33)– (12.36) *ikki sektorli modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\tilde{\tilde{s}}$ *va mehnat resurslari optimal taqsimot koeffitsienti* $\tilde{\tilde{q}}$ *mos ravishda* (12.44), (12.46) *formulalar yordamida topiladi, bunda* $\tilde{\tilde{k}}_1$ *son* (12.43) *tenglamaning,* $\tilde{\tilde{k}}_2$ *son esa* (12.45) *tenglamaning musbat yechimidan iborat.*

Ko'rilayotgan model uchun avvalgi paragraflardagi kabi "oltin qoida"ni chiqarish mumkin edi. Bu ishni mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

12-bobga oid masalalar

I. O'rtacha mehnat unumdorligi quyidagi ko'rinishlarda bo'lganda (12.5), (12.28) modellar uchun mos ravishda s, q, k_1, k_2, va $\bar{s}$, $\bar{q}$, $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ parametrlar hisoblansin:

1. $f_1(k_1)=\sqrt{k_1}$, $f_2(k_2)=2\sqrt{k_2}$.

2. $f_1(k_1)=\sqrt[3]{k_1^2}$, $f_2(k_2)=3\cdot\sqrt[3]{k_2^2}$

3. $f_1(k_1)=\sqrt[3]{k_1}$, $f_2(k_2)=2\cdot\sqrt[3]{k_2}$

4. $f_1(k_1)=\sqrt[4]{k_1}$, $f_2(k_2)=4\cdot\sqrt[4]{k_2}$

5. $f_1(k_1)=\sqrt[4]{k_1^3}$, $f_2(k_2)=2\cdot\sqrt[4]{k_2^3}$

6. $f_1(k_1)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{k_1}+1\right)^2$, $f_2(k_2)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{k_2}+1\right)^2$

II. (12.5) modelni Kobb-Duglas funksiyasi uchun yozilsin va $\bar{k}_1$ ni topiladigan tenglama yechilsin. $\bar{k}_1$ orqali $\bar{s}$ ni topilsin.

III. (12.28) modelni Solou funksiyasi uchun yozilsin va $\bar{k}_1$, $\bar{s}$ lar topilsin.

IV. (12.5) modelni Solou funksiyasi uchun yozilsin hamda $\bar{k}_1$, $\bar{s}$ lar topilsin.

12-bobga oid nazorat savollari

1. Iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modelida sektorlar orasida qanday bog'lanish bor?

2. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi o'zgarmas bo'lgan ikki sektorli model tavsifini bering.

3. Differensial tenglamalarning asosiy sistemasini yozib bering.

4. Statsionar yechimni topish uchun chekli tenglamalar sistemasini yozib bering.

5. Jon boshiga iste'molni maksimallashtirish masalasi qanday qo'yiladi?

6. Optimal jamg'arish normasi va mehnat resurslarining sektorlar orasida optimal taqsimot koeffitsienti uchun formulani yozib bering.

7. Balanslangan o'sishning optimal rejimlarini topish uchun tenglamalarni yozib bering.

8. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi eksponensial funksiya bo'lgan ikki sektorli model tavsifini bering.

9. Shu model uchun 3—7 savollarga javob bering.

13-BOB. IQTISODIY DINAMIKANING O'ZGARUVCHI JAMG'ARISH NORMALI MODELLARI VA MAGISTRAL TEOREMALAR

Avvalgi 10-,11– va 12-boblarda iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normali bir va ikki sektorli modellarini o'rgandik. Ma'lum bo'ldiki, balanslangan o'sishning optimal rejimlari qurollanganlik k ning $[0;T]$ vaqt oralig'ida o'zgarmas bo'lgan holatini aks ettiradi. Shu asosda iqtisodiyotning barcha o'zgaruvchilari (iqtisodiyot traektoriyasi) kechishini kuzatish imkoni yaratildi. Agar jamg'arish normasi o'zgarmas emas, balki o'zgaruvchi bo'lsa, $[0;T]$ vaqt oralig'ining har bir momentida o'z qiymatini o'zgartirib tursa, amalda bunday iqtisodiyotni (iqtisodiy jarayonni) boshqarib bo'lmaydi. Shuning uchun o'zgaruvchi jamg'arish normali modellarni o'zgarmas jamg'arish normali modellarga "yaqinlashtiradigan" yangi modellarni yaratish zaruriyati tug'iladi. Bunday yangi modellar "magistral teoremalar" yordamida tavsiflanadi.

Iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normali modellari birinchi bo'lib 1967-yilda R.Shell tomonidan o'rganilgan. U akademik L.S.Pontryagin va uning shogirdlari tomonidan yaratilgan optimal boshqaruv nazariyasidan keng foydalandi. Mazkur bobda biz iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normali bir sektorli modelini o'rganish natijalarini bayon etamiz.

Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya bo'lgan modelini ko'ramiz.

13.1-§. Masalalarning qo'yilishi

Iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normali bir sektorli modelini ko'raylik. Unda mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya va asosiy fondlarning yaroqsizlanishi chiziqli bo'lsin. Bunday model quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadi:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{K}(t)=I(t)-\mu K(t), \quad 0\le\mu<1, \quad K(0)=K_0>0,\\
&\dot{L}(t)=\eta L(t), \quad \mathrm{L}(0)=\mathrm{L}_0>0, \quad \eta>0,\\
&\mathrm{Y}(t)=F(L(t),K(t))=I(t)+C(t)=s(t)Y(t)+(1-s(t))Y(t),\\
&I(t)=s(t)Y(t), \quad C(t)=(1-s(t))Y(t), \quad 0\le s(t)\le 1, \quad 0\le t\le T.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

(13.1) modelga ko‘ra ishlab chiqarilgan mahsulot (milliy daromad) miqdori ikki qismdan iborat; $I(t)$ — asosiy fondlarga qo‘yilgan (qo‘yiladigan) mablag‘ (kapital) va $S(t)$ — iste’mol, jamg‘arish normasi $s(t)$ funksiya bo‘lakli-uzluksiz, $[0;T]$ vaqt oralig‘ida aniqlangan va $0 \le s(t) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Masala bo‘lakli-uzluksiz va $0 \le s(t) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $s(t)$ funksiyalar ichidan ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot (milliy daromad) miqdorini *ma’lum ma’noda* optimal ikki qismga (I va C ga) ajratadiganini topishdan iborat.

Qurollanganlik $k(t) = K(t)/L(t)$ va jamg‘arish normasi $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$, $t \in [0;T]$ bo‘lsin. Asosiy differensial tenglama (13.1) model uchun quyidagi ko‘rinishga ega (12-bobga qarang):

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k) - (\mu + \eta) k, \quad k(0) = k_0, \tag{13.2}$$

bunda $f(k)$ — neoklassik shartlarni qanoatlantiradigan o‘rtacha mehnat unumdorligi funksiyasi ($f(0)=0$, $f(k)>0$, $f'(k)>0$, $f''(k)<0$, $\forall k>0$). T — rejalashtirish ufqi va $k_T>0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan, qurollanganlikning biror holatini anglatuvchi son. Ushbu

$$k_0 < k_T \tag{13.3}$$

tengsizlik muhim ahamiyatga ega. Yana

$$k(T) \ge k_T \tag{13.4}$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plami M va ushbu

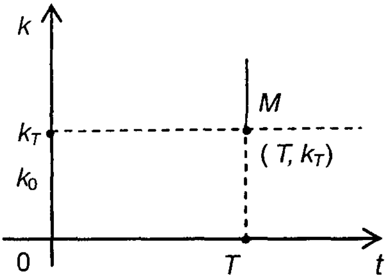
$$J[s] = \int_0^T \frac{C(t)}{L(t)} dt = \int_0^T (1 - s(t)) f(k(t)) dt \tag{13.5}$$

jamlama iste’mol funksionali berilgan bo‘lsin.

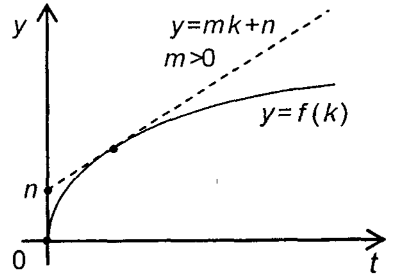
(13.4) tengsizlik bilan aniqlanadigan M to‘plam (T, k_T) nuqtadan chiqadigan va yuqoriga yo‘nalgan (vertikal) nurdan iborat (13.1-chizma). O‘zgaruvchi jamg‘arish normasi $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$ boshqaruv funksiyasi vazifasini bajaradi. Agar shu funksiya ixtiyoriy qiymatlar qabul qilsa, bitta boshlang‘ich $k_0>0$ nuqtadan chiqadigan barcha holatlar traektoriyalari oxirlari M to‘plamni tashkil etadi. Uni oxirgi holatlar to‘plami deyiladi.

Masalaning qo‘yilishini bayon qilishdan avval optimal boshqarishga oid ba’zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz.

Avvalo (13.2) da $s(t)$ funksiyani boshqaruv deb ataladi. Agar $s(t)$ bo‘lakli-uzluksiz bo‘lib, $[0;T]$ da $0 \le s(t) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantirsa, uni joiz boshqaruv deyiladi. Agar $s(t)$ joiz boshqaruv uchun (13.2)ning



13.1-chizma



13.2-chizma

traektoriyasi $k(0)=k_0$ va $k(t)\in M$ shartni qanoatlantirsa, uni obyektni (iqtisodiy sistemani) k_0 boshlang'ich nuqtadan $k(T)\in M$ nuqtaga o'tkazuvchi joiz boshqaruv deyiladi.

Endi masalaning qo'yilishini bayon qilish mumkin.

Masalaning qo'yilishi: (13.2)– (13.5) obyektni (iqtisodiy sistemani) qurollanganlikning boshlang'ich holati $k_0>0$ dan M to'plamning (nurning) biror $k(T)$ nuqtasiga o'tkazuvchi bo'lakli-uzluksiz boshqaruvlar $s(t)$, $0\le s(t)\le 1$ ichidan (13.5) jamlama iste'mol funksionaliga maksimal qiymat beradigani topilsin.

13.2-§. Masala yechimining mavjudligi

Qo'yilgan masala optimal boshqaruvning *o'ng uchi qo'zg'aluvchi* va tayin vaqtli masalasidan iborat. Shu masala uchun optimallikning zaruriy shartini ifodalaydigan Pontryaginning maksimum prinsipi ifodasini keltiramiz (qarang: Pontryagin L.S. va boshqalar. "Математическая теория оптимальных процессов", М.: Наука, 1983, стр.79).

13.1-teorema (zaruriy shart). *Faraz etaylik, n o'lchovli Yevklid fazosi E^n da harakat tenglamasi*

$$\dot{k}=A(k,t)+B(k,t)\cdot s(t) \quad (=f), \tag{13.6}$$

va optimallik belgisi

$$J[s]=\int_0^T[A_0(k,t)+B_0(k,t)\cdot s(t)]\,dt \quad \left(=\int_0^T f^0 dt\right) \tag{13.7}$$

berilgan bo'lsin. Bunda A, B, A_0, B_0 matritsalar E^{n+1} dagi C^1 sinfga

tegishli va $s(t) \in U$, U — *qavariq kompakt.*

Gamiltonianni

$$H(\overline{\psi},k,t,s)=\psi_0 f^0(k,t,s)+(\psi,f(k,t,s)),\quad \overline{\psi}=(\psi_0,\psi) \tag{13.8}$$

va qovushgan sistemani

$$\dot{\psi}_0=0,\qquad \dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial k_i}=-\psi_0\frac{\partial f^0}{\partial k_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f^j}{\partial k_j}\psi_j \tag{13.9}$$

tuzamiz.

Agar holat nuqtasini (qurollanganlik holatini) boshlang'ich $k_0>0$ *holatdan* $M=\{(t;k):\ t>T,\ k(T)\geq k_T,\ k_T>0,\ k_0<k_T\}$ *to'plamning biror nuqtasiga o'tkazuvchi joiz boshqaruv* (13.7) *funksionalning maksimumi ma'nosida optimal bo'lsa, unda* (13.9) *qovushma sistemaning shunday nolmas yechimi* $\overline{\psi}(t)$ *mavjud bo'ladiki, quyidagi shartlar bajariladi:*

1^0. *H funksiya ixtiyoriy* $t>0$ *uchun s bo'yicha* $s=s(t)\in U$ *nuqtada maksimumga erishadi:*

$$H(\overline{\psi}(t),k(t),t,s(t))=\max_{s\in U}H(\overline{\psi}(t),k(t),t,s). \tag{13.10}$$

2^0. $t=T$ *da o'ng uchda transversallik sharti bajariladi, ya'ni*

$$\psi(t)\geq 0,\qquad (\psi(T),\quad k(T)-k_T)=0. \tag{13.11}$$

$$3^0.\ \psi_0=const\geq 0\ . \tag{13.12}$$

Optimallikning yetarli sharti sifatida biz Li-Markus teoremasidan foydalandik (qarang: Ли Е.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, стр. 288 — 4-teoremaning 2-natijasi). Ko'rilayotgan iqtisodiy masalani e'tiborga olgan holda bu teorema quyidagicha ifodalanishi mumkin.

13.2-teorema (Li-Markus teoremasi). Harakat tenglamasi (13.6) va optimallik belgisi (13.7) berilgan bo'lsin. Yana ushbu

$$|k(t)|\leq b,\qquad \approx t\in[0;T]$$

tekis baho mavjud va tayinlangan k hamda t lar uchun

$$V(k,t)=\{\,(f^0(k,t,s),f(k,t,s)):\ s\in U\,\}$$

to'plam s bo'yicha qavariq bo'lsin, bunda $f^0=A_0+B_0s$, $f=A+Bs$.

Agar (13.6) obyektni berilgan boshlang'ich k_0 holatdan M to'plamning biror nuqtasiga o'tkazuvchi hech bo'lmasa bitta joiz boshqaruv mavjud bo'lsa, unda (13.7) funksionalning maksimumi ma'nosida optimal boshqaruv s(t) ham mavjud bo'ladi.

(13.2)– (13.5) obyekt uchun Li-Markus teoremasining shartlari bajariladi. Bunga bevosita teorema shartlarini tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Shuning uchun qo'yilgan masalaning yechimi mavjud bo'ladi.

13.3-§. Masala yechimini qurish

Endi qo'yilgan masala yechimini qurishga kirishamiz. Buning uchun boshlang'ich k_0 nuqtadan chiqadigan va M nurning biror nuqtasiga olib keladigan shunday traektoriya qurish kerak bo'ladiki, shu traektoriya bo'ylab jamlama iste'mol funksionali (13.5) o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak, bo'lakli-uzluksiz $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$ boshqaruvlar ichidan optimal boshqaruvni topish kerak bo'ladi. Masalani yechishga quyidagicha yondashamiz: avval Pontryaginning maksimum prinsipini qanoatlantiradigan boshqaruvni va unga mos traektoriyani topamiz. So'ngra topilgan boshqaruv va traektoriyalarning (13.5) funksional maksimumi ma'nosida optimalligini isbot etamiz.

Maksimum prinsipini qanoatlantiradigan holatlar traektoriyasini quramiz. Gamilton funksiyasini tuzamiz:

$$H = \psi_0(1-s)f(k) + \psi\cdot[\,s\,f(k) - (\mu+\eta)\,k\,]. \tag{13.13}$$

Yordamchi funksiyalar uchun *qovushma* sistema quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \psi_0 = const \ge 0, \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial k} = -\psi_0(1-s)f'(k) + \psi\cdot[\,s\,f'(k) - (\mu+\eta)]. \end{cases} \tag{13.14}$$

O'ng uchdagi transversallik sharti $\psi(T)(k(T) - k_T) = 0$ tenglik bilan ifodalanadi. Undan (13.4)ga ko'ra

$$\psi(T) = 0 \tag{13.15}$$

tenglik kelib chiqadi.

H funksiyaning s bo'yicha maksimumga erishishi shartidan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \psi - \psi_0 < 0, \\ 1, & \text{agar } \psi - \psi_0 > 0, \\ 0 \le s \le 1, & \text{agar } \psi - \psi_0 \equiv 0. \end{cases} \tag{13.16}$$

Ta'kidlab o'tamizki, maksimum prinsipiga ko'ra $\psi_0 = const \ge 0$. ψ_0

$=0$ bo'lsin. Unda $\psi-\psi_0 \equiv 0$ bo'ladigan $[\tau_1; \tau_2] \subset [0; T]$ kesma mavjud emas. Agar $\psi-\psi_0 \equiv 0$, $\forall t \in [\tau_1; \tau_2]$ bo'lsa, $\psi \equiv \psi_0 = 0$ bo'ladi. Ammo ψ_0 va $\psi(t)$ lar maksimum prinsipiga ko'ra bir vaqtda nolga teng bo'la olmaydi. Shuning uchun $\psi_0 \geq 0$ ga asosan ψ_0 deb $\psi_0 = 1$ ni olish mumkin. Shunday qilib, (13.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \psi < 1, \\ 1, & \text{agar } \psi > 1, \\ 0 \leq s \leq 1, & \text{agar } \psi \equiv 1. \end{cases} \tag{13.17}$$

Agar $[\tau_1; \tau_2] \subset [0; T]$ kesmada $\psi(t) \equiv 1$ ayniyat o'rinli bo'lsa, (13.14) dan ushbu

$$f'(k) = \mu + \eta \tag{13.18}$$

ayniyat kelib chiqadi. Bu ayniyat t ga oshkor bog'liq emas, shuning uchun k ga nisbatan tenglama deb qarash mumkin. Ravshanki, $f'(k) = \mu + \eta$ tenglama yagona musbat $k = \bar{k}$ yechimga ega. Shunday qilib, (13.2) tenglama $[\tau_1, \tau_2]$ kesmada yagona musbat statsionar yechim $k(t) = \bar{k} > 0$ ga ega. Unga mos jamg'arish normasining (boshqaruvning) o'zgarmas $\bar{s}$ qiymati ushbu

$$\bar{s} = \frac{(\mu+\eta)\bar{k}}{f(\bar{k})} = \frac{\bar{k}\, f'(\bar{k})}{f(\bar{k})} \tag{13.19}$$

formula bilan topiladi. $f(k)$ funksiyaning neoklassikligidan (ya'ni $f(k) - k f'(k) > 0$, $\subset k > 0$) $0 < \bar{s} < 1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Demak, $\psi(t) \equiv 1$ bo'ladigan $[\tau_1, \tau_2]$ kesmada jamg'arish normasi qiymati *o'zgarmas* va (13.19) formula yordamida bir qiymatli topiladi. Shunday qilib, $s(t)$ uchun (13.17) munosabatlarni uzil-kesil quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \psi < 1, \\ 1, & \text{agar } \psi > 1, \\ \bar{s} = \bar{k}\, f'(\bar{k}) / f(\bar{k}), & \text{agar } \psi \equiv 1. \end{cases} \tag{13.20}$$

Endi $\psi_0 = 1$ bo'lganda (13.14) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\dot{\psi} = -(1-s) f'(k) - [\, s\, f'(k) - (\mu + \eta)]\, \psi\,. \tag{13.21}$$

Transversallik sharti (13.15)ga ko'ra $\psi(T)=0<1$ kelib chiqadi. Shuning uchun (13.20)dan $s(T)=0$ bo'ladi. $\psi(t)$ funksiyaning uzluksizligi bo'yicha shunday $[\tau_1;T]$ kesma mavjudki, unda $\psi(T)<1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikki hol yuz berishi mumkin;

A) $\psi(t)<1$ va $[\tau_1;T]=[0;T]$;

B) $\psi(t)<1$, $t\in(\tau_1;T]=[0;T]$; $\psi(\tau_1)=1$, $[\tau_1;T]\subset[0;T]$.

A) holida (13.20)ga ko'ra $s(t)\equiv 0$, $\forall\, t\in[0;T]$, ya'ni barcha resurslar iste'molga yo'llangan va kapital xarajatlarga resurslar ajratilmagan. Resurslarni bunday taqsimlash faqat matematik ma'noga ega, ammo iqtisodiy ma'noga ega emas. Shuning uchun bu holni ko'rmaymiz.

B) holida (13.20)ga asosan $s(t)\equiv 0$, $\forall\, t\in[\tau_1;T]$. Unda (13.21) quyidagicha yoziladi:

$$\dot\psi=-f'(k)+(\mu+\eta)\psi\,. \tag{13.22}$$

Bundan (13.15) transversallik shartini e'tiborga olib, (13.21) differensial tenglamani integrallaymiz:

$$\psi=\int_t^T f'(k(t))\cdot e^{(\mu+\eta)(t-\tau)}d\tau\,, \tag{13.23}$$

bunda $k(t)$ ushbu

$$\dot k=-(\mu+\eta)k \tag{13.24}$$

differensial tenglamaning yechimi, $k(T)=k_T$. Bu yechim quyidagi ko'rinishga ega:

$$k(t)=k_T\cdot e^{(\mu+\eta)(T-t)}\,. \tag{13.25}$$

Endi $yy(\tau_1)=1$ bo'lgani uchun $s(\tau_1)=\bar s$ va $k(\tau_1)=\bar k$. Shuning uchun (13.25)dan $\tau=\tau_1$ da

$$k_T\cdot e^{(\mu+\eta)(T-\tau_1)}=\bar k\,.$$

kelib chiqadi. Bundan

$$T-\tau_1=\frac{1}{\mu+\eta}\cdot\ln\frac{\bar k}{k_T}$$

kelib chiqadi. Shunday qilib, $\tau_1<T$ ga ko'ra

$$k_T<\bar k \tag{13.26}$$

tengsizlikka erishamiz. Bu tengsizlik qurollanganlikning rejalashtirilayotgan potensiali qurollanganlikning statsionar rejimdagi (balanslangan o'sish rejimidagi) iqtisodiy potensialidan kam bo'lishi kerakligini anglatadi. Bundan tashqari ushbu

$$\tau_1 = T - \frac{1}{\mu+\eta} \cdot \ln\frac{\bar{k}}{k_T} > 0 \tag{13.27}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun rejalashtirish ufqi $T>0$ yetarli katta bo'lishi kerak.

(13.22)ga ko'ra $t>\tau_1$ miqdor $\psi(\tau)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi. Haqiqatan,

$$\dot{\psi}(\tau_1) = -f'(k(\tau_1)) + (\mu+\eta)\,\psi(\tau_1) = -f'(\bar{k}) + (\mu+\eta)\,.$$

Shunday qilib, $\psi(t)$ funksiya $t=\tau_1$ nuqtada ekstremumga ega bo'lishi mumkin. Haqiqatda ham shu funksiya $t=\tau_1$ da o'zining mahalliy maksimumiga erishadi. Buni ko'rsatish uchun $\ddot{\psi}$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{\psi} = -f''(k)\,\dot{k} + (\mu+\eta)\,\dot{\psi}\,.$$

Bundan $f''(\bar{k})<0$, $\dot{k}(\tau_1) = -(\mu+\eta)\bar{k} < 0$, $\dot{\psi}(\tau_1)=0$ munosabatlarga ko'ra $\ddot{\psi}(\tau_1)<0$ kelib chiqadi. Shuni isbot etish talab qilingan edi. Yuqoridagi mulohazalar natijasida $\psi(t)\leq 1$, $\forall\, t\in[\tau_1;T]$ tengsizlikka ega bo'ldik.

Endi rejalashtirish davrining boshida resurslarning taqsimoti bilan shug'ullanamiz. Boshlang'ich vaqt $t = 0$ da uch hol yuz berishi mumkin:

a) $\psi(0)=1$; b) $\psi(0)<1$; d) $\psi(0)>1$.

Ularni alohida-alohida o'rganamiz:

a) hol. $\psi(0)=1$ bo'lganda o'z navbatida uchta kichik hol yuz berishi mumkin.

1) $\psi(t)\equiv 1$, $t\in[0;\tau_1]$. Unda (13.18)ga ko'ra $k(t)=\bar{k}$ ayniyat o'rinli. Bundan $k_0=\bar{k}$ kelib chiqadi. Ammo (13.3) va (13.26) shartlarga ko'ra $k_0<\bar{k}$ tengsizlik o'rinli. Bu $k_0=\bar{k}$ ga ziddiyat. Demak, bu hol yuz bermaydi.

2) $\psi(0)=1$, $\psi(t)<1$ ($\psi(t)>1$), $\forall\, t\in(0;\tau_0)$. Bu hol b) va d) hollarda keltiriladi.

b) hol. $\psi(0)<1$. Bunda yoki $\psi(t)<1$, $\forall\, t\in[0;T]$, yoki shunday son

$\tau_0>0$ mavjud bo‘ladiki, $\psi(\tau_0)=1$, $0<\tau_0<\tau$ bo‘ladi. Agar $\psi(t)<0$, $\forall\, t\in[0;T]$ bo‘lsa, (13.20)ga asosan $s(t)\equiv 0$ bo‘ladi, ya’ni barcha resurslar iste’molga ajratiladi. Yuqorida aytganimizdek, bu holning iqtisodiy ma’nosi yo‘q. Agar shunday $\tau_0>0$ son mavjud bo‘lsaki, $\psi(\tau_0)=1$ bo‘lsa, $[0;\tau_0]$ kesmada $s(t)\equiv 0$ ga ega bo‘lamiz. Unda $\psi(t)$ uchun mos tenglama (13.22) bilan, qurollanganlik $k(t)$ uchun esa – (13.24) tenglama bilan ustma-ust tushadi. Endi (13.24) tenglamaning $k(0)=k_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechimini topish uchun uni integrallab topamiz:

$$k(t)=k_0\, e^{-(\mu+\eta)t}. \tag{13.28}$$

Bundan $t=\tau_0$ da $\psi(\tau_0)=1$, $k(\tau_0)=\bar{k}$ tengliklar o‘rinli bo‘lgani uchun $\bar{k}=k_0\cdot e^{-(\mu+\eta)\tau_0}$ tenglikka egamiz. Uning ikki tomonini logarifmlab, τ_0 uchun quyidagi formulani chiqaramiz:

$$\tau_0=\frac{1}{\mu+\eta}\cdot\ln\frac{k_0}{\bar{k}}. \tag{13.29}$$

Bundan $\tau_0>0$ bo‘lgani uchun $k(0)>\bar{k}$ tengsizlik chiqadi. Ammo bu $k_0<\bar{k}$ tengsizlikka zid. Shunday qilib, b) hol ham sodir bo‘la olmaydi.

d) hol. $\psi(0)>1$. Bu holda yoki $\psi(t)>1$, $\forall\, t\in[0;T]$, yoki shunday $\tau_0>0$ son mavjud bo‘ladiki, $\psi(\tau_0)=1$ bo‘ladi. Agar $\psi(t)>1$, $t\in[0;T]$ bo‘lsa, (13.20)ga ko‘ra $s(t)\equiv 1$, $t\in[0;T]$, ya’ni barcha resurslar butun rejalashtirish davrida kapital xarajatga ajratiladi. Bu esa iqtisodiy ma’noga ega emas. Agar shunday $\tau_0>0$ son mavjud bo‘lsaki, $\psi(\tau_0)=1$ bo‘lsa, $s(t)\equiv 1$, $\forall\, t\in[0;\tau_0]$ bo‘ladi. Bu holda (13.2) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\dot{k}=f(k)-(\mu+\eta)k. \tag{13.30}$$

Biz o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga egamiz. Uni $k(0)=k_0$ boshlang‘ich shart uchun integrallaymiz:

$$t=\int_{k_0}^{k(t)}\frac{d\xi}{f(\xi)-(\mu+\eta)\xi}.$$

Ushbu $\psi(\tau_0)=1$, $k(\tau_0)=\bar{k}$ tengliklarni e’tiborga olib, τ_0 uchun formula chiqaramiz:

$$\tau_0 = \int_{k_0}^{\bar{k}} \frac{d\xi}{f(\xi)-(\mu+\eta)\xi}. \qquad (13.31)$$

Ma'lumki, $k < \bar{k}$ da $f(k)-(\mu+\eta)k < 0$ tengsizlik o'rinli. Shuning uchun (13.31)dan $\tau_0 > 0$ kelib chiqadi.

Endi $k(t)$ funksiya τ_0 nuqtada mahalliy maksimumga erishishini ko'rsatamiz. Haqiqatan,

$$\dot{k}(\tau_0) = f(\bar{k})-(\mu+\eta)\bar{k} = f(\bar{k}) - f'(\bar{k})\cdot\bar{k} > 0$$

(bunda $\dot{k}_-(\tau_0)$ – $k(t)$ funksiyaning τ_0 nuqtadagi chap hosilasi). Agar $t > tt_0$ da $k(t) \equiv \bar{k} = const$ ayniyatni e'tiborga olsak, $\dot{k}_+(\tau_0) = 0$ bo'ladi ($\dot{k}_+(\tau_0)$ –$k(t)$ funksiyaning τ_0 nuqtadagi o'ng hosilasi). Ushbu munosabatlar $\dot{k}_-(\tau_0) > 0$, $\dot{k}_+(\tau_0) = 0$, $k(t) \equiv \bar{k} = const$, $t > \tau_0$ $k(t)$ funksiya uchun mahalliy maksimum nuqtasi ekanini ko'rsatadi.

$\psi(t)$ funksiya uchun $s=1$ bo'lganda (13.21) dan

$$\dot{\psi} = \left[(\mu+\eta) - f'(k)\right]\psi(t)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi. Bundan $f'(k(\tau_0)) = f'(\bar{k})$, $\psi(\tau_0)=1$ munosabatlarni e'tiborga olib, ushbu

$$\dot{\psi}(\tau_0) = \left[(\mu+\eta) - f'(\bar{k})\right]\cdot 1 = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu esa, $\psi(t)$ funksiya $t=\tau_0$ da ekstremumga ega bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi. $\psi(t)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$\ddot{\psi} = f''(\bar{k})\,\dot{k}\,\psi + \left[(\mu+\eta) - f'(k)\right]\dot{\psi}.$$

Bundan $t=\tau_0$ da quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ddot{\psi}(\tau_0) = -f''(\bar{k})\left[f(\bar{k}) - (\mu+\eta\,\bar{k})\right]\psi(\tau_0) - f'(\bar{k})\,\dot{\psi}(\tau_0) =$$

$$= -f''(\bar{k})\left[f(\bar{k}) - (\mu+\eta)\,\bar{k})\right].$$

Ushbu $f(\bar{k})-(\mu+\eta)\bar{k} = f(\bar{k}) - f'(\bar{k})\bar{k} > 0$, $f''(\bar{k}) < 0$ munosabatlarga ko'ra $\ddot{\psi}(\tau_0) > 0$ tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun $\psi(t)$ funksiya $t=\tau_0$ nuqtada mahalliy minimumga ega va $t \in [0;\, \tau_0]$ da $\psi(t) \geq 1$.

Shunday qilib, biz τ_0 ((13.31)ga qarang) va τ_1 ((13.27)ga qarang) miqdorlarni hisoblash uchun formulalar chiqardik. Agar rejalashtirish ufqi $T>0$ shunday tanlangan bo'lsaki, $0<\tau_0<\tau_1<T$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, unda (13.18) tenglama bilan topiladigan balanlangan o'sish rejimi $k(t)\equiv\bar{k}$ ko'rilayotgan iqtisodiy dinamika modeli uchun *magistral* deyiladi. U (t; k) tekislikda [τ_0; τ_1] vaqt oralig'iga mos *gorizontal kesmadan* iborat. Unda τ_0–magistralga *qo'nish*, τ_1 esa magistraldan *tushish* momentlari deyiladi.

Endi $T>0$ ni qanday tanlanganda $\tau_1-\tau_0$ musbat bo'lishi mumkinligini tekshiramiz. Shu $\tau_1-\tau_0$ ayirmani hisoblab, $T-T_0$ tengsizlik bajarilishi $\tau_1-\tau_0>0$ ni ta'minlashga amin bo'lamiz, bunda

$$T_0=\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\bar{k}}{k_T}+\int_{k_0}^{\bar{k}}\frac{d\xi}{f(\xi)-(\mu+\eta)\xi},$$

$\tau_1-\tau_0=T-T_0,$ $T_0=\tau_0+(T-\tau_1)=T-(\tau_1-\tau_0)$. Boshqacha aytganda, T_0 [0; τ_0] va [τ_1; T] kesmalar uzunliklari yig'indisidan iborat. Shunday qilib, $\tau_1-\tau_0\geq 0$ tengsizlik $T-T_0\geq 0$ tengsizlikka ekvivalentdir.

Agar $T=T_0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\tau_0=\tau_1$va magistral mavjud emas, k_0 nuqtadan M to'plamga harakat bitta o'tish (boshqaruvni bir marta o'zgartirish) bilan amalga oshiriladi. Agar $T\geq T_0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $k(t)\equiv\bar{k}$ magistral mavjud bo'ladi. Shu bilan birga τ_0 va τ_1 momentlar ham mavjud va (13.31), (13.27) formulalar bilan hisoblanishi mumkin. Shu momentlar boshqarishni o'zgartirish (almashtirish) momentlaridir. Agar T yetarli katta qilib olingan bo'lsa, $\tau_1-\tau_0$ – magistral bo'yicha harakat davri $T>0$ ga yetarli "yaqin" bo'ladi.

13.4-§. Masala yechimining optimalligi

Ta'kidlab o'tamizki, quyidagi

$$s(t)=\begin{cases}1, & \text{agar } 0\leq t<\tau_0, \\ \bar{s}, & \text{agar } \tau_0\leq t<\tau_1, \\ 0, & \text{agar } \tau_1\leq t<T\end{cases} \tag{13.32}$$

munosabatlar bilan tavsiflanadigan $s(t)$ boshqaruv zaruriy shartni, ya'ni maksimum prinsipini va o'ng uchda transversallik shartini qanoatlantiradi. Biz M nurning shunday nuqtasini topishimiz kerakki, shu nuqtaga obyekt o'tkazilishi kerak va (13.5) jamlama iste'mol funksionali eng katta qiymatga erishsin.

Shu maqsadda maksimum prinsipini qanoatlantiradigan boshqa boshqarishlarni ko'ramiz. Aniqrog'i, quyidagicha aniqlangan $s(t)$ boshqaruvni olamiz:

$$s(t)=\begin{cases} 1, & \text{agar} \quad 0\le t<\tau_0, \\ \bar{s}, & \text{agar} \quad \tau_0\le t<\theta, \\ 0, & \text{agar} \quad \theta\le t<T, \end{cases} \tag{13.33}$$

bunda θ quyidagicha aniqlangan: $k(T)=kq_q$, $k_T<k_\theta<\bar{k}$, deylik. Unda $k(t)$ uchun $k(t)=k_\theta\cdot e^{(\mu+\eta)(T-t)}$, $\psi(t)$ funksiya uchun $\psi(t)=\int_t^T f'(k(\tau))\cdot e^{(\mu+\eta)(t-\tau)}dt$ formulaga egamiz.

Endi θ ni $k(\theta)=\bar{k}$ shartdan, ya'ni

$$k_\theta\cdot e^{(\mu+\eta)(T-\theta)}=\bar{k}$$

tenglamadan topamiz. Bundan θ uchun ushbu

$$\theta=T-\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\bar{k}}{k_\theta} \tag{13.34}$$

formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, biz (13.2) obyektni berilgan boshlang'ich $k(0)=k_0$, $k_0<k_T<kq_q$ holatdan M nurning biror nuqtasiga o'tkazuvchi va maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi ikkita (13.32) va (13.33) boshqaruvlarga egamiz. Bunda (13.32) boshqaruv obyektni $(T, k_T)\in M$ nuqtaga, (13.33) boshqaruv esa, $(T, kq_q)\in M$, $kq_q>k_T$ nuqtaga o'tkazadi. Endi shu boshqaruvlar uchun (13.5) funksionalning qiymatini (13.33) boshqaruv uchun hisoblaymiz. Unda (13.5) funksional θ ning funksiyasi bo'lib qoladi. Uni $\Phi(\theta)$, ya'ni $y[s]=\Phi(\theta)$ deb belgilaymiz. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\Phi(\theta)=J[s]=\int_0^T(1-s(t))f(k(t))\,dt=\int_0^{\tau_0}0\cdot dt+\int_{\tau_0}^{\theta}(1-\bar{s})f(\bar{k})\,dt+$$

$$+\int_0^T f(k(t))\,dt = (1-\bar{s})f(\bar{k})(\theta-\tau_0) + \int_0^T f(k(t))\,dt. \qquad (13.35)$$

$$\Phi(\tau_1) = (1-\bar{s})f(\bar{k})(\tau_1-\tau_0)\int_{\tau_1}^{T} f(k(t))\,dt.$$

Endi $\Phi(\theta)$, $\theta\in[\tau_1;T]$. funksiyasni o'rganamiz. $\Phi(\tau_1)$ funksionalning (13.32) boshqaruvdagi qiymati. (13.35) funksiyaning hosilasini qq bo'yicha hisoblaymiz:

$$\Phi'(\theta) = (1-\bar{s})f(\bar{k}) - f(\bar{k}) = -\bar{s}\,f(\bar{k}) = const < 0. \qquad (13.36)$$

Bu $\Phi(\theta)$ funksiyaning chiziqli ekanini anglatadi. Boshqacha aytganda, $\Phi(\theta)$ funksiya $[\tau_1;\ T]$ kesmada monoton kamayuvchi. Shuning uchun $\Phi(\theta$ ning eng katta qiymatiga kesmaning chap uchida erishiladi, ya'ni $\Phi(\tau_1)>\Phi(\theta)$, $\approx\theta\in(\tau_1;T]$. Shunday qilib, (13.5) funksionalning (13.32) boshqaruvga mos qiymati eng katta bo'ladi, ya'ni (13.32) boshqaruv (13.5) funksionalning maksimumi ma'nosida optimal bo'ladi. Buning ma'nosi shuki, optimal holatlar traektoriyasi obyektni $(T;\ k_T]$ nuqtaga o'tkazadi.

Optimal traektoriyani qurish uchun $k(t)$ funksiyani qavariqlikka tekshiramiz. $[0,\ \tau_0]$ kesmada $s=1$ bo'lganda $\dot{k} = f(a) - (\mu+\eta)\,k$ differensial tenglamaga egamiz. $\ddot{k}(t)$ ni hisoblaymiz:

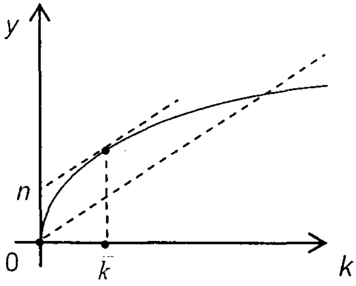
$$\ddot{k}(t) = f'(k(t))\,\dot{k}(t) - (\mu+\eta)\,\dot{k}(t) = [f'(k(t)) - (\mu+\eta)]\cdot[f(k(t)) - (\mu+\eta)\,k(t)].$$

Ammo $[0;\ \tau_0]$ kesmada $f(k(t)) > (\mu+\eta)\,k(t)$, $f''(k(t)) > \mu+\eta$ tengsizliklar o'rinli (13.3-chizmaga qarang), bunda $k(\tau_0) = \bar{k}$, $\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\mu+\eta)\,k(t) > 0$. Shuning uchun $\ddot{k}(t) > 0$, ya'ni $k(t)$ funksiya $[0;\ \tau_0]$ da qavariq (13.4-chizma).

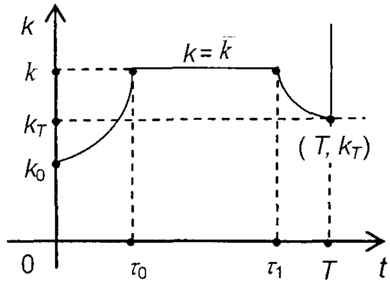
Endi ma'lumki, $[\tau_1;\ T]$ kesmada $s=0$ va ushbu $\dot{k}(t) = -(\mu+\eta)\,k(t)$ differensial tenglamaga egamiz. Bundan foydalanib $\ddot{k}(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{k}(t) = -(\mu+\eta)\,\dot{k}(t) = -(\mu+\eta)\cdot[-(\mu+\eta)\,k(t)] = (\mu+\eta)^2\,k(t) > 0.$$

Bundan $k(t)$ funksiya $[\tau_1;T]$ kesmada ham qavariq ekani kelib chiqadi (13.4-chizma). Nihoyat, (13.32) optimal boshqaruvga mos



13.3-chizma



13.4-chizma

optimal traektoriyani uzil-kesil qurish mumkin. 13.4-chizmadan optimal traektoriya quyidagicha qurilgani ko‘rinadi: obyekt k_0 holatdan $\bar{k}$ holatga (k_T dan ham yuqoriroq holatga) tezkorlik bilan o‘tkaziladi, keyin shu $\bar{k}$ holatda iloji boricha uzoqroq vaqt ushlab turiladi. Nihoyat, $\bar{k}$ holatdan ($[\tau_1, \bar{k}]$ nuqtadan) $k_T$holatga ($[T, k_T]$ nuqtaga) tezkorlik bilan o‘tkaziladi (tushiriladi). Yuqorida aytib o‘tilganidek, $T \to +\infty$ da $\tau_1 - \tau_0 \to +\infty$. Shuning uchun yetarli katta T lar uchun obyektni (iqtisodiy sistemani) boshqaruv usuli iqtisodiy dinamikaning o‘zgarmas jamg‘arish normali modelini boshqaruvdagi usuli bilan “yaqin”. Shu yaqinlik *magistral teorema* yordamida ifodalanadi.

16.3-teorema (magistral teorema). Rejalashtirish davri T>0 yetarli katta bo‘lsin. Unda (13.1)–(13.5) masala (13.5) jamlama iste’mol funksionali maksimumi ma’nosida optimal boshqaruv s(t) mavjud. U quyidagicha qurilgan: rejalashtirish davrining boshida (ya’ni $0 \le t \le \tau_0$ da, bunda τ_0 son (13.31) formula yordamida hisoblanadi) boshqaruv (jamg‘arish normasi) $s(t) \equiv 1$ rejalashtirish davrining oxirida (ya’ni $\tau_1 \le t \le T$ da, bunda τ_1 son (13.27) formula yordamida hisoblanadi) boshqaruv $s \equiv 0$ bo‘ladi. Qolgan vaqt davomida (ya’ni $\tau_1 \le t \le T$ vaqt oralig‘ida) harakat $k(t) \equiv \bar{k}$ magistral bo‘yicha $s(t) \equiv \bar{s}$ boshqaruv yordamida amalga oshiriladi, bunda $\bar{k}$ son – (13.18) tenglamaning yechimi, $\bar{s}$ son esa (13.19) formula yordamida hisoblanadi (13.4-chizma).

Misol ko‘ramiz. Hisob-kitoblarni Kobb-Duglas IChF uchun olib boramiz: $F(L,K) = a_0 K^{1-\alpha} L^{\alpha}$, $a_0 > 0, 0 < \alpha < 1$. Ma’lumki, o‘rtacha mehnat unumdorligi $f(k) = a_0 k^{\alpha}$. Hisoblashlar jarayonida η va η parametrlar kichik sonlar ekanini e'tiborga olish kerak. Shuning uchun ushbu $\frac{\mu+\eta}{a_0} \le \alpha < 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Hisoblashlar natijasini keltiramiz:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha a_0}{\mu+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \ge 1, \quad k_0 < k_T < \bar{k};$$

$$k(t) = \left[\frac{a_0}{\mu+\eta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{a_0}{\mu+\eta}\right) e^{-(\mu+\eta)(1-\alpha)t}\right]^{1/(1-\alpha)}, \quad t \in [0; \tau_0), \quad s(t) \equiv 1;$$

$$\tau_0 = \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{a_0 - (\mu+\eta) k_0^{1-\alpha}}{a_0 - (\mu+\eta)\bar{k}^{1-\alpha}} = \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{a_0 - (\mu+\eta) k_0^{1-\alpha}}{a_0(1-\alpha)} > 0;$$

$$\tau_1 = T + \frac{1}{\mu+\eta} \ln k_T - \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{a_0 \alpha}{\mu+\eta} > 0;$$

$$T_0 = \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{\alpha\left[a_0 - (\mu+\eta) k_0^{1-\alpha}\right]}{(1 \ \alpha)(\mu+\eta) k_T^{1-\alpha}}, \quad \bar{s} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

13-bobga oid masalalar

I. Quyidagi IChFlar uchun iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya bo'ladigan modeli uchun $\bar{k}$, $\bar{s}$, $\bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_1$ miqdorlar hisoblansin:

1. $F(L,K) = \sqrt{KL}$.
2. $F(L,K) = \sqrt[3]{KL^2}$.
3. $F(L,K) = \sqrt[4]{K^3 L}$.
4. $F(L,K) = \dfrac{4KL}{\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2}$.
5. $F(L,K) = \dfrac{2KL}{K+L}$.
6. $F(L,K) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$.
7. $F(L,K) = \sqrt[5]{KL^4}$.
8. $F(L,K) = \dfrac{\sqrt{2}KL}{\sqrt{K^2+L^2}}$.

II. I bo'limdagi IChFlar uchun iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya bo'lgan modeli uchun $\widetilde{k}$, $\widetilde{s}$, $\widetilde{\tau}_0$, $\widetilde{\tau}_1$ miqdorlar hisoblansin.

13-bobga oid nazorat savollari

1. O'zgaruvchi jamg'arish normali model uchun masalaning qo'yilishini aytib bering.

2. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya bo'lgan modeli uchun asosiy differensial tenglamani yozing.

3. Jamlama iste'mol funksionalini yozing.

4. Statsionar yechimning mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering.

5. O'zgaruvchi jamg'arish normali model uchun mos Gamilton funksiyasini va yordamchi o'zgaruvchilar uchun qovushma sistemani yozing.

6. Balanslangan o'sishning optimal rejimini topish uchun tenglamani yozing.

7. Magistralga qo'nish va undan tushish momentlari uchun formulalarni yozing.

8. Maksimum prinsipini qanoatlantiradigan boshqaruvning optimalligini isbotlang.

9. Optimal traektoriyalar tasvirini chizing.

10. Magistral teoremasini aytib bering.

11. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq bo'lgan modeli uchun 2—10 savollarga javob bering.

ADABIYOTLAR

1. Макаров В.Л Модели согласования экономических интересов. Учебное пособие. Новосибирский Г.У., Новосибирск. 1981.

2. Tuxliyev N, O'lmasov A. Ishbilarmonlar lug'ati. Toshkent, Qomuslar Bosh tahririyati, 1993.

3. Насритдинов Г. Решение задачи потребительского выбора при заданном нелинейном бюджетном ограничении. Материалы научн. конф."Сирождиновские чтения" посвященной памяти академика С.Х. Сирождинова. г. Ташкент, 8 мая 2006 г, 114 118.

4. O'lmasov A. Sharifxo'jayev M. Iqtisodiyot nazariyasi. Toshkent, "Mehnat", 1995.

5. Габасов Р. Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд-во БГУ, 1981 (изд. 2).

6. Gabasov R. Kirillova F.M. Optimallashtirish usullari. "O'zbekiston", Toshkent, 1995 (tarjimonlar X. Jumayev, I. Isroilov).

7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. Учебник МГУ, Москва, "ДИС", 2000.

8. Cobb C.W., Douglas P.H. A theory of production. -"American Economy Review", v.18, №1, 1928.

9. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Изд-во М. – Л., 1939.

10. Немчинов В.С.Экономика-математические методы и модели. Москва, "Мысль", 1965.

11. Arroco.K.J., Chenery H.B., Minhas B.C. , Solow R. Capital - labor substitution and economic efficieny. – Review of Economics and Statistics, v.45, № 2, 1961.

12. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. Москва, 1972.

13. Данциг Д. Линейное программирование, его обобщение и применение. Москва, "Прогресс", 1966 (перевод с англ).

14. Данциг Д. Maximization of Linar Function of Variables Subject to Linar Inequalites" in Купманс Т.К. "Actioity Analisis of Production and Allocotion, 1951, Cocoles monograph B".

15. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Москва, изд-во АН СССР, 1959.

16. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz, 1-qism. Toshkent, "O'qituvchi", 1994.

17. Шалабанов А.К., Роганов Д.А. Эконометрика. Учебно-методическое пособие. Академия Управления "ТИСБИ", Казань-2004.

18. Бекишев Г.А., Кратко М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование. Москва, "Наука", 1980.

19. Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. Изд-во МГУ, Москва, 1981.

20. Насритдинов Г. Икки Ғзгарувчили нормаль масала. ФМИ, 2006, №3.

21. Насритдинов Г. Метод приравнивания угловых коэффициентов для решения оптимизационных задач. Вестник Тамбовского университета. Том 12, вып.4, 2007 (503-504).

22. Насритдинов Г. Изоклиналы производственных функций и линия долгосрочного экономического роста. Вторая международная конференция: "Информационные математи-ческие технологии в экономической технике и образовании (3-я секция) 22–24.11.2007, г. Екатеренбург (171–172).

23. Насритдинов Г. Определение вида ПФ по статистическим значениям макроэкономических переменных. Узб. журнал "Проблемы информатики и энергетики". АН РУз, 2008, № 2–3 (98–102).

24. Насритдинов Г. Необходимость дополнительных наблюдений для определения вида производственных функций. Материалы респ. конференции, посвященной 90-летию НККз и 70-летию акад. Азларова Т.А..8-мая, 2008 (205 24), г.Ташкент.

25. Насритдинов Г., Адашев И. Методы оценки качества подбора уравнения парной линейной регрессии и его параметров. Узб. журнал: "Проблемы информатики и энергетики". "Фан" АН РУз, 2008, №1.

26. Насритдинов Г. Использование теории дифференциальных уравнений в исследовании двухсекторных моделей эконо-мической динамики. Материалы международной конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения" в "Трудах института математики и компьютерных технологий". Ашгабат, Ылым, 1995.

27. Насритдинов Г. Односекторная модель экономического роста с линейно-вогнутым объемом трудовых ресурсов. Узб. журнал "Проблемы информатики и энергетики", изд во "ФАН" АН РУз, № 3, 1997.

28. Насритдинов Г. Односекторная модель экономического роста с нелинейной функцией выбытия производственных ресурсов. Узб. журнал "Проблемы информатики и энерге-тики", изд-во "ФАН" АН РУз, № 6, 1997.

29. Насритдинов Г. Односекторная модель экономического роста

с переменной нормой накопления. Узб. журнал "Проблемы информатики и энергетики", изд-во "ФАН" АН РУз, № 4, 1998.

30. Насритдинов Г. Построение магистралей для статических производственных функций. Тезисы докл. на Республикан-ской научной конф., Экономический факультет НУУз, малая типография. Т., 2002.

31. Насритдинов Г., Ишмухамедов А. Применение метода линеаризации для построения магистралей обобщенных производственных функций. Узб. журнал "Проблемы информатики и энергетики", изд-во "ФАН" АН РУз, № 6, 2002.

32. Фостер Р. Обновление производства: атакующие выигрывают. Москва, Прогресс, 1987.

33. Кристофер Даугерти. Введение в эконометрику. Москва, Инфра, 1977.

34. Шодиев Т.Ш. и другие. Эконометрика, Главная редакция концерна "Шарк", 1999.

35. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. Академия народного хозяйства при Правительстве РФ. Москва, "Дело", 1998.

36. Nasritdinov G. Ekonometrika.1. Tashkent, "Iqtisod-moliya" nashriyoti, 2008.

37. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. Изд-во "Статистика". – М.: 1972.

38. Терехов Л.Л. Производственные функции. – М.: Статистика, 1974.

39. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. – М.: Изд-во МГУ, 1980.

40. Беляева Э.С., Монахов В.М. Экстремальные задачи. М.: "Просвещение". 1977.

41. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка "Квант", вып. 59. – М.: Наука, 1986.

42. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: "Наука". 1982.

43. Котов И.В., Шалабин Г.В., Воронцовский А.В., Лисицын В.Ю., Похомова Н.В. Математическое моделирование макроэкономических процессов. – Л.: изд-во Ленинградского университета, 1980.

44. Nasritdinov G., Sherg'oziyev B. "Iqtisodiy-matematik modellar va usullar" bo'yicha mashq va masalalar to'plami. O'zMU. Toshkent, 2009.

MUNDARIJA

6-BOB. CHIZIQLI DASTURLASH - CHIZIQLI MODELLARNI O'RGANISHDA MUHIM MATEMATIK USUL

7-BOB. CHIZIQSIZ DASTURLASH - CHIZIQSIZ MODELLARNI O'RGANISHDA MUHIM MATEMATIK USUL

8-BOB. IQTISODIY JARAYONLARNING SILLIQMAS MASALALAR KO'RINISHIDA TAVSIFLANADIGAN MATEMATIK MODELLARI

9-BOB. IQTISODIY JARAYONLARNING EKONOMETRIK MODELLARI VA ULARNI TEKSHIRISHNING MATEMATIK USULLARI

10-BOB. MAKROIQTISODIY JARAYONLARNING NEOKLASSIK ISHLAB CHIQARISH FUNKSIYALARI (ICHF)

G‘. NASRITDINOV

IQTISODIY-MATEMATIK MODELLAR VA USULLAR

Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan talabalar uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti.
100029, Toshkent shahri, Matbuotchilar ko‘chasi, 32-uy.
Tel: 236-55-79; faks: 239-88-61.

Muharrir *M. Tursunova*
Musahhih *H. Zokirova*
Sahifalovchi *N. Mamanov*

Nashriyot litsenziyasi: AI №110, 15.07.2008.
Bosishga ruxsat etildi: 10. 07. 2010. «Tayms» garniturasi. Ofset usulida chop etildi. Qog‘oz bichimi 60x84 $^1/_{16}$. Shartli bosma tabog‘i 21,0. Nashr bosma tabog‘i 20,0. Adadi 500 nusxa. Buyurtma № 19. Bahosi shartnoma asosida.

«START-TRACK PRINT» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, 8-mart ko‘chasi, 57-uy.